УДК 51-71, 515.173, 539.12.01

КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА И ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ УНИТАРНАЯ ГРУППА SUH(3)

Попов Н. Н.[a,1]

[a] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, 119333, Россия.

В работе показывается, что квантовую хромодинамику как строгую теорию естественно строить на основе использования гиперболической унитарной группы $SUh(3)$, являющейся группой симметрии трёхмерного комплексного пространства гиперболического типа. Такой подход позволяет обнаружить глубокую связь между сохраняющимися цветовыми зарядами кварков и симметриями гиперболического трёхмерного комплексного пространства, а также математически корректно ввести эрмитовы операторы, описывающие восемь глюонов – переносчиков сильных взаимодействий.

Ключевые слова: гиперболические комплексные пространства, гиперболические числа, унитарные группы симметрии, цветные заряды, эрмитовы операторы глюонов.

QUANTUM CHROMODYNAMICS AND THE HYPERBOLIC UNITARY GROUP SUH(3)

Popov N. N.[a,1]

[a] Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333, Russia.

The paper shows that it is natural to construct quantum chromodynamics as a rigorous theory on the basis of employment of hyperbolic unitary group $SUh(3)$, which is a symmetry group for the three-dimensional complex space of the hyperbolic type. Such an approach makes it possible to discover a profound connection between conserved color charges of the quarks and the symmetries of the hyperbolic three-dimensional complex space. Further, it allows to introduce correctly from mathematical point of view the Hermitian operators to describe the eight gluons, which are carriers of strong interactions.

Keywords: hyperbolic complex spaces, hyperbolic numbers, unitary symmetry groups, color charges, Hermitian gluon operators.

PACS: 12.38.-t, 11.30.-j.
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2020.2.71-82

Введение

В настоящее время [1] принято считать, что квантовая хромодинамика (КХД) строится на основе использования цветовой группы $SU(3)$. Каждый кварк может находиться в одном из трёх цветовых состояний или, как говорят, несёт цветовой заряд. Каждый цветовой заряд задаётся трёхмерным единичным вектором. Векторы различных цветных зарядов ортогональны между собой. Сильные взаимодействия между кварками осуществляются за счёт обмена цветными зарядами. В качестве переносчиков цвета выступают восемь безмассовых частиц — глюонов, несущих двойной цвет. Помимо трёх цветных зарядов имеется также три антизаряда, или антицвета. Сразу же возникает вопрос: какими векторами описываются антицветные заряды? Теория КХД не даёт ответа

[1]E-mail: nnpopov@mail.ru

на этот вопрос. Также непонятно, как в теории КХД можно математически корректно описать восемь глюонов в рамках использования группы $SU(3)$. Отсутствие адекватного математического аппарата приводит к необходимости вводить ad hoc правила, устанавливающие дополнительные ограничения на возможные варианты взаимодействия цветных зарядов с глюонами, а также на взаимодействия глюонов между собой. И хотя, в целом, теория КХД успешно справляется с поставленной перед ней задачей описания сильных взаимодействий, тем не менее она, по существу, остаётся феноменологической. В предлагаемой работе делается попытка подвести под эту теорию более фундаментальный математический аппарат, который создаётся на основе идеи о глубокой связи между группами симметрий физического пространства-времени и группами симметрий в физике элементарных частиц. Постулируется, что группа симметрии, которую необходимо положить в основу теории сильных взаимодействий кварков, должна описывать симметрию реального физического пространства-времени, точнее, должна быть группой собственных движений метрики этого пространства. В качестве кандидата на роль реального физического пространства-времени в микромире выбирается шестимерное псевдориманово пространство сигнатуры $(+\ +\ +\ -\ -\ -)$ с касательным слоем в виде псевдоевклидова шестимерного пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ [2–4].

1. Псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}_{3,3}$ как образ трёхмерного гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$

Постулируем, что в микромире, который определяется параметрами протяжённости порядка 10^{-12}см и временными интервалами порядка 10^{-22}с физическое пространство-время представляет собой шестимерное псевдоевклидово пространство сигнатуры $(+\ +\ +\ -\ -\ -)$. Координаты точки в таком пространстве задаются тремя пространственными вещественными координатами x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{E}_{3,3}$ и тремя временными вещественными координатами t_1, t_2, $t_3 \in \mathbb{E}_{3,3}$. Квадрат интервала s задаётся как

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2\ . \tag{1}$$

Если ввести обозначения $t_1 = x_4$, $t_2 = x_5$, $t_3 = x_6$ и определить метрику η_{ij} шестимерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ как $\eta_{ij} = \pm\delta_{ij}$, где знак $(+)$ берётся, если $i, j = 1, 2, 3$, а знак $(-)$ берётся, если $i, j = 4, 5, 6$, то формула (1) представляется в виде

$$s^2 = \eta_{ij} x^i x^j\ ,\ \ i, j = 1, \ldots, 6\ . \tag{2}$$

Наиболее общей группой собственных движений метрики η_{ij}, т.е. группой собственных псевдоортогональных преобразований координат, оставляющих инвариантной метрику и неизменной квадратичную форму (2), является группа преобразований $SO(3,3)$. Покажем, что шестимерное псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}_{3,3}$ можно представить в виде трёхмерного комплексного гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$. Для того, чтобы корректно ввести понятие n-мерного комплексного гиперболического пространства $\mathbb{H}^n$ для начала определим алгебру гиперболических комплексных чисел $\mathbb{H}$ как двумерный R-модуль с парой образующих $\{1, j\}$ и таблицей умножения [5]:

	1	j
1	1	j
j	j	1

(3)

Элемент $h \in \mathbb{H}$ будем записывать в виде $h = 1x + jt$, где x, $t \in \mathbb{R}$, а j — мнимая единица в $\mathbb{H}$. Вещественное число $\Re(h) = x$ называется вещественной частью гиперболического комплексного числа h, а $\Im(h) = t$ называется мнимой частью числа h. В алгебре определена инволютивная операция комплексного сопряжения: $h = x + jt \to \overline{h} = x - jt$. Алгебра гиперболических комплексных чисел $\mathbb{H}$ индуцирует на плоскости двумерную псевдоевклидову геометрию с псевдометрикой

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ . \tag{4}$$

Если в алгебре $\mathbb{H}$ определить скалярное произведение двух элементов $h, g \in \mathbb{H}$ в виде $\langle h, g\rangle = h\overline{g}$, то $\mathbb{H}$ наделяется свойствами одномерного комплексного гиперболического пространства, изоморфного двумерному вещественному псевдоевклидову пространству $\mathbb{E}_{1,1}$. Этот результат можно обобщить на произвольное n-мерное комплексное гиперболическе пространство $\mathbb{H}^n$. Пусть $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, тогда скалярное произведение двух элементов $\vec{h}, \vec{g} \in \mathbb{H}^n$ определяется формулой

$$\langle h, g\rangle = h_1\overline{g}_1 + \cdots + h_n\overline{g}_n \ . \tag{5}$$

Псевдонорма элемента $\vec{h} \in \mathbb{H}^n$ определяется как $\langle h, h\rangle$. Пространство $\mathbb{H}^n$ изоморфно $2n$-мерному псевдоевклидову пространству $\mathbb{E}_{n,n}$. Квадрат интервала в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{E}_{n,n}$

$$s^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - t_1^2 - \cdots - t_n^2 \ . \tag{6}$$

можно задать в виде псевдонормы вида (5) в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$, если положить $h_i = x_i + jt_i$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. имеет место равенство

$$s^2 = \langle h, h\rangle \ . \tag{7}$$

Группа $SO(n, n)$ собственных движений метрики пространства $\mathbb{E}_{n,n}$ изоморфна унитарной гиперболической группе собственных преобразований $SUh(n)$ в пространстве $\mathbb{H}^n$, оставляющих инвариантной псевдонорму вида (5). Для наших целей достаточно будет ограничиться рассмотрением случая пространства $\mathbb{H}^3$ и изоморфного ему псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_{3,3}$.

2. Гиперболическая цветовая группа унитарной симметрии $Uh^3(1)$ и её представление

Метрика шестимерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ инвариантна относительно ряда внутренних групп симметрий, возникающих в результате представления псевдоевклидовой метрики с помощью гиперболических комплексных чисел в гиперболическом комплексном пространстве $\mathbb{H}^3$, согласно формулам (1), (2), (5) (7). Рассмотрим тождественное представление унитарной гиперболической группы $Uh^3(1)$, действующей в пространстве $\mathbb{H}^3$. Это трёхпараметрическая группа H-унитарных матриц вида

$$U = \begin{pmatrix} e^{j\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\theta_3} \end{pmatrix} , \tag{8}$$

оставляющих инвариантной билинейную форму (5) в случае $n = 3$. Тождественное представление группы $Uh^3(1)$ приводимо и разлагается на прямую сумму неприводимых представлений, действующих в инвариантных одномерных подпространствах $\mathbb{H}$,

$$Uh^3(1) = Uh(1) \oplus Uh(1) \oplus Uh(1) \ .$$

Генераторы этой группы индуцируют три закона сохранения. Эти законы сохранения связаны с тремя цветовыми квантовыми характеристиками кварков, которые называются цветными зарядами, например, K — красный, $З$ — зелёный, C — синий. Каждый кварк может находиться в одном из трёх цветовых состояний. Каждый цветовой заряд кварка задается трёхмерным вектором, принадлежащим комплексному гиперболическому пространству $\mathbb{H}^3$. Положим, по определению

$$h_K = \begin{pmatrix} 1+j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ h_З = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+j \\ 0 \end{pmatrix} , \ h_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+j \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Наряду с тремя цветовыми зарядами существуют дополнительно три антицветовых заряда: антикрасный $\overline{K}$, антизелёный $\overline{З}$ и антисиний $\overline{C}$, которые задаются в пространстве $\mathbb{H}^3$ как

$$h_{\overline{K}} = \begin{pmatrix} 1-j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ h_{\overline{З}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-j \\ 0 \end{pmatrix} , \ h_{\overline{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-j \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Из определения цветных зарядов следует, что вектора цветных зарядов и антизарядов комплексно сопряжены: $h_{\overline{K}} = \overline{h}_K$, $h_{\overline{З}} = \overline{h}_З$, $h_{\overline{C}} = \overline{h}_C$. Все векторы зарядов и антизарядов ортогональны между собой. Например, согласно (3)

$$\langle h_K, h_{\overline{K}} \rangle = (1+j, 0, 0) \begin{pmatrix} 1-j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - j^2 = 0 \, .$$

3. Гиперболическая унитарная группа $SUh(3)$ и глюоны

Выше было показано, что такая сохраняющаяся квантовая характеристика кварков, как цвет, может быть индуцирована унитарной гиперболической группой $Uh^3(1) = Uh(1) \oplus Uh(1) \oplus Uh(1)$, оставляющей инвариантной метрику псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_{3,3}$. Поэтому кварки несут не только сохраняющийся электрический заряд, но и цветовой. Взаимодействие цветных кварков между собой осуществляется за счёт обмена цветом. Глюоны — это кванты цветового поля, связывающие между собой цветные кварки. Обмен цветом осуществляется посредством восьми двухцветных глюонов. Учитывая, что цветовая квантовая характеристика кварков оказывается непосредственно связанной с гиперболической группой симметрии $Uh^3(1)$ псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_{3,3}$, естественной представляется попытка описания глюонов-переносчиков цветового взаимодействия между кварками с помощью более общей гиперболической унитарной группы симметрии псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_{3,3}$, элементы которой являются движениями метрики пространства. Рассмотрим гиперболическую группу унитарной симметрии $SUh(3)$, представимую в виде группы трехмерных унитарных унимодулярных матриц, имеющих восемь независимых параметров. Элементы группы $U \in SUh(3)$ оставляют инвариантной квадратичную форму

$$h_1\overline{h}_1 + h_2\overline{h}_2 + h_3\overline{h}_3$$

в трёхмерном комплексном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, h_1, h_2, $h_3 \in \mathbb{H}$. Алгебра Ли группы $SUh(3)$ задаётся восемью генераторами, представимыми в виде матриц типа Гелл-Манна [6], λ_m, $m = 1, \ldots, 8$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j & 0 \\ j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j \\ 0 & j & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Матрицы (11) отличаются от оригинальных матриц Гелл-Манна лишь заменой мнимой единицы i на гиперболическую мнимую единицу j. Генераторы (11) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\left[\frac{\lambda_k}{2}, \frac{\lambda_l}{2}\right] = j f_{klm} \frac{\lambda_m}{2} \, ,$$

где

$$\begin{aligned}
&f_{123} = f_{132} = 1 \, , \\
&f_{147} = f_{257} = f_{246} = f_{367} = f_{651} = f_{516} = f_{435} = f_{615} = f_{376} = f_{453} = \frac{1}{2} \, , \\
&f_{174} = f_{275} = f_{264} = -\frac{1}{2} \, , \\
&f_{678} = f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2} \, .
\end{aligned} \tag{12}$$

Из (12) следует, что f_{123}, f_{156}, f_{367}, f_{345}, f_{458}, f_{678} антисимметричны по первому и второму индексам и симметричны по второму и третьему индексам, f_{147}, f_{257}, f_{246} антисимметричны по всем индексам.

Фундаментальным представлением группы $SUh(3)$ является триплет цветных зарядов кварка (К, З, С). Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &F_i = \frac{1}{2}\lambda_i \ , \quad i = 1, \ldots, 8 \ , \\ &U_\pm = F_1 \mp jF_2 \ , \quad V_\pm = F_4 \mp jF_5 \ , \quad W_\pm = F_6 \mp jF_7 \ . \end{aligned} \tag{13}$$

тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &U_+ h_{\text{З}} = h_K \ , \quad U_- h_K = h_{\text{З}} \ , \quad V_+ h_C = h_K \ , \quad V_- h_K = h_C \ , \quad W_+ h_C = h_{\text{З}} \ , \quad W_- h_{\text{З}} = h_C \ , \\ &U_+ h_{\overline{\text{З}}} = h_{\overline{K}} \ , \quad U_- h_{\overline{K}} = h_{\overline{\text{З}}} \ , \quad V_+ h_{\overline{C}} = h_{\overline{K}} \ , \quad V_- h_{\overline{K}} = h_{\overline{C}} \ , \quad W_+ h_{\overline{C}} = h_{\overline{\text{З}}} \ , \quad W_- h_{\overline{\text{З}}} = h_{\overline{C}} \ . \end{aligned}$$

Эти соотношения можно представить в виде диаграмм (рис. 1).

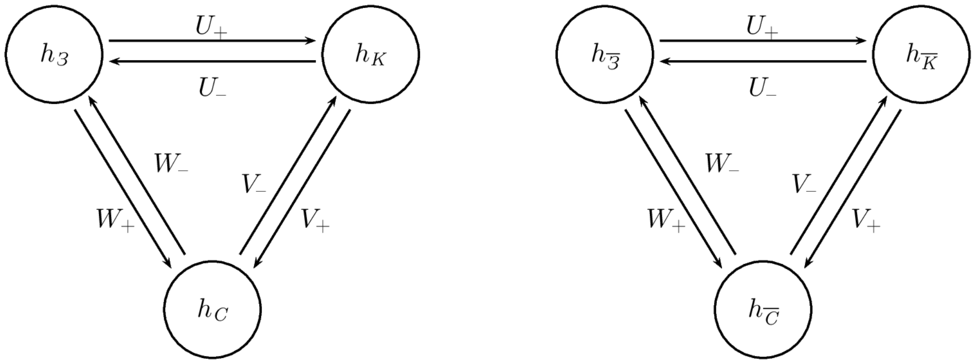

Рис. 1. Диаграммы действия операторов (13) на кварки (9) и (10).

Наряду с операторами «рождения» и «уничтожения» вида (13), которые не являются эрмитовыми и поэтому не могут претендовать на роль операторов, описывающих реальные частицы-переносчики цветного заряда и осуществляющие взаимодействие между цветными кварками, введём эрмитовы операторы, задающие шесть двухцветных глюонов $(\text{З}\overline{K})$, $(\overline{\text{З}}K)$, $(C\overline{K})$, $(\overline{C}K)$, $(C\overline{\text{З}})$, $(\overline{C}\text{З})$, являющихся квантами цветового поля, которое связывает кварки в нуклонах:

$$\begin{aligned} &\Delta_{\text{З}\overline{K}} = F_1 + F_2 \ , \quad \Delta_{\overline{\text{З}}K} = F_1 - F_2 \ , \\ &\Delta_{C\overline{K}} = F_4 + F_5 \ , \quad \Delta_{\overline{C}K} = F_4 - F_5 \ , \\ &\Delta_{C\overline{\text{З}}} = F_6 + F_7 \ , \quad \Delta_{\overline{C}\text{З}} = F_6 - F_7 \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Выпишем в явном виде эти операторы:

$$\begin{aligned} &\Delta_{\text{З}\overline{K}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1-j & 0 \\ 1+j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \Delta_{\overline{\text{З}}K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1+j & 0 \\ 1-j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \\ &\Delta_{C\overline{K}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-j \\ 0 & 0 & 0 \\ 1+j & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \Delta_{\overline{C}K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+j \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-j & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \\ &\Delta_{C\overline{\text{З}}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-j \\ 0 & 1+j & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \Delta_{\overline{C}\text{З}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+j \\ 0 & 1-j & 0 \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{15}$$

Еще два глюона ($K\overline{K} - З\overline{З}$) и ($K\overline{K} + З\overline{З} - 2C\overline{C}$) задаются эрмитовыми операторами

$$\begin{aligned} \Delta_{K\overline{K}-З\overline{З}} &= \sqrt{2}F_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \\ \Delta_{K\overline{K}+З\overline{З}-2C\overline{C}} &= \sqrt{2}F_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{16}$$

4. Правила, определяющие допустимые типы взаимодействий цветных кварков между собой, цветовые множители

В КХД величина сильной связи при обмене одним глюоном между двумя цветными зарядами пропорциональна произведению цветовых коэффициентов C_1 и C_2, вычисляемых в вершинах взаимодействия кварков и глюонов [7]. Для вычисления цветовых множителей рассмотрим все возможные обменные процессы между цветными зарядами с участием одного из восьми глюонов, определяемых соотношениями (15), (16). Для различных цветных зарядов K, $З$, C имеют место следующие обменные процессы, осуществляемые с помощью глюонов вида (15):

$$\begin{aligned} &\Delta_{З\overline{K}}h_K = h_З\ ,\ \ \Delta_{\overline{З}K}h_З = h_K\ , \\ &\Delta_{C\overline{K}}h_K = h_C\ ,\ \ \Delta_{\overline{C}K}h_C = h_K\ , \\ &\Delta_{C\overline{З}}h_З = h_C\ ,\ \ \Delta_{\overline{C}З}h_C = h_З\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Для различных антицветных зарядов $\overline{K}$, $\overline{З}$, $\overline{C}$ имеют место аналогичные обменные процессы, также осуществляемые с помощью глюонов вида (15):

$$\begin{aligned} &\Delta_{\overline{З}K}h_{\overline{K}} = h_{\overline{З}}\ ,\ \ \Delta_{З\overline{K}}h_{\overline{З}} = h_{\overline{K}}\ , \\ &\Delta_{\overline{C}K}h_{\overline{K}} = h_{\overline{C}}\ ,\ \ \Delta_{C\overline{K}}h_{\overline{C}} = h_{\overline{K}}\ , \\ &\Delta_{\overline{C}З}h_{\overline{З}} = h_{\overline{C}}\ ,\ \ \Delta_{C\overline{З}}h_{\overline{C}} = h_{\overline{З}}\ . \end{aligned} \tag{18}$$

Цветовые коэффициенты в приведённых обменных процессах появляются в виде множителей в правых частях соотношений (17) и (18), в данном случае все они оказываются равными единице, т.е. $C_1 = C_2 = 1$. Процессы обмена между различными цветными (антицветными) зарядами кварков с участием одного глюона вида (15), согласно соотношениям (17) и (18), можно представить в виде диаграмм на рис. 2 и рис. 3.

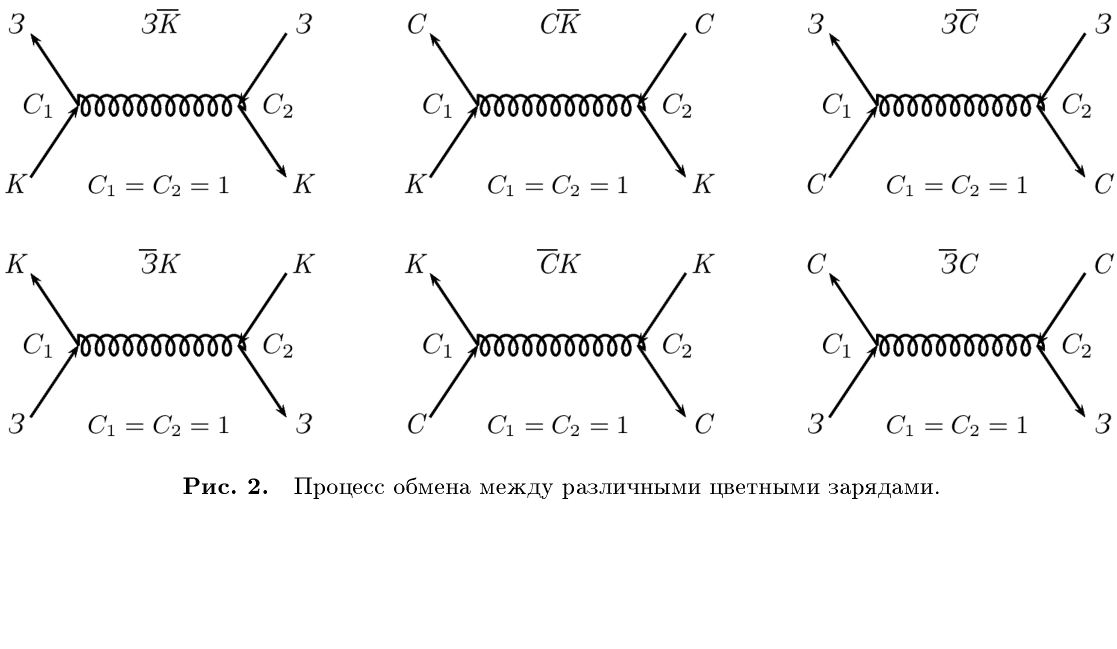

Рис. 2. Процесс обмена между различными цветными зарядами.

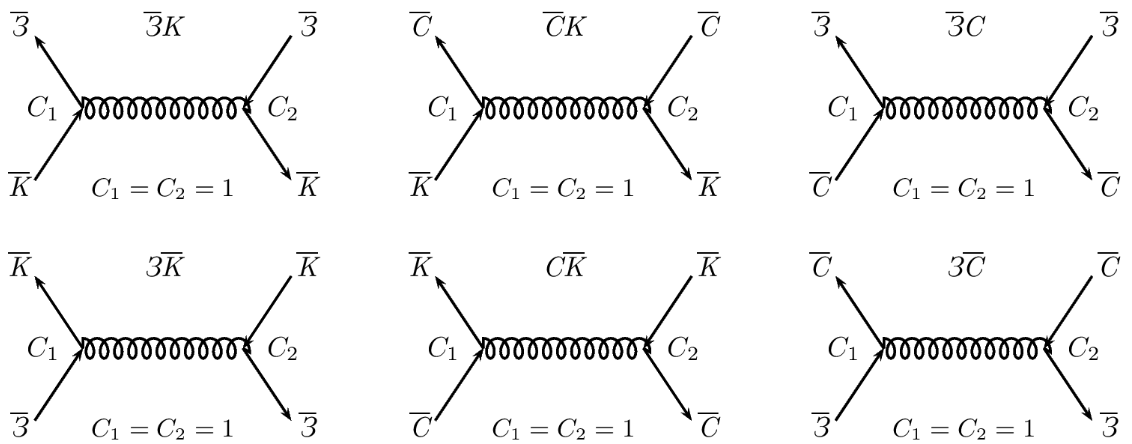

Рис. 3. Процесс обмена между различными антицветными зарядами.

Такого типа обменные процессы между различными цветными (антицветными) зарядами кварков происходят в барионах (антибарионах), состоящих из трёх кварков различного цвета (антицвета). Из сотношений (17) и (18) следует, что возможны обменные процессы между различными цветными и антицветными зарядами кварков с участием одного глюона вида (15), которые изображены на рис. 4.

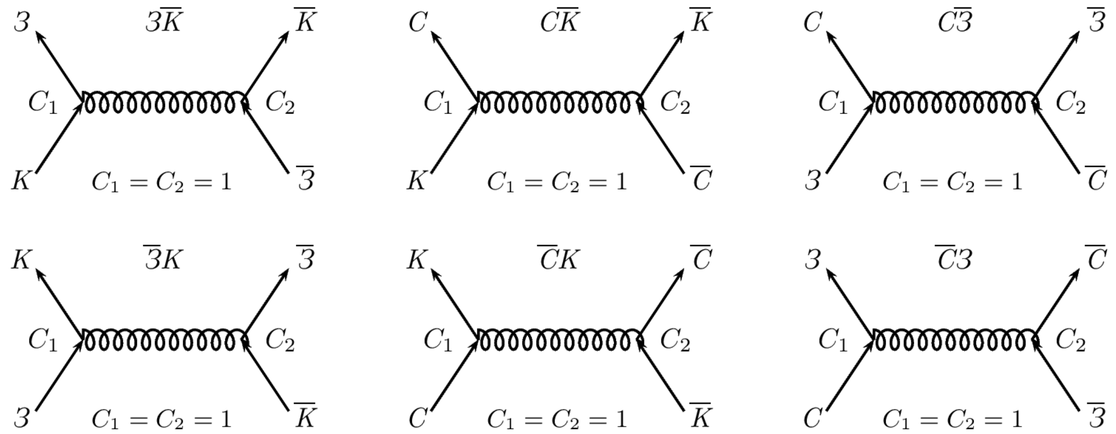

Рис. 4. Процесс обмена между различными цветными и антицветными зарядами.

Такого типа обменные процессы между различными цветными и антицветными зарядами кварков с участием одного глюона вида (15) происходят в мезонах, состоящих из кварка и антикварка. Два глюона вида (16) также могут принимать участие в обменных процессах между различными цветными и антицветными кварками. Для этих обменных процессов должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\Delta_{K\overline{K}-З\overline{З}} h_K = \frac{1}{\sqrt{2}} h_K\,,\;\; \Delta_{K\overline{K}-З\overline{З}} h_З = \frac{-1}{\sqrt{2}} h_З\,,\\ \Delta_{K\overline{K}+З\overline{З}-C\overline{C}} h_K = \frac{1}{\sqrt{6}} h_K\,,\;\; \Delta_{K\overline{K}+З\overline{З}-C\overline{C}} h_З = \frac{1}{\sqrt{6}} h_З\,,\;\; \Delta_{K\overline{K}+З\overline{З}-C\overline{C}} h_C = \frac{-2}{\sqrt{6}} h_C\,.\end{gathered} \tag{19}$$

Для антицветных зарядов имеют место аналогичные соотношения:

$$\begin{gathered}\Delta_{K\overline{K}-З\overline{З}} h_{\overline{K}} = \frac{1}{\sqrt{2}} h_{\overline{K}}\,,\;\; \Delta_{K\overline{K}-З\overline{З}} h_{\overline{З}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} h_{\overline{З}}\,,\\ \Delta_{K\overline{K}+З\overline{З}-C\overline{C}} h_{\overline{K}} = \frac{1}{\sqrt{6}} h_{\overline{K}}\,,\;\; \Delta_{K\overline{K}+З\overline{З}-C\overline{C}} h_{\overline{З}} = \frac{1}{\sqrt{6}} h_{\overline{З}}\,,\;\; \Delta_{K\overline{K}+З\overline{З}-C\overline{C}} h_{\overline{C}} = \frac{-2}{\sqrt{6}} h_{\overline{C}}\,.\end{gathered} \tag{20}$$

Процесс обмена между различными цветными зарядами кварков с участием одного глюона вида (16), согласно соотношениям (19), можно представить в виде диаграмм, изображённых на рис. 5. Точно по такой же схеме происходят обменные процессы между различными антицветными зарядами с участием глюонов вида (16).

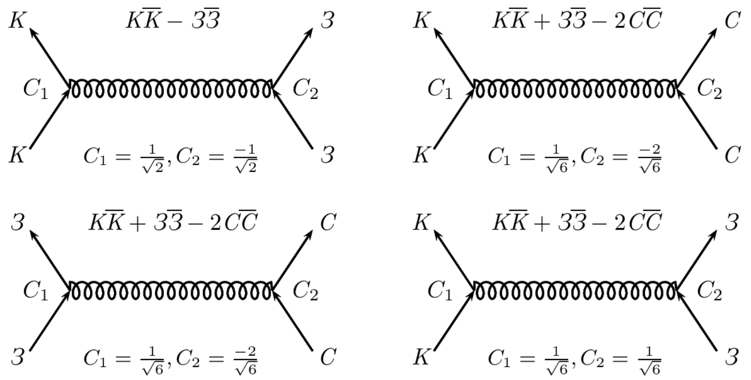

Рис. 5. Обменные процессы между зарядами разных цветов.

Процессы обмена между различными цветными и антицветными зарядами кварков с участием глюонов вида (16) согласно соотношениям (19) и (20) можно представить в виде диаграмм, изображённых на рис. 6. Выше были перечислены все варианты взаимодействия двух кварков

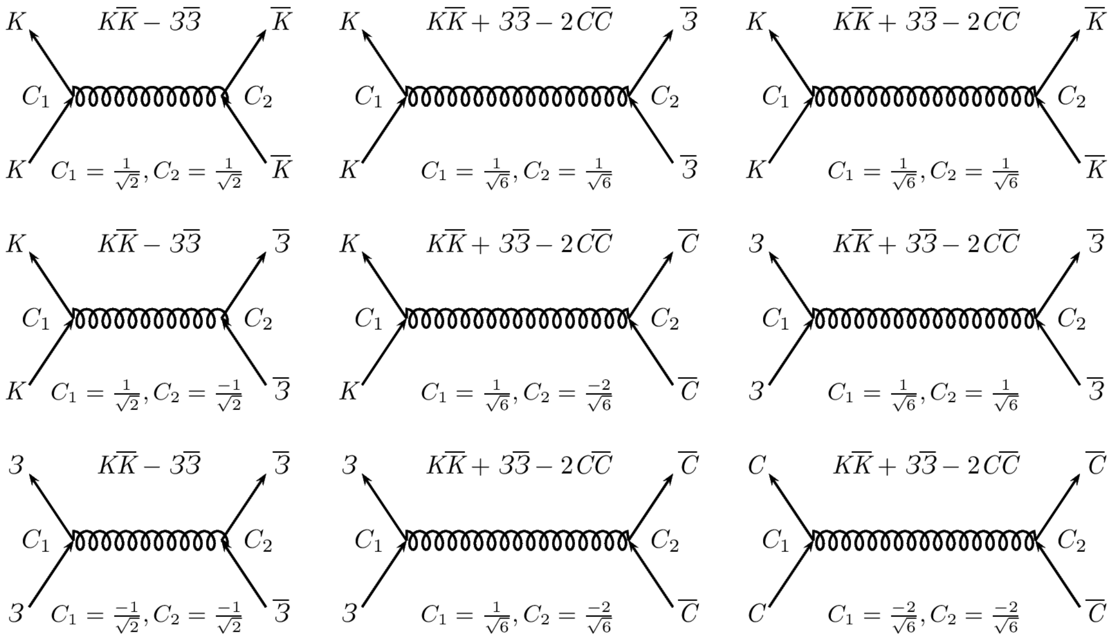

Рис. 6. Обменные процессы между цветными и антицветными зарядами.

разных цветов или антицветов. Теперь рассмотрим все возможные варианты взаимодействия двух кварков одного цвета. Из восьми существующих глюонов только два глюона вида (16) могут участвовать в обмене между двумя кварками одного цвета — красными (антикрасными) или зелёными (антизелёными) и лишь один глюон ($K\overline{K}+З\overline{З}-C\overline{C}$) может участвовать в обмене между двумя синими (антисиними) кварками. Эти обменные процессы также определяются соотношениями (19) и (20) и могут быть представлены в виде диаграмм на рис. 7. Точно такую же структуру имеют обменные процессы между одинаковыми антицветными зарядами.

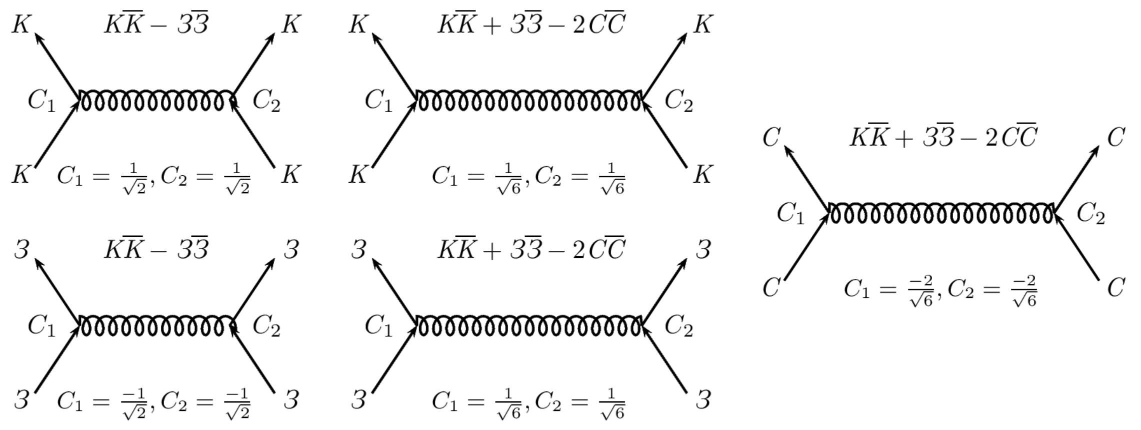

Рис. 7. Процесс обмена между зарядами одного цвета.

5. Допустимые типы взаимодействий между парами глюонов

Характерной чертой теории КХД является тот факт, что глюоны сами несут цветовой заряд и поэтому могут участвовать не только в обменных процессах между цветными кварками, но и взаимодействовать между собой. Однако не любые два глюона могут вступить во взаимодействие, в результате которого возникает третий глюон. Поэтому необходимо исследовать эти процессы более подробно. Каждый глюон описывается эрмитовым оператором вида (15) или (16). Два произвольно выбранных глюона α и β, задаваемых, соответственно, операторами Δ_α и Δ_β, и участвующих во взаимодействии между собой, должны порождать третий глюон γ, который будет описываться эрмитовым оператором Δ_γ, определяемым соотношением

$$c\Delta_\gamma = \Delta_\alpha\Delta_\beta + \Delta_\beta\Delta_\alpha \,, \tag{21}$$

где c — цветовой коэффициент, вычисляемый в вершине взаимодействия. Такое взаимодействие допустимо тогда и только тогда, когда получаемый оператор Δ_γ из соотношения (21) совпадает с одним из операторов вида (15) или (16). Для начала рассмотрим допустимые варианты взаимодействий двух глюонов из шести, задаваемых формулами вида (15). Всего возможны 15 вариантов и лишь шесть из них реализуются в качестве реальных взаимодействий. Они показаны на рис. 8: Убедимся в возможности их реализации на примере взаимодействия глюонов ($\overline{C}K$) и ($3\overline{K}$). Из (21) следует равенство

$$\Delta_{\overline{C}3} = \left\{\Delta_{\overline{C}K}\cdot\Delta_{3\overline{K}}\right\} = \Delta_{\overline{C}K}\cdot\Delta_{3\overline{K}} + \Delta_{3\overline{K}}\cdot\Delta_{\overline{C}K} \,.$$

Рассмотрим теперь все возможные варианты однократного взаимодействия глюонов вида (15) с глюонами вида (16). Из соотношения (21) получаем шесть возможных вариантов взаимодействий:

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{\sqrt{6}}\Delta_{C\overline{3}} = \left\{\Delta_{C\overline{K}}\cdot\Delta_{K\overline{K}+3\overline{3}-2C\overline{C}}\right\}\ , \quad \frac{-1}{\sqrt{6}}\Delta_{\overline{C}K} = \left\{\Delta_{\overline{C}K}\cdot\Delta_{K\overline{K}+3\overline{3}-2C\overline{C}}\right\}\ ,\\
&\frac{-1}{\sqrt{6}}\Delta_{C\overline{3}} = \left\{\Delta_{C\overline{3}}\cdot\Delta_{K\overline{K}+3\overline{3}-2C\overline{C}}\right\}\ , \quad \frac{-1}{\sqrt{6}}\Delta_{\overline{C}3} = \left\{\Delta_{\overline{C}3}\cdot\Delta_{K\overline{K}+3\overline{3}-2C\overline{C}}\right\}\ ,\\
&\frac{1}{\sqrt{6}}\Delta_{3\overline{K}} = \left\{\Delta_{3\overline{K}}\cdot\Delta_{K\overline{K}+3\overline{3}-2C\overline{C}}\right\}\ , \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\Delta_{\overline{3}K} = \left\{\Delta_{\overline{3}K}\cdot\Delta_{K\overline{K}+3\overline{3}-2C\overline{C}}\right\}\ .
\end{aligned} \tag{22}$$

Эти взаимодействия глюонов можно представить в виде следующих диаграмм на рис. 9. Отметим, что глюоны вида (15) не взаимодействуют с глюоном ($K\overline{K}-3\overline{3}$). Этот глюон может участвовать в процессе взаимодействия только с глюоном ($K\overline{K}+3\overline{3}-2C\overline{C}$):

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_{K\overline{K}-3\overline{3}} = \left\{\Delta_{K\overline{K}-3\overline{3}}\cdot\Delta_{K\overline{K}+3\overline{3}-2C\overline{C}}\right\}\ ,$$

что показано на рис. 10.

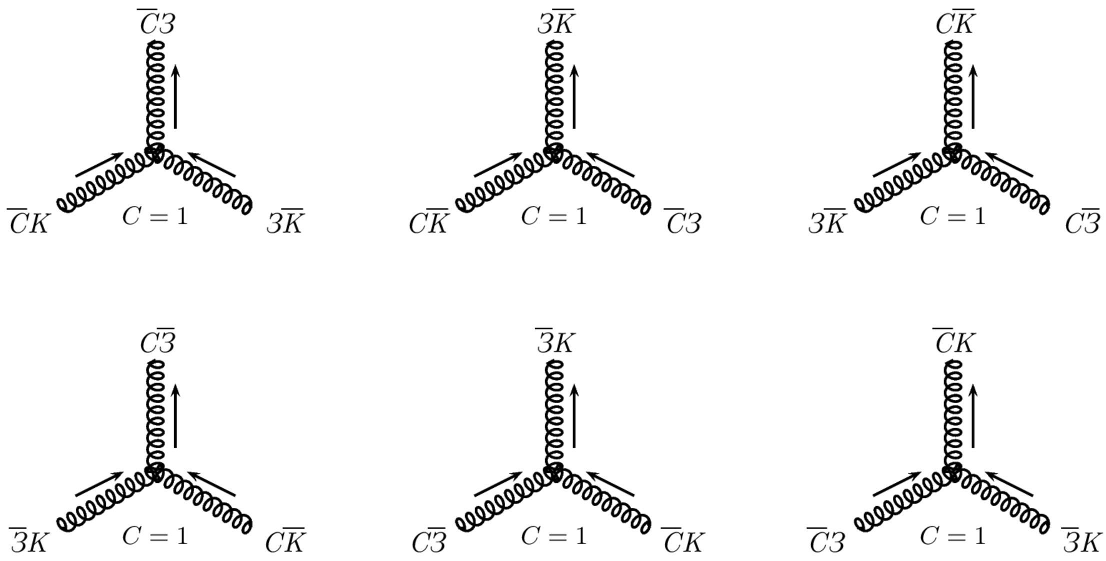

Рис. 8. Обменные процессы между тремя глюонами вида (15).

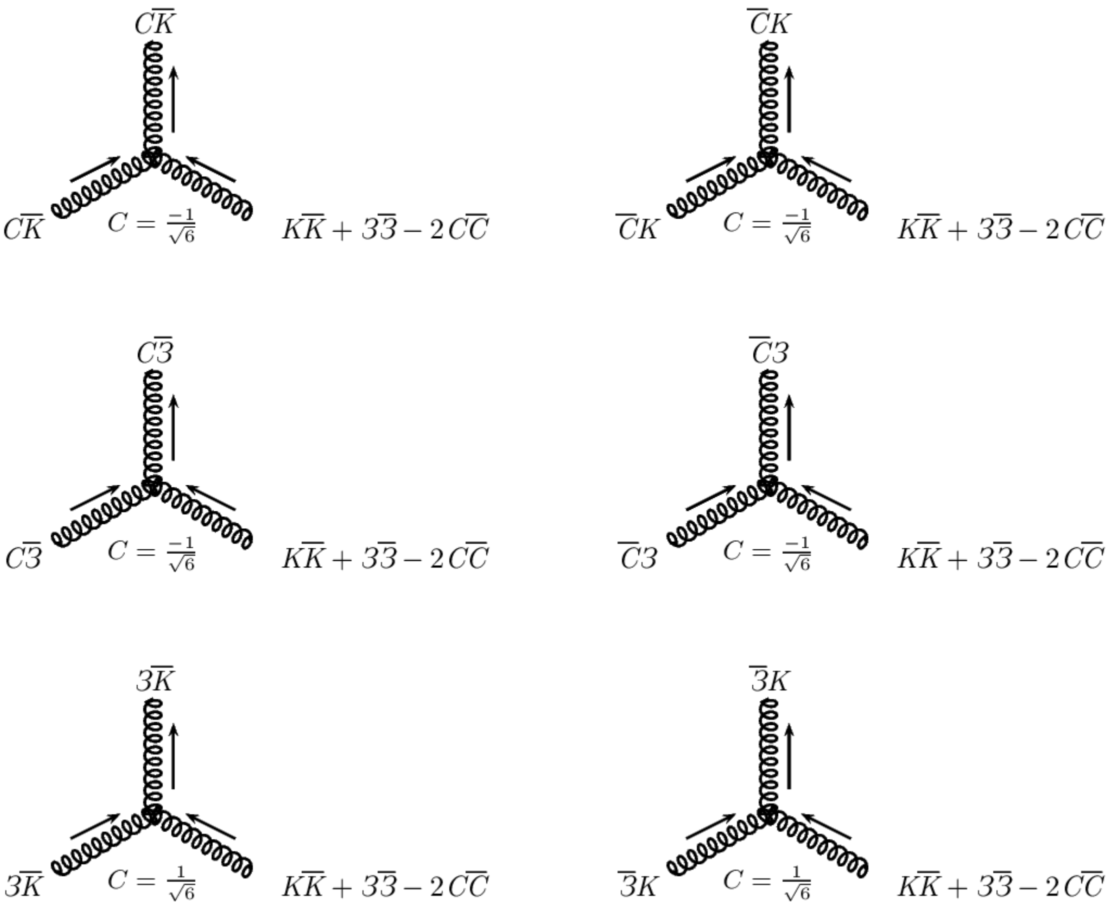

Рис. 9. Процессы взаимодействия между глюонами вида (15) и (16).

Итак, рассмотрены всевозможные варианты однократного взаимодействия восьми глюонов между собой и найдены цветовые коэффициенты, соответствующие этим взаимодействиям. Полученные результаты позволяют регулярным образом строить любые допустимые взаимодействия восьми глюонов произвольной кратности.

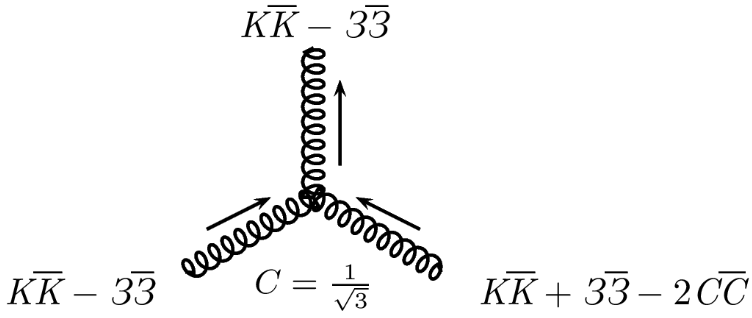

Рис. 10. Взимодействие глюона $K\overline{K} - 3\overline{3}$.

Заключение

В работе показано, что теорию квантовой хромодинамики естественнее строить на основе группы $SUh(3)$, которая является группой собственных движений псевдоевклидова шестимерного пространства $\mathbb{E}_{3,3}$ или изоморфного ему гиперболического комплексного трехмерного пространства $\mathbb{H}^3$. Полученный результат является косвенным подтверждением гипотезы о том, что в микромире наше реальное физическое пространство-время оказывается шестимерным псевдоевклидовым пространством $\mathbb{E}_{3,3}$, а также гипотезы о связи геометрических свойств физического пространства-времени с физическими сохраняющимися квантовыми характеристиками элементарных частиц, в частности кварков.

Список литературы

1. Клоуз Ф.Э. *Кварки и партоны.* М.: Мир, 1982.

2. Попов Н.Н. О корреляции групп симметрии шестимерного псевдоевклидова пространства и квантовых характеристик элементарных частиц. *37-я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения.* 2018. Т. 37. № 3. С. 17–21.

3. Попов Н.Н., Кошелев А.А. О максимально возможном числе кварков в шестимерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(+\ +\ +\ -\ -\ -)$ *50-я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения.* 2019. Т. 50. № 4-1. С. 28–31.

4. Попов Н.Н. Группа $SU(4)$ как скрытая группа внутренних симметрий шестимерного псевдоевклидова пространства сигнатуры $(+\ +\ +\ -\ -\ -)$ *51-я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения.* 2019. Т.51. № 5-1. С. 50–55.

5. Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебра, геометрия и физика двойных чисел, результаты. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.* 2013. № 10. С. 86–161.

6. Гелл-Манн М., Розенфельд А., Чу Дж. Сильно взаимодействующие частицы. *УФН.* 1964. Т. 83. № 4. С. 695–727.

7. Хелзен Ф., Мартин А. *Кварки и лептоны.* М.: Мир, 1987.

References

1. Close F.E. *An Introduction to Quarks and Partons.* London New York San Francisco, Academic Press, 1979.

2. Popov N.N. On the correlation of symmetry groups of the six-dimensional pseudo-Euclidean space and quantum characteristics of elementary particles. *37-th International Scientific Conference of the Eurasian Science Community*, 2018, vol. 37, no. 3, pp. 17–21. (in Russ.)

3. Popov N.N., Koshelev A.A. On the maximum possible number of quarks in a six-dimensional pseudo-Euclidean space of signature $(+++---)$. *50-th International Scientific Conference of the Eurasian Science Community*, 2019, vol. 50, no. 4-1, pp. 28–31. (in Russ.)

4. Popov N.N. The group $SU(4)$ as a hidden group of internal symmetries of a six-dimensional pseudo-Euclidean space of signature $(+++---)$. *51-th International Scientific Conference of the Eurasian Science Community*, 2019, vol. 51, no. 5-1, pp. 50–55. (in Russ.)

5. Pavlov D.G., Kokarev S.S. Algebra, geometry and physics of double numbers, results. *Hypercomplex numbers in geometry and physics*, 2013, no. 10, pp. 86–161. (in Russ.)

6. Chew G.F., Gell-Mann M., Rosenfeld A.H. Strongly Interacting Particles. *Scientific American*, 1964, vol. 210, no. 74.

7. Halzen F., Martin A.D. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.* New York, John Wiley & Sons, 1984.

Авторы

Попов Николай Николаевич, к. ф.-м. н., отдел 31, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ул. Вавилова, 40., г. Москва, 119333, Россия.
E-mail: nnpopov@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Попов Н. Н. Квантовая хромодинамика и гиперболическая унитарная группа SUh(3). *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2020. № 2. С. 71—82.

Authors

Popov Nikolay Nikolaevich, PhD in Physics and Mathematics, Dept. 31, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, ul. Vavilova, 40, Moscow, 119333, Russia.
E-mail: nnpopov@mail.ru

Please cite this article in English as:

Popov N. N. Quantum Chromodynamics and the Hyperbolic Unitary Group SUh(3). *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 2, pp. 71–82.