УДК 514.763

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ: ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ, СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Аминова А. В.[a,1], Червон С. В. [a,b,c,2], Фомин И. В.[c,3]

[a] Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.

[b] Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, пл. Ленина, д. 4/5, г. Ульяновск, 432071, Россия.

[c] Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, г. Москва, 105005, Россия.

Рассматривается теория классических (т. е. неквантованных) релятивистских свободных волновых полей, основанная на лагранжевом формализме и теореме Нётер. Приводится вывод уравнений динамики полей из принципа стационарного действия. Подробно рассматривается применение теоремы Нётер к нахождению динамических инвариантов. Получены законы сохранения и основные характеристики волновых полей.

Ключевые слова: релятивистские поля, симметрии, законы сохранения.

QUANTUM THEORY OF FREE FIELDS: LAGRANGIAN FORMALISM, SYMMETRIES AND CONSERVATION LAWS

Aminova A. V.[a,1], Chervon S. V.[a,b,c,2], Fomin I. V.[c,3]

[a] Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlevskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.

[b] Ulyanovsk State Pedagogical University after I.N.Ulyanov, 4/5 Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russia.

[c] Bauman Moscow State Technical University, 2nd Baumanskaya st., 5, building 1, Moscow, 105005, Russia.

The theory of classical (non-quantized) relativistic free wave fields based on the Lagrangian formalism and Noether's theorem is considered. The derivation of field dynamics equations from the principle of stationary action is presented. The application of Noether's theorem to finding dynamic invariants is considered in detail. Conservation laws and basic characteristics of wave fields are also obtained.

Keywords: relativistic fields, symmetries, conservation laws.

PACS: 11.10.Kk, 04.50.+h, 04.50.-h, 02.40-k, 02.20.Sv
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2021.2.4-16

Введение

В настоящей лекции рассматривается теория классических (т. е. неквантованных) релятивистских свободных волновых полей, основанная на лагранжевом формализме и теореме Нётер. Приводится вывод уравнений динамики полей из принципа стационарного действия. Подробно

[1]E-mail: asya.aminova@kpfu.ru
[2]E-mail: chervon.sergey@gmail.com
[3]E-mail: ingvor@inbox.ru

рассматривается применение теоремы Нётер к нахождению динамических инвариантов. Получены законы сохранения и основные характеристики волновых полей.

Используется система единиц, в которой скорость света и постоянная Планка, деленная на 2π, равны единице: $c = \hbar = 1$, при этом время $x^0 = t$ имеет размерность длины, а масса, энергия и импульс – размерность обратной длины.

1. Лагранжев формализм.

1.1. Функция Лагранжа. Принцип стационарного действия.

Квантовой теорией поля называется релятивистская теория квантовых, или квантованных полей. Понятие квантового поля позволяет сформулировать и описать свойства элементарных частиц и их взаимодействий. В квантовой теории системы многих частиц и их взаимные превращения описываются квантовым полем как единым физическим объектом на фоне обычного пространства-времени.

Требование релятивистской или лоренцевой инвариантности означает принципиальное равноправие различных инерциальных систем отсчета и выражается в инвариантности действия и уравнений движения полевой системы относительно преобразований, сохраняющих метрику четырехмерного пространства Минковского:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \equiv (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \equiv \eta_{ij}dx^i dx^j,$$
$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1. -1, -1). \tag{1}$$

Множество таких преобразований образует 10-мерную неоднородную группу Лоренца (группу Пуанкаре) линейных преобразований

$$x^{\mu'} = A^{\mu'}_{\mu} x^{\mu} + A^{\mu'}, \quad \det(A^{\mu'}_{\mu}) = \pm 1 \quad (\mu, \mu' = 0, 1, 2, 3; A^{\mu'}_{\mu}, A^{\mu'} \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

с 6-мерной однородной подгруппой Лоренца.

Группа Пуанкаре содержит 1-параметрические подгруппы трансляций по всем координатным осям, порождаемые четырьмя генераторами (операторами):

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} \equiv \partial_0, \ X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \equiv \partial_1, \ X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \equiv \partial_2, \ X_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} \equiv \partial_3, \tag{3}$$

три 1-параметрические подгруппы пространственных вращений в плоскостях x^1x^2, x^2x^3 и x^1x^3 с генераторами соответственно

$$X_{12} = x^1\partial_2 - x^2\partial_1, \ X_{23} = x^2\partial_3 - x^3\partial_2, \ X_{13} = x^1\partial_3 - x^3\partial_1 \tag{4}$$

и три 1-параметрические подгруппы лоренцевых вращений (бустов) в плоскостях x^0x^1, x^0x^2 и x^0x^3 с генераторами

$$X_{01} = x^0\partial_1 + x^1\partial_0, \ X_{02} = x^0\partial_2 + x^2\partial_0, \ X_{12} = x^0\partial_3 + x^3\partial_0, \tag{5}$$

а также отражения $x^i \to -x^i$ координатных осей и все комбинации указанных преобразований. 6-мерная группа Лоренца включает шесть вращений и отражения осей, а также их комбинации.

Определенная выше группа Пуанкаре (группа Лоренца) называется *неортохронной* группой Пуанкаре (группой Лоренца). Если исключить операцию отражения времени $x^0 \to -x^0$, получится *ортохронная* группа Пуанкаре (группа Лоренца).

Для вращения и буста детерминант $\det(a^{i'}_j) = +1$; для отражения оси $\det(a^{i'}_j) = -1$.

Собственная (ортохронная) группа Лоренца преобразований с детерминантом $\det(a^{i'}_j)$, равным $+1$, включает шесть вращений и отражения четного числа пространственных осей, сводящиеся к вращениям.

Генераторы (3)–(5) образуют базис алгебры Ли группы Пуанкаре. Алгебра Ли группы Лоренца натянута на базисные операторы (4)–(5).

Рассмотрим поле колебаний массивной струны. Представим струну как n материальных точек (n связанных осцилляторов) с обобщенными координатами $q_i(t)$, $i = 1, \ldots, 3n$. Взяв предел $n \to \infty$, получим непрерывную струну, смещение которой относительно покоя описывается полем $\varphi(t, \mathbf{x})$, непрерывно зависящим от $\mathbf{x}$ и t, а производная по времени $\partial\varphi(t, \mathbf{x})/\partial t$ определяет скорость в точке $x = (t, \mathbf{x})$.

В общем случае поле описывается посредством одной или нескольких функций четырех координат x^μ, заданных в каждой системе отсчета и называемых *полевыми функциями*[1]: $\varphi^A = \varphi^A(x^\mu) = \varphi^A(t, \mathbf{x})$, где $A = 1, ..., N \equiv \overline{1N}$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ [2]. В зависимости от трансформационных свойств полевых функций различают однокомпонентные (псевдо)скалярные поля и многокомпонентные (псевдо)векторные, (псевдо)тензорные и спинорные поля.

Значения полевых функций $\varphi^A(t, \mathbf{x})$ в каждой точке пространства играют роль обобщенных координат $q_i(t)$; при этом дискретному индексу $i = 1, \ldots, 3n$ соответствуют непрерывные координаты x^1, x^2, x^3, а суммирование по n материальным точкам заменяется интегрированием по пространству.

Функция Лагранжа принимает вид трехмерного интеграла от плотности функции Лагранжа $\mathcal{L}(x)$ по фиксированному объему V в трехмерном пространстве [3]

$$\int_V \mathcal{L}(x^0, \mathbf{x})\ d\mathbf{x},$$

а действие системы $\mathcal{S}$, которое получается из функции Лагранжа интегрированием по времени, представляется в виде четырехмерного интеграла по некоторому объему Ω в пространстве-времени

$$\int_\Omega \mathcal{L}(x^0, \mathbf{x})\ dx^0 d\mathbf{x} \equiv \int_\Omega \mathcal{L}(x)\ d^4x,$$

где $\mathcal{L}(x)$ называется *лагранжианом*. Поэтому, в отличие от механических систем с конечным числом степеней свободы, поле рассматривают как систему с бесконечным числом степеней свободы, определяемых значениями полевых функций во всех точках пространства.

Несмотря на это существенное различие, теорию поля можно строить по аналогии с классической механикой, используя лагранжев и гамильтонов формализмы. Так как выделенная роль времени в гамильтоновом формализме нарушает релятивистскую инвариантность, будем использовать лагранжев формализм.

Уравнения для полевых функций (уравнения движения) выводятся из функции Лагранжа полевой системы с помощью вариационного принципа Гамильтона стационарного действия, согласно которому движение механической системы в интервале между двумя заданными моментами времени таково, что в этом интервале времени действие системы $\mathcal{S}$ имеет экстремальное значение: $\delta\mathcal{S} = 0$.

Динамические переменные, такие как энергия, импульс и другие, получаются и истолковываются, исходя из симметрий физического пространства-времени, путем построения величин, подобных соответствующим величинам в классической механике.

Вероятностный характер предсказаний и операторная природа наблюдаемых величин в квантовой теории поля берут начало в квантовой механике.

Если лагранжиан $\mathcal{L}(x)$ зависит от значений полевых функций и конечного числа их частных производных в точке x, то он называется *локальным* лагранжианом, а соответствующая теория –

[1] Например, скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля.

[2] Здесь и далее индексы, принимающие значения 0,1,2,3, обозначаются буквами греческого алфавита $\mu, \nu, \ldots$, а индексы, принимающие значения 1,2,3, – буквами из середины латинского алфавита $i, j, \ldots$, если не указано иное; по дважды повторяющимся индексам проводится суммирование по всем значениям индексов, при этом символ суммы опускается.

[3] Здесь и далее $d\mathbf{x} \equiv dx^1dx^2dx^3$; $d^4x \equiv dx^0d\mathbf{x} \equiv dx^0dx^1dx^2dx^3$.

локальной теорией. В *нелокальной* теории поля, когда, например,

$$\mathcal{L}(x) = \int dy\ \Phi\left(\varphi(x), \varphi(y), \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial\varphi}{\partial y^\nu}\right),$$

взаимодействие нелокально (неточечно).

В случае зависимости лагранжиана $\mathcal{L}(x)$ от полей и их частных производных второго и больших порядков говорят о теории *с высшими производными.*

Мы будем рассматривать только локальные теории поля и будем предполагать, что

- $\mathcal{L}(x)$ есть функционал, зависящий от полевых функций и их производных первого порядка: $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\ (\varphi^A(x), \varphi^A{}_{,\mu}(x))$,[4]
- $\mathcal{L}(x)$ не зависит явно от пространственно-временных координат,[5]
- $\mathcal{L}(x)$ инвариантен относительно ортохронных (сохраняющих направление времени) преобразований группы Пуанкаре, т. е. $\mathcal{L}(x)$ – скалярное поле, что обеспечивает выполнение специального принципа относительности,
- $\mathcal{L}(x)$ – действительная функция (в квантовом случае эрмитова функция) своих аргументов, что в итоге обеспечивает действительность наблюдаемых величин.

Рассмотрим *локальный* лагранжиан $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^A(x^\mu), \varphi^B_{,\rho}(x^\nu))$ и действие системы

$$\mathcal{S} = \int_\Omega \mathcal{L}(\varphi^A(x^\mu), \varphi^B{}_{,\rho}(x^\nu))\ d^4x. \tag{6}$$

Следуя принципу стационарного действия, будем считать, что уравнения движения системы, т. е. *полевые уравнения*, могут быть получены из *вариационного принципа*:

$$\delta\mathcal{S} = 0,$$

где $\delta\mathcal{S}$ – первая вариация действия, т. е. главная линейная часть приращения действия

$$\Delta\mathcal{S} = \int_\Omega \mathcal{L}'(\varphi'^A(x^{\mu'}), \varphi'^B{}_{,\rho'}(x^{\nu'}))\ d^4x' - \int_\Omega \mathcal{L}(\varphi^A(x^\mu), \varphi^B{}_{,\rho}(x^\nu))\ d^4x.$$

Так как $\mathcal{L}(x)$ – скалярное поле и четырехмерный элемент объема $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3$ релятивистски инвариантен, т.е. инвариантен относительно преобразований $x^{\mu'} = A^{\mu'}_\mu x^\mu + A^{\mu'}$ (2):

$$d^4x' = \left|\frac{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\right| d^4x = \left|\det(A^{i'}_i)\right| d^4x = 1\cdot d^4x,$$

то *значение действия для любой конечной области* Ω *пространства-времени не меняется при преобразованиях группы Пуанакаре*:

$$\int_\Omega \mathcal{L}(x)\ d^4x = \int_{\Omega'} \mathcal{L}'(x')\ d^4x',$$

где Ω и Ω' – одна и та же область интегрирования, выраженная в переменных x^μ и $x^{\mu'}$.

Инвариантность лагранжиана и вытекающая из него инвариантность действия обеспечивают *ковариантность вариационного принципа* $\delta\mathcal{S} = 0$ и, в конечном счете, *инвариантность полевых уравнений относительно преобразований группы Пуанкаре.*

---

[4]Здесь и далее $\varphi^B{}_{,\mu} = \partial\varphi^B/\partial x^\mu$ означает частную производную функции φ^B по координате x^μ, а $\varphi^B{}_{;\mu} = \nabla_\mu\varphi^B$ – ковариантную производную функции φ^B по x^μ. В пространстве Минковского (1) частная и ковариантная производные совпадают.

[5]Это означает, что рассматриваются замкнутые системы, то есть такие системы, которые не обмениваются энергией и импульсом с внешними источниками.

1.2. Вывод уравнений Эйлера – Лагранжа.

Запишем вариацию действия (6)

$$\delta\mathcal{S} = \int_\Omega \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A}\delta\varphi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\nu}}\delta\varphi^A_{,\nu} \right) d^4x =$$

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\nu}} \right)\delta\varphi^A + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\nu}}\delta\varphi^A \right) \right] d^4x,$$

где использованы правила

$$\delta\varphi^A_{,\nu} = \delta\frac{\partial}{\partial x^\nu}\varphi^A = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\varphi^A + \delta\varphi^A) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\varphi^A = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\varphi^A$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\nu}}\,\delta\varphi^A \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\nu}} \right)\delta\varphi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\nu}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\varphi^A.$$

Уравнения поля следуют из вариационного принципа $\delta\mathcal{S} = 0$ при условии, что вариации $\delta\varphi^A$ всех полевых функций φ^A обращаются в нуль на трехмерной границе $\partial\Omega$ четырехмерной области интегрирования Ω:

$$\delta\varphi^A\mid_{\partial\Omega}= 0.$$

По теореме Остроградского – Гаусса

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\nu}}\delta\varphi^A \right) d^4x = \int_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\nu}}\delta\varphi^A\; d\sigma_\nu, \tag{7}$$

где поверхность $\sigma = \partial\Omega$, а $d\sigma_\nu$ – проекция элемента поверхности σ на трехмерную плоскость, перпендикулярную к оси x^ν. Так как $\delta\varphi^A\mid_{\partial\Omega}= \delta\varphi^A\mid_\sigma= 0$, то стоящий справа в (7) поверхностный интеграл обращается в нуль, и вариационный принцип принимает вид

$$\delta\mathcal{S} = \int_\Omega \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\nu}} \right)\delta\varphi^A d^4x = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности вариаций $\delta\varphi^A$, следуют *уравнения Эйлера–Лагранжа*:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A_{,\mu}} \right) = 0, \tag{8}$$

определяющие динамику полей.

2. Теорема Нётер. Динамические инварианты.

2.1. Теорема Нётер.

Всякому непрерывному преобразованию функций поля и одновременно координат, зависящему от s постоянных параметров и обращающему в нуль вариацию действия при условии выполнения уравнений движения, соответствуют s динамических инвариантов, т. е. сохраняющихся во времени комбинаций полевых функций и их производных.[6]

Д о к а з а т е л ь с т во. Рассмотрим бесконечно малое преобразование координат и порождаемое им преобразование функций поля с s бесконечно малыми линейно независимыми постоянными параметрами $\delta\omega^a$:

$$x \to x^{\mu'} = x^k + \delta x^\mu, \quad \varphi^A(x) \to \varphi'^A(x') = \varphi^A(x) + \delta\varphi^A(x), \tag{9}$$

[6]См. [1]; [2], с. 25.

где

$$\delta x^{\mu} = \sum_{a=1}^{s} \xi_a^{\mu}(x)\ \delta\omega^a, \quad \delta\varphi^A(x) = \sum_{a=1}^{s} \Psi_a^A(x)\ \delta\omega^a, \tag{10}$$

при этом

$$\varphi^A{}_{,\mu}(x) \to \varphi'^A{}_{,\mu}(x') = \varphi^A{}_{,\mu}(x) + \delta\varphi^A{}_{,\mu}(x).$$

Операции δ и $\partial/\partial x^{\mu}$ не перестановочны, так как $\delta\varphi^A$ – вариация функции поля как за счет изменения формы функции, так и за счет изменения её аргумента.

Введем *вариацию формы* функции

$$\bar{\delta}\varphi^A(x) = \varphi'^A(x) - \varphi^A(x).$$

Будучи разностью двух функций, взятых в одной и той же точке, операция $\bar{\delta}$ коммутирует с частным дифференцированием ∂_{μ}, например,

$$\partial_{\mu}\bar{\delta}\varphi^A = \bar{\delta}\partial_{\mu}\varphi^A = \bar{\delta}\varphi^A{}_{,\mu}. \tag{11}$$

С точностью до бесконечно малых второго порядка относительно параметров $\delta\omega^a$ вариация формы $\bar{\delta}\varphi^A(x)$ совпадает с взятым с обратным знаком дифференциалом Ли $d_L\varphi^A(x)$.

$$\bar{\delta}\varphi^A(x) \simeq -d_L\varphi^A(x) = -\sum_{a=1}^{s} L_{X_a}(x)\ \delta\omega^a, \tag{12}$$

где $L_{X_a}\varphi^A(x)$ – производная Ли функции φ^A в направлении векторного поля $X_a = \xi_a^{\mu}(x)\partial_{\mu}$. Преобразовав $\varphi'^A(x+\delta x)$ с помощью формулы Тейлора, с точностью до бесконечно малых второго порядка имеем

$$\delta\varphi^A(x) = \varphi'^A(x') - \varphi^A(x) = \varphi'^A(x+\delta x) - \varphi^A(x) \simeq$$

$$\varphi'^A(x) + \partial_{\mu}\varphi'^A(x)\ \delta x^{\mu} - \varphi^A(x) \simeq$$

$$\bar{\delta}\varphi^A(x) + \partial_{\mu}\varphi^A(x)\ \delta x^{\mu} \simeq$$

$$-d_L\varphi^A(x) + \partial_{\mu}\varphi^A(x)\ \delta x^{\mu} = -d_L\varphi^A(x) + d\varphi^A(x)$$

($d = \delta x^{\mu} \cdot \partial_{\mu}$ – дифференциал). В результате

$$\begin{gathered}\delta\varphi^A(x) = \bar{\delta}\varphi^A(x) + \partial_{\mu}\varphi^A(x)\ \delta x^{\mu} = -d_L\varphi^A(x) + d\varphi^A(x) = \\ \textstyle\sum_{a=1}^{s}(X_a - L_{X_a})\ \varphi^A(x)\delta\omega^a = \sum_{a=1}^{s}(\xi_a^{\rho}\ \partial_{\rho} - L_{X_a})\ \varphi^A(x)\delta\omega^a.\end{gathered} \tag{13}$$

Так же получим

$$\delta\varphi^A_{,\mu}(x) = \bar{\delta}\varphi^A_{,\mu} + d\varphi^A_{,\mu} = -d_L\varphi^A_{,\mu} + d\varphi^A_{,\mu}. \tag{14}$$

Рассмотрим вариацию действия

$$\delta\mathcal{S} = \delta\int_{\Omega}\mathcal{L}(x)\ d^4x = \int_{\Omega}\mathcal{L}'(x')\ d^4x' - \int_{\Omega}\mathcal{L}(x)\ d^4x, \tag{15}$$

здесь

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\varphi'^A(x'), \varphi'^A{}_{,\mu'}(x')) = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x).$$

Вариация лагранжиана как функционала с двумя аргументами равна

$$\delta\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A}\delta\varphi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A{}_{,\mu}}\delta\varphi^A{}_{,\mu}.$$

Используя формулы (13), (14), найдем

$$\delta\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A}\left(\bar{\delta}\varphi^A(x) + d\varphi^A(x)\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial{\varphi^A}_{,\mu}}\left(\bar{\delta}{\varphi^A}_{,\mu}(x) + d{\varphi^A}_{,\mu}(x)\right) =$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A}\bar{\delta}\varphi^A(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial{\varphi^A}_{,\mu}}\bar{\delta}{\varphi^A}_{,\mu}(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A}d\varphi^A(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial{\varphi^A}_{,\mu}}d{\varphi^A}_{,\mu}(x) =$$

$$\bar{\delta}\mathcal{L}(x) + d\mathcal{L}(x) = \bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu}(x)\delta x^\nu,$$

где

$$\bar{\delta}\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A}\bar{\delta}\varphi^A(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial{\varphi^A}_{,\mu}}\bar{\delta}{\varphi^A}_{,\mu}(x)$$

– вариация формы лагранжиана $\mathcal{L}(x)$, которая вследствие перестановочности операций $\bar{\delta}$, ∂_μ (11) и уравнений движения (8)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial{\varphi^A}_{,\mu}}\right)$$

записывается в виде

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial{\varphi^A}_{,\mu}}\right)\bar{\delta}\varphi^A(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial{\varphi^A}_{,\mu}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bar{\delta}\varphi^A(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial{\varphi^A}_{,\mu}}\bar{\delta}\varphi^A(x)\right). \tag{16}$$

Заменим $\mathcal{L}'(x')$ в (15) суммой $\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \bar{\delta}\mathcal{L}(x) + d\mathcal{L}(x)$ и учтём, что с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$\int_\Omega \delta\mathcal{L}(x)\ d^4x' = \int_\Omega \delta\mathcal{L}(x)\ d^4x,$$

в итоге

$$\delta\mathcal{S} = \int_\Omega\left(\bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu}\delta x^\nu\right)\ d^4x + \int_\Omega \mathcal{L}(x)\ d^4x' - \int_\Omega \mathcal{L}(x)\ d^4x. \tag{17}$$

Согласно правилу замены переменных в кратном интеграле, преобразованный элемент объема

$$d^4x' = |\det(\partial x^{\mu'}/\partial x^\nu)|d^4x,$$

где $(\partial x^{\mu'}/\partial x^\nu)$ – матрица Якоби. Диагональные элементы матрицы Якоби имеют вид $\partial x^{\mu'}/\partial x^\mu = 1 + \partial(\delta x^{\mu'})/\partial x^\mu$ (не суммировать !). Перемножив диагональные элементы якобиана $\det(\partial x^{\mu'}/\partial x^\nu)$ и используя (9), с точностью до бесконечно малых второго порядка получим

$$1 + \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} = 1 + \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^0} + \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^3} = 1 + \frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\nu} > 0.$$

Остальные произведения элементов определителя содержат бесконечно малые не ниже второго порядка и не учитываются, так как δS есть главная линейная часть приращения функционала S. В результате

$$d^4x' \simeq \left(1 + \frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\nu}\right)d^4x.$$

Поэтому

$$\int_\Omega \mathcal{L}(x)\ d^4x' - \int_\Omega \mathcal{L}(x)\ d^4x = \int_\Omega \mathcal{L}(x)\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\nu}\ d^4x$$

и

$$\delta\mathcal{S} = \int_\Omega\left(\bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial x^\nu}\delta x^\nu + \mathcal{L}(x)\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\nu}\right)d^4x =$$

$$\int_\Omega\left(\bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\mathcal{L}(x)\delta x^\nu)\right)d^4x,$$

отсюда, с учетом (16),

$$\delta\mathcal{S} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A{}_{,\mu}}\bar{\delta}\varphi^A(x) + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu\right) d^4x,$$

или, ввиду (10), (12), (13)

$$\delta\mathcal{S} = -\sum_{a=1}^{s}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[J_a^\nu(x)\right] d^4x\ \delta\omega^a, \tag{18}$$

где

$$J_a^\nu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A{}_{,\nu}} L_{X_a}\varphi^A(x) - \mathcal{L}(x)\ \xi_a^\nu, \tag{19}$$

или

$$J_a^\nu(x) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A{}_{,\nu}}\left(\frac{\partial\delta\varphi^A}{\partial\delta\omega^a} - \xi_a^\rho\ \varphi^A{}_{,\rho}\right) - \mathcal{L}(x)\ \xi_a^\nu, \tag{20}$$

или также

$$J_a^\nu(x) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A{}_{,\nu}}\left(\Psi_a^A - \xi_a^\rho\ \varphi^A{}_{,\rho}\right) - \mathcal{L}(x)\ \xi_a^\nu.$$

В силу линейной независимости параметров $\delta\omega^a$, из (18) имеем

$$\frac{\partial\delta\mathcal{S}}{\partial\delta\omega^a} = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[J_a^\nu(x)\right] d^4x = 0.$$

Так как область интегрирования Ω произвольна, из этого равенства следует уравнение непрерывности (*закон сохранения в дифференциальной форме*)

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} J_a^\nu(x) = 0. \tag{21}$$

Определим *заряд* поля

$$Q_a(x) = \int_\sigma J_a^\nu(x)\ d\sigma_\nu, \tag{22}$$

где интеграл берется по пространственноподобной трехмерной поверхности σ, и покажем, что заряд $Q_a(x)$ не зависит от времени, т. е. является *сохраняющейся величиной*, или *динамическим инвариантом.*

Для доказательства преобразуем объёмный интеграл в (18) в поверхностный интеграл по внешней стороне границы $\partial\Omega = \sigma_1 \bigcup \sigma_2 \bigcup \Sigma$ области интегрирования Ω, составленной из двух ограниченных по времени пространственноподобных трехмерных поверхностей σ_1, σ_2 и бесконечно удаленной от центра трехмерной поверхности Σ:

$$\int_{\sigma_1} J_a^\nu(x)\ d\sigma_\nu - \int_{\sigma_2} J_a^\nu(x)\ d\sigma_\nu + \int_\Sigma J_a^\nu(x)\ d\sigma_\nu = 0$$

(разница в знаке перед первыми двумя интегралами возникает из разнонаправленности векторов внешних нормалей). Так как на границах пространственного объема поле практически равно нулю, отсюда следует

$$\int_{\sigma_1} J_a^\nu(x)\ d\sigma_\nu = \int_{\sigma_2} J_a^\nu(x)\ d\sigma_\nu,$$

т. е. заряд (22) не зависит от выбора поверхности σ. Если в качестве последней выбрать гиперплоскости $x^0 = t = \text{const}$, где $t \in \mathbb{R}$ может принимать любое значение, то $d\sigma_\nu = \delta_\nu^0\ d\mathbf{x}$ и заряд

$$Q_a(x) = \int_V J_a^0(x)\ d\mathbf{x} = \text{const},$$

где интеграл берется по трехмерному конфигурационному пространству V, не зависит от времени (*закон сохранения в интегральной форме*).

В итоге имеем s динамических инвариантов (сохраняющихся величин)

$$\int_V J_a^0(x)\ d\mathbf{x} = \text{const} \quad (a = 1, \ldots, s), \tag{23}$$

что доказывает теорему Нётер.

Величины $J_a^\nu(x)$ определены с точностью до аддитивного слагаемого $\partial_\mu f_a^{\nu\mu}(x)$, не влияющего на значения сохраняющихся интегралов (23) при условии, что $f_a^{\nu\mu}(x) = -f_a^{\mu\nu}(x)$ – дважды дифференцируемые функции. Действительно,

$$\int \partial_\nu J_a^\nu(x)\ d^4x = \int \partial_\nu J_a^\nu(x)\ d^4x + \int \partial_\nu\partial_\mu f_a^{\nu\mu}(x)\ d^4x = 0, \tag{24}$$

поскольку $\partial_\nu\partial_\mu f_a^{\nu\mu} = \partial_\mu\partial_\nu f_a^{\mu\nu} = \partial_\nu\partial_\mu f_a^{\mu\nu} = -\partial_\nu\partial_\mu f_a^{\nu\mu} = 0$.

3. Симметрии и законы сохранения

3.1. Симметрии и сохраняющиеся величины.

Неизменность физических свойств пространства-времени в классической механике обеспечивается предполагаемыми однородностью пространства (равноправие разных точек пространства) и времени (равноправие разных моментов времени), а также изотропностью пространства (равноправие разных пространственных направлений) и равномерным поступательным движением центра масс свободной системы.

На языке симметрий это означает инвариантность метрики

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{\delta\omega L_X} g_{\mu\nu} = 1 + \delta\omega L_X g_{\mu\nu} + \cdots = g_{\mu\nu}$$

относительно пространственно–временных сдвигов, пространственных поворотов и бустов, генерируемых векторными полями (3)–(5), которые натягивают (т. е. служат базисом) линейное пространство решений $X = \xi^\rho\partial_\rho$ уравнений Киллинга:

$$L_X g_{\mu\nu} = \xi^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}\partial_\nu\xi^\rho + g_{\rho\nu}\partial_\mu\xi^\rho = 0.$$

Следуя принципу соответствия, при интерпретации сохраняющихся, вследствие Пуанкаре–инвариантности лагранжиана и теоремы Нётер, токов, будем предполагать, что связь между перечисленными симметриями и соответствующими сохраняющимися величинами аналогична существующей в механике связи:

Пространств. сдвиг	(X_i)	$\to$	сохр. импульс,
Временной сдвиг	(X_0)	$\to$	сохр. энергия,
Пространств. поворот	(X_{ij})	$\to$	сохр. момент колич. движ.,
Равномерн. поступат. движ.	(X_{0i})	$\to$	сохр. скорость ц. масс.

Рассмотрим эту связь более подробно. Тензорные и спинорные поля, которые мы будем рассматривать, являются линейными геометрическими объектами [7]. Производная Ли линейного геометрического объекта Q в отношении $X = \xi^\rho\partial_\rho$ имеет вид

$$L_X Q \equiv L_\xi Q = \xi^\rho\partial_\rho Q + C(Q)^\nu_\mu\partial_\nu\xi^\mu, \tag{25}$$

где $C(Q)^\nu_\mu$ – матрица коэффициентов при $\partial_\nu\xi^\mu$, линейно зависящих от Q [5]. В частности, для тензорного поля $T^{\nu\cdots}_{\mu\cdots}$ имеем (см. [3], с. 49; [4], с. 32)

$$L_\xi T^{\nu\cdots}_{\mu\cdots} = \xi^\rho\partial_\rho T^{\nu\cdots}_{\mu\cdots} - T^{\rho\cdots}_{\mu\cdots}\partial_\rho\xi^\nu - \ldots + T^{\nu\cdots}_{\rho\cdots}\partial_\mu\xi^\rho + \ldots, \tag{26}$$

для векторного поля v^ν

$$L_\xi v^\nu = \xi^\rho\partial_\rho v^\nu - v^\rho\partial_\rho\xi^\nu, \tag{27}$$

для ковекторного поля u_ν

$$L_\xi u_\nu = \xi^\rho\partial_\rho u_\nu + u_\rho\partial_\nu\xi^\rho. \tag{28}$$

[7] Геометрический объект с линейным (не обязательно однородным) законом преобразования (см. [3], с. 26).

Для (псевдо)скалярного поля φ производная Ли совпадает с производной по направлению:

$$L_\xi \varphi = \xi^\rho \partial_\rho \varphi. \tag{29}$$

В случае спинорного поля удобно использовать выражение (20).

3.2. Вектор энергии–импульса.

В случае бесконечно малых трансляций (3) роль бесконечно малых параметров $\delta\omega^a$ играют δx^μ, при этом $a = \nu = 0, \dots, 3$, и $X_\nu = \delta^\rho_\nu\ \partial_\rho$. Из формул (19) и (25) получим *тензор энергии–импульса*

$$J^\mu_\nu(x) \equiv T^\mu_\nu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\varphi^A}_{,\mu}} \partial_\nu \varphi^A(x) - \mathcal{L}(x)\ \delta^\mu_\nu, \tag{30}$$

или, подняв индекс ν,

$$T^{\nu\mu}(x) = g^{\nu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\varphi^A}_{,\nu}} \partial_\mu \varphi^A(x) - \mathcal{L}(x) g^{\nu\mu} \tag{31}$$

(не суммировать по ν).

В соответствии с теоремой Нётер четырехмерный *вектор энергии–импульса*

$$P^\nu = \int_V T^{\nu 0}\ d\mathbf{x} = \mathrm{const} \tag{32}$$

не зависит от времени.

В классической механике энергия системы определяется функцией Гамильтона

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i - L.$$

Следуя аналогии, в теории поля для энергии получим

$$\mathcal{H} = \int_V \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {\varphi^A}_{,0}} - \mathcal{L} \right] d\mathbf{x} = P^0 = \int_V T^{00} d\mathbf{x}.$$

Три пространственные компоненты P^i вектора энергии–импульса P^ν определяют трехмерный импульс, а соотношение (32) или

$$\frac{dP^\nu}{dt} = 0$$

– *интегральный закон сохранения энергии–импульса.*

Дифференциальный закон сохранения (21) энергии-импульса имеет вид:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0.$$

Используя неоднозначность в определении J^ν_a (см. (24)), введем *канонический* тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu}_{can} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu},$$

где $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$, поэтому $\partial_{\lambda\mu} f^{\lambda\mu\nu} = 0$, и величина $f^{\lambda\mu\nu}$ выбрана так, чтобы тензор энергии–импульса $T^{\mu\nu}_{can}$ был симметричным: $T^{\mu\nu}_{can} = T^{\nu\mu}_{can}$ [8].

[8]Напомним, что тензор энергии–импульса в уравнениях Эйнштейна теории гравитации симметричен, и, как будет показано далее, для выполнения закона сохранения углового момента тензор энергии–импульса волнового поля должен быть симметричным.

3.3. Тензор момента количества движения. Орбитальный и спиновый моменты.

Рассмотрим генераторы вращений (4)–(5):

$$X_{\mu\lambda} \equiv \xi^{\rho}_{\mu\lambda}\partial_{\rho} = (g_{\mu\mu}x^{\mu}\delta^{\rho}_{\lambda} - g_{\lambda\lambda}x^{\lambda}\delta^{\rho}_{\mu})\partial_{\rho} = -X_{\lambda\mu} \tag{33}$$

($\mu < \lambda,$ не суммировать по μ, λ). Заменив индекс a собирательным индексом $\mu\lambda$ в формуле (20), получим *тензор момента количества движения*

$$J^{\nu}_{\mu\lambda} \equiv M^{\nu}_{\mu\lambda} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^{A}{}_{,\nu}}\left(\frac{\partial\delta\varphi^{A}}{\partial\delta\omega^{\mu\lambda}} - \varphi^{A}{}_{,\rho}\ \xi^{\rho}_{\mu\lambda}\right) - \mathcal{L}(x)\ \xi^{\nu}_{\mu\lambda} \equiv L^{\nu}_{\mu\lambda} + S^{\nu}_{\mu\lambda}, \tag{34}$$

где введены обозначения:

$$L^{\nu}_{\mu\lambda} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^{A}{}_{,\nu}}\varphi^{A}{}_{,\rho}\ \xi^{\rho}_{\mu\lambda} - \mathcal{L}(x)\ \xi^{\nu}_{\mu\lambda}, \tag{35}$$

$$S^{\nu}_{\mu\lambda} \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^{A}{}_{,\nu}}\frac{\partial\delta\varphi^{A}}{\partial\delta\omega^{\mu\lambda}}, \tag{36}$$

или, с учетом формул (13), (30) и (33):

$$\begin{aligned} L^{\nu}_{\mu\lambda} &= g_{\lambda\lambda}x^{\lambda}T^{\nu}_{\mu} - g_{\mu\mu}x^{\mu}T^{\nu}_{\lambda}, \\ L^{\mu\lambda,\nu} &= x^{\lambda}T^{\mu\nu} - x^{\mu}T^{\lambda\nu}, \end{aligned} \tag{37}$$

$$S^{\nu}_{\mu\lambda} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^{A}{}_{,\nu}}(L_{X_{\mu\lambda}} - X_{\mu\lambda})\varphi^{A}, \qquad X_{\mu\lambda} = g_{\mu\mu}x^{\mu}\partial_{\lambda} - g_{\lambda\lambda}x^{\lambda}\partial_{\mu}. \tag{38}$$

Дифференциальный закон сохранения момента количества движения волнового поля имеет вид

$$\frac{\partial M^{\mu\lambda,\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial L^{\mu\lambda,\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial S^{\mu\lambda,\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{39}$$

Для (псевдо)скалярного поля производная Ли совпадает с производной по направлению, поэтому $S^{\nu}_{\mu\lambda} = 0$, $M^{\mu\lambda,\nu} = L^{\mu\lambda,\nu}$, и из (39) следует

$$\frac{\partial L^{\mu\lambda,\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{40}$$

Подставив сюда (35), найдем

$$T^{\mu\lambda} = T^{\lambda\mu}. \tag{41}$$

Таким образом, *тензор энергии–импульса (псевдо)скалярного поля симметричен.*

Ввиду сходства выражения (37) с механическим орбитальным моментом будем называть $L^{\mu\lambda,\nu}$ *орбитальным* моментом волнового поля, а член $S^{\mu\lambda,\nu}$, характерный для многокомпонентных полей, будем называть *спиновым* моментом волнового поля, поскольку в квантовой теории он определяет спин частиц.

Интегрируя пространственные плотности орбитального и спинового моментов $L^{\lambda\mu,0}$ и $S^{0}_{\lambda\mu}$ по трехмерному пространству, получим двухвалентные тензор орбитального момента $L^{\lambda\mu}$ и тензор спинового момента $S_{\lambda\mu}$:

$$L^{\lambda\mu} = \int L^{\lambda\mu,0}d\mathbf{x} = \int \left(x^{\lambda}T^{\mu 0} - x^{\mu}T^{\lambda 0}\right)d\mathbf{x}, \tag{42}$$

$$S_{\lambda\mu} = \int S^{0}_{\lambda\mu}d\mathbf{x} = -\int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^{A}{}_{,0}}\frac{\partial\delta\varphi^{A}}{\partial\delta\omega^{\lambda\mu}}d\mathbf{x} = \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^{A}{}_{,0}}\left(L_{X_{\lambda\mu}} - X_{\lambda\mu}\right)\varphi^{A}d\mathbf{x}, \tag{43}$$

где $\omega^{\lambda\mu} = -\omega^{\mu\lambda}$ – параметр вращения в плоскости $x^{\lambda}x^{\mu}$, а $X_{\lambda\mu} = g_{\lambda\lambda}x^{\lambda}\partial_{\mu} - g_{\mu\mu}x^{\mu}\partial_{\lambda}$ – генератор бесконечно малых вращений в этой плоскости.

Свёртывание S_{jk} с полностью антисимметричным тензором третьего ранга ε^{ijk} определяет трехмерный (псевдо)вектор спина

$$S^i = \varepsilon^{ijk} S_{jk} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{44}$$

Данные сохраняющиеся величины рассматриваются в качестве характеристик релятивистских волновых полей.

4. Заключение

В первой части курса лекций по квантовой теории свободных полей рассматриваются методы, которые используются для получения уравнений полевой динамики, законов сохранения и основных характеристик релятивистских волновых полей. В последующих частях курса будет рассмотрено приложение представленных методов к актуальным задачам теории поля, гравитации и космологии.

Список литературы

1. Нётер Э. Статья в кн. *Вариационные принципы в механике.* М.: Физматгиз, 1959. 611 с.

2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. *Введение в теорию квантованных полей.* М.: Наука, 1984, 4-е изд., испр. 600 с.

3. Аминова А. *В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий.* М.: Янус-К, 2003. 619 с.

4. Аминова А. В. *Проективные симметрии гравитационных полей.* Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. 201 с.

5. Билялов Р. Ф. Спиноры на римановых многообразиях. *Изв. вузов. Матем.*, 2002, 11, С. 8–26.

Авторы

Аминова Ася Васильевна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Червон Сергей Викторович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра физики и технических дисциплин, Ульяновский государственный педагогический университет, пл. Ленина, д. 4/5, г. Ульяновск, 432071, Россия; профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., д. 5, г. Москва, 105005, Россия; ведущий научный сотрудник НИЦ "Центр превосходства киберфизических систем, IoT и IoE" Казанского федерального университета, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Фомин Игорь Владимирович, д. ф.-м. н., профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., д. 5, г. Москва, 105005, Россия.
E-mail: ingvor@inbox.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Аминова А. В., Червон С. В. , Фомин И. В. Квантовая теория свободных полей: лагранжев формализм, симметрии и законы сохранения. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2021. № 2. С. 4—16.

Authors

Aminova Asya Vasilyevna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Theory of Relativity and Gravity, Institute of Physics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlevskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Chervon Sergey Viktorovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Physics and Technical Disciplines, Ulyanovsk State Pedagogical University, Lenin's square, Build. 4/5, Ulyanovsk, 432071, Russia; Professor of Physics Department of Bauman Moscow State Technical University, 2-nd Baumanskaya st., 5, Moscow, 105005, Russia; Leading Researcher of SRC "Center of Excellence for Cyber-Physical Systems, IoT and IoE", Kazan Federal University, Kremlevskaya str., b. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Fomin Igor Vladimirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russia.
E-mail: ingvor@inbox.ru

Please cite this article in English as:
Aminova A. V., Chervon S. V., Fomin I. V. Quantum Theory of Free Fields: Lagrangian Formalism, Symmetries and Conservation Laws. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2021, no. 2, pp. 4–16.