УДК 530.12

© Иванов Г. Г., 2021

О МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ

Иванов Г. Г.

Данная статья является перепечаткой статьи: Иванов Г.Г. «О модификации уравнений Эйнштейна на малых расстояниях» , Гравитация и теория относительности, выпуск 23, издательство Казанского университета, 1986, стр. 78-82.

Ключевые слова: модифицированные уравнения Эйнштейна, модифицированная гравитация, высшие производные, планковские масштабы, нелокальная теория поля, квантовые поправки к гравитации, космологические решения, метрика Фридмана, масштабный фактор.

ON THE MODIFICATION OF EINSTEIN'S EQUATION AT SMALL DISTANCES

Ivanov G. G.

This article is a reprint of the article: Ivanov G.G. «On the modification of Einstein's equations at small distances» , Gravity and the theory of relativity, issue 23, Kazan University Press, 1986, pp. 78-82.

Keywords: modified Einstein equations, modified gravity, higher derivatives, Planck-scale physics, nonlocal field theory, quantum corrections to gravity, cosmological solutions, Friedmann metric, scale factor.

PACS: 04.50.Kd, 04.60.-m, 98.80.-k
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2021.3.4-6

1. Уравнения модифицированной теории гравитации

Предположим, что геометрические свойства пространства-времени на малых расстояниях можно описать в рамках римановой геометрии с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, а распределения вещества и других физических полей, кроме гравитационного, – с помощью тензора энергии-импульса $T_{ij}(x)$. Поскольку в некоторой системе координат, где x^4 – времениподобная координата, T_{44} является плотностью энергии, то от нее можно перейти к величинам, имеющим только размерность длины, двояким способом: a) с помощью постоянной Эйнштейна $\varkappa = 8\pi\gamma/^4$, b) с помощью постоянной $8\pi f/\hbar c$, где $f \sim 1$. В первом случае $\varkappa T_{44}$ имеет размерность длины в степени -2, во втором – степень -4.

В первом случае геометрия пространства-времени определяется уравнениями Эйнштейна

$$G_{ij} = \varkappa T_{ij}. \tag{1}$$

Во втором случае уравнения должны быть четвертого порядка, и из них следует равенство нулю ковариантной дивергенции от тензора энергии-импульса $T_{ij}(x)$.

По-видимому, наиболее простое уравнение, удовлетворяющее указанному условию, имеет вид:

$$G_{ij,\,kp}g^{kp} = \frac{8\pi f}{\hbar c}T_{ij}(x). \tag{2}$$

В дальнейшем условимся обозначать оператор $g^{kp}\nabla_k\nabla_p \equiv \Box$.

Существует также возможность записать уравнение, включающее в себя уравнения (1) и (2)

$$\frac{\hbar c}{8\pi f}\,\Box\, G_{ij} + \frac{c^4}{8\pi\gamma}G_{ij} = T_{ij}. \tag{3}$$

Вполне возможно, что появление членов с производными высшего порядка неслучайно, так как в квантовой теории поля существует метод регуляризации с помощью высших ковариантных производных (например, в теории калибровочных полей [1]). Не исключается также возможность, что уравнения имеют бесконечное число членов, содержащих оператор $\Box$. Например,

$$\ldots + \left(\frac{\gamma\hbar}{c^3 f}\right)^n \Box^n G_{ij} + \ldots + \frac{\gamma\hbar}{c^3 f}\Box G_{ij} + G_{ij} = \varkappa T_{ij} \tag{4}$$

или в общем случае

$$\psi(\Box)G_{ij} = \varkappa T_{ij}, \tag{5}$$

где $\psi(\Box)$ – некоторая аналитическая функция оператора $\Box$.

Теория, содержащая производные бесконечного порядка, по существу будет являться нелокальной.

В дальнейшем мы более подробно остановимся на анализе уравнений (2) и (3). Размерный анализ уравнения (3) показывает, что первый член начинает играть свою роль на расстояниях, близких к планковским. На более больших масштабах он становится несущественным, и уравнение становится эквивалентным обычным уравнениям Эйнштейна.

В то же время уравнение (2) содержит только постоянную Планка, и в связи с этим возникает интересный вопрос: может ли уравнение (2) описывать геометрию пространства-времени на уровне элементарных частиц и их взаимодействий.

2. Космологические решения модифицированных уравнений в классе пространственно-плоских метрик Фридмана

Линейный элемент пространственно-плоской метрики Фридмана имеет вид:

$$ds^2 = -a^2(T)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + dT^2. \tag{6}$$

Полевые уравнения (3) для этой метрики сводятся к одному дифференциальному уравнению на масштабный фактор a:

$$\frac{\hbar c}{8\pi f}\left[2\frac{da}{dT}\cdot\frac{d^3a}{dT^3} + 2\left(\frac{d^2a}{dT^2}\right)^2 - \frac{4}{a^2}\left(\frac{da}{dT}\right)^4\right] + \frac{c^4}{8\pi\gamma}\left(\frac{da}{dT}\right)^2 = \frac{1}{3}a^2\varepsilon(a). \tag{7}$$

Предположим, что масштабный фактор достигает в некоторой точке экстремального значения. Без потери общности можно считать, что экстремальная точка достигается в момент $T = 0$. В этой точке $da/dT = 0$. Из уравнения (7) следует, что в этой точке вторая производная имеет значение

$$\frac{d^2a}{dT^2}(0) = \pm\sqrt{\frac{4\pi f}{3\hbar c}a_0^2\varepsilon(a_0)}\ . \tag{8}$$

Из (8) вытекает, что могут существовать решения, достигающие минимального или максимального значения масштабного фактора. Поведение решения вблизи экстремума описывается формулой

$$a = a_0 \pm a_0\sqrt{\frac{\pi f}{3\hbar c}\varepsilon_0(a_0)}\ T^2. \tag{9}$$

Формула (9) показывает, что несингулярное решение (9) связано с наличием первого члена в левой части уравнения (3), и им же фактически и определяется характер приближения решения к экстремальной точке.

В общем случае для реальных уравнений состояния:

$$\varepsilon(a) = \varepsilon_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^n, \tag{10}$$

где $3 \leq n \leq 4$. Если $n = 3$, то вещество представляет собой пыль, если $n = 4$, то вещество обладает ультрарелятивистским уравнением состояния. При $n = 10/3$ уравнение (7) допускает точное решение, которое, однако, сингулярно при $T = 0$

$$a = a_0 \left(\frac{5}{3}\right)^{3/5} \left(\frac{8\pi\gamma\varepsilon_0}{3c^4}\right)^{3/10} T^{3/5}. \tag{11}$$

Для системы (2) также получаем единственное уравнение для определения масштабного фактора:

$$2\frac{da}{dT}\frac{d^3a}{dT^3} + 2\left(\frac{d^2a}{dT^2}\right)^2 - \frac{4}{a^2}\left(\frac{da}{dT}\right)^4 = \frac{8\pi f}{3\hbar c}a^2\varepsilon(a), \tag{12}$$

которое при $\varepsilon \neq 0$ также допускает приближенное несингулярное решение (9).

Уравнение (12) имеет в отличие от уравнений Эйнштейна (1) следующие нетривиальные вакуумные решения:

$$a(T) = a_0 e^{-bT}. \tag{13}$$

Это решение является решением де Ситтера

$$a(T) = a_0 T^{3/5}. \tag{14}$$

Решение (14) сингулярно и по виду совпадает с решением (11). Вопрос о существовании точных регулярных решений остается открытым.

Список литературы

1. Славнов А.А., Фадеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.- М.: Наука, 1978.

References

1. Slavnov A.A., Fadeev L.D. Introduction to the quantum theory of gauge fields. M: Nauka, 1978.

Авторы

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Иванов Г. Г. О модификации уравнений Эйнштейна на малых расстояниях. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2021. № 3. С. 4—6.

Authors

Please cite this article in English as:
Ivanov G. G. On the modification of Einstein's equation at small distances. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2021, no. 3, pp. 4–6.