УДК 530.12

© Петров А. З., 2021

ТИП ПОЛЯ И ТИП ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Петров А. З.›

Данная статья является перепечаткой статьи: Петров А.З. «Тип поля и тип тензора энергии-импульса» , Гравитация и радиоэлектроника, Том 123, кн. 2, , издательство Казанского университета, 1963, стр. 3-18.

Ключевые слова: общая теория относительности, типы гравитационных полей, тензор энергии-импульса, алгебраическая классификация, тензор Вейля, канонические формы тензоров, собственные значения тензора, сигнатура метрики, электромагнитное поле, чистое излучение.

FIELD TYPE AND ENERGY-MOMENTUM TENSOR TYPE

Petrov A. Z.›

This article is a reprint of the article: Petrov A. Z. «Field type and energy-momentum tensor type» , Gravitation and Radioelectronics, Volume 123, book 2,, Kazan University Press, 1963, pp. 3-18.

Keywords: general relativity, types of gravitational fields, energy-momentum tensor, algebraic classification, Weyl tensor, canonical tensor forms, tensor eigenvalues, metric signature, electromagnetic field, pure radiation.

PACS: 04.20.Cv, 04.20.Jb, 04.20.-q
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2021.3.10-19

Рассмотрим проблему, естественным образом возникающую в общей теории относительности и не опирающуюся ни на какие гипотезы, кроме предположения, что имеют место уравнения поля Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} q_{\alpha\beta} = \dot{T}_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Как показано автором [1, §20] в самом общем случае, при любом возможном распределении, движении и свойствах материи, создающей поле (формально – при любом тензоре энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, который ограничивается лишь условием симметрии: $T_{[\alpha\beta]} = 0$) можно сказать, что существуют три и только три типо полей тяготения, если такого рода классификацию производить, основываясь на рассмотрении алгебраической структуры некоторого тензора (тензора пространства-материи) и, как конкретная реализация этой теоремы, можно определить однозначно в каждой точке пространства-времени такой ортрепер, относительно которого компоненты этого тензора будут иметь вполне определенный вид для каждого из трех возможных типов полей тяготения.

С другой стороны, при нашей общей постановке вопроса, когда структура тензора энергии импульса $T_{\alpha\beta}$ никак не предопределена, естественно поставить вопрос о классификации полей тяготения в зависимости от алгебраической структуры $T_{\alpha\beta}$.

Является очевидным, что (1) обе эти классификации определяются до конца для каждого конкретного случая; (2) они полностью определены в общем случае, в смысле инвариантного определения каждого возможного подслучая. Ввиду этого любая задача в общей теории относительности при ее правильной постановке должна решаться в рамках двух указанных классификаций. В связи с этим возникает проблема: детально классифицируя возможные типы полей тяготения на основе логического пересечения двух указанных выше классификаций, определить инвариантныи образом каждый возможный случай.

Эта проблема, важная для теории поля, далеко не тривиальна. Полное решение ее потребует значительных усилий и времени. В данной работе формулируется корректная постановка вопроса; получаются некоторые основные факты, возникающие при его решении, и в качестве иллюстрации рассматривается конкретный случай электромагнитного излучения.

§1. Основные формулы классификации полей тяготения

Укажем сначала основные формулы для классификации полей тяготения самого общего вида, основанные на рассмотрении тензора пространства-времени. Рассмотрим тензорную конструкцию

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \nu R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \sigma S_{\alpha\beta\gamma\delta} + \rho g_{\alpha[\gamma} q_{\delta]\beta}, \tag{2}$$

где $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – тензор кривизны пространства-времени $\nu,\ \sigma,\ \rho$ – произвольные инварианты, а

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_{\alpha[\gamma} q_{\delta]\beta}, \tag{3}$$

Можно тогда показать, что при любых $\nu,\ \sigma,\ \rho$ существуют три и только три типа алгебраических структур тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, которые определяют классификацию полей. Выбор скаляров $\nu,\ \sigma,\ \rho$ пока ничем не предопределен, нет необходимости уточнения того или другого из этих скаляров (если не считать, естественно, условия $\nu,\ \sigma \neq 0$.) Считаем, что нам следует исходить из требований простоты некоторых геометрических соображений. Особенно удобным является следующий выбор этих скаляров:

$$\nu = 1, \quad \sigma = -1, \quad \rho = \frac{2}{3}T, \quad T = T^{\sigma}_{\sigma},$$

когда $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ совпадает с тензором конформной кривизны Вейла $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ пространства-времени. Для доказательства достаточно, пользуясь уравнениями поля (1), выразить $T_{\alpha\beta}$ и T через $R_{\alpha\beta}$ и R (учитывая в целях избежания путаницы в знаках при этом, что $R_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} R^{\sigma}_{\alpha\sigma\beta}$). Остановимся далее на таком выборе $\nu,\ \rho,\ \sigma$ и будем иметь [2, §28].

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - S_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{T}{3} g_{\alpha[\gamma} q_{\delta]\beta}. \tag{4}$$

Затем введем собирательные индексы 6-мерного бивекторного пространства [1, §15, §18], и соответственно записываем в этом пространстве тензор конформной кривизны и тензор $g_{\alpha[\gamma} q_{\delta]\beta}$ в виде двух симметрических тензоров C_{ab} и g_{ab} $(a,\ b = 1, \ldots, 6)$. Нумерация кососимметрческих пар при этом выбрана следующим образом 14–1, 24–2, 34–3, 23–4, 31–5, 12–6. Рассмотрим теперь пары тензоров C_{ab} и $g_{ab}|g_{ab}| \neq 0$ (в чем нетрудно убедиться, вычисляя его в точке), в ортрепере и отвечающему им λ-матрицу $C_{ab} - \lambda g_{aq}$. Можно сформулировать основной в смысле алгебраической структуры тензора конформной кривизны. *Существуют три типа полей тяготения*, причем эти типы полностью определяются характеристикой λ-матрицы:

$$\text{I тип } [\text{III}, \overline{\text{III}}]; \quad \text{II тип } [21, \overline{21}]; \quad \text{III тип } [3, \overline{3}];$$

Цифры в скобках обозначают показатели степеней элементарных делителей λ-матрицы; надчеркнутые числа – показатели степеней элементарных делителей с комплексно-сопряженными базисами, отвечающими ненадчеркнутыми числам; для третьего типа базисы вещественные, следовательно, все равны друг другу. Для каждого типо в данной точке пространства-времени всегда можно выбрать (притом однозначно) ортрепер таким образом, что компоненты тензора конформной кривизны Вейля будут иметь вид в записи через собирательные индексы.

$$(C_{ab}) = \left(\begin{array}{cc} [J|J]M & N \\ N & -M \end{array}\right) \quad (g_{ab}) = \left(\begin{array}{cc} [J|J]\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{array}\right), \tag{5}$$

где ε – единичная трехмерная матрица, M, N – 3-мерные симметрические матрицы, определяемые соответственно следующим образом:

$$\text{I тип}\quad M=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}\beta_1 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \beta_3\end{pmatrix}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=\sum_{i=1}^{3}\beta_i=0.$$

$$\text{II тип}\quad M=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \alpha_2+1 & \\ & & \alpha_2-1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}\beta_1 & & \\ & \beta_2 & 1\\ & 1 & \beta_3\end{pmatrix}\begin{matrix}\alpha_1+2\alpha_2=0\\ \beta_1+2\beta_2=0\end{matrix} \tag{6}$$

$$\text{III тип}\quad M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\ & &\beta_3\end{pmatrix}.$$

Если имеет место случай пустого пространства-времени ($R_{\alpha\beta}=0$) или случай однородного распределения материи ($R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$), оба случая принято в геометрии называть пространствами Эйнштейна — то $C_{ab}=R_{ab}+\sigma g_{ab}$. Тем самым получается канонический вид для компонент тензора кривизны в каноническом ортрепере [1, §20].

В общем случае также можно получить канонический вид для тензора кривизны в каноническом ортрепере с точностью, однако, до возможной структуры тензора $T_{\alpha\beta}$. Соответствующие формулы для $R_{\alpha\beta\gamma\sigma}$ (R_{ab} – в собирательных индексах) получаются непосредственно из (3) и (6) и будут иметь вид, как в этом нетрудно убедиться, в ортрепере, в котором имеют место формулы (6)

$$(R_{ab})=\left(\begin{array}{cc}[J|J]M & N\\ \hline N^{*} & P\end{array}\right),$$

где

I тип

$$M=\begin{vmatrix}\alpha_1+\frac12(T_{11}-T_{44})+\frac13 T, & \frac12 T_{12}, & \frac12 T_{13}\\ \frac12 T_{12}, & \alpha_2+\frac12(T_{22}-T_{44})+\frac13 T, & \frac12 T_{23}\\ \frac12 T_{13,} & \frac12 T_{23}, & \alpha_3+\frac12(T_{33}-T_{44})+\frac13 T.\end{vmatrix}$$

$$N=\left|\begin{matrix}\beta_1 & \frac12 T_{34} & -\frac12 T_{24}\\ -\frac12 T_{34} & \beta_2 & \frac12 T_{14}\\ \frac12 T_{24} & -\frac12 T_{14} & \beta_3\end{matrix}\right|\begin{matrix}\sum\alpha_i=0\\ \sum\beta_i=0\end{matrix} \tag{7}$$

$$P=\begin{vmatrix}-\alpha_1-\frac12(T_{22}+T_{33})-\frac13 T & \frac12 T_{12} & \frac12 T_{13}\\ \frac12 T_{12} & -\alpha_2-\frac12(T_{11}+T_{33})-\frac13 T & \frac12 T_{23}\\ \frac12 T_{13} & \frac12 T_{23} & -\alpha_3-\frac12(T_{11}+T_{22}-\frac13 T)\end{vmatrix}$$

N^{*} получается из N зеркальным отображением относительно главной диагонали (трансформированная матрица).

Кривизна определяется четырьмя независимыми параметрами α_i, β_i и тензором $T_{\alpha\beta}$.

II тип

$$M \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 + \frac{1}{2}(T_{11} - T_{44}) + \frac{1}{3}T & \frac{1}{2}T_{12} & \frac{1}{2}T_{13} \\ \frac{1}{2}T_{12} & \alpha_2 + \frac{1}{2}(T_{22} - T_{44}) + \frac{1}{3}T + 1 & \frac{1}{2}T_{23} \\ \frac{1}{2}T_{13} & \frac{1}{2}T_{23} & \alpha_2 + \frac{1}{2}(T_{33} - T_{44}) + \frac{1}{3}T - 1 \end{vmatrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} \beta_1 & \frac{1}{2}T_{34} & -\frac{1}{2}T_{24} \\ -\frac{1}{2}T_{34} & \beta_2 & \frac{1}{2}T_{14} + e \\ -\frac{1}{2}T_{24} & -\frac{1}{2}T_{14} & \beta_2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \sum \alpha_i = 0 \\ \sum \beta_i = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \beta_1 + 2\beta_2 = 0 \\ e = \pm 1 \end{matrix} \tag{8}$$

$$P = \begin{vmatrix} -\alpha_1 - \frac{1}{2}(T_{22} + T_{33}) - \frac{1}{3}T & \frac{1}{2}T_{12} & \frac{1}{2}T_{13} \\ \frac{1}{2}T_{12} & -\alpha_2 - \frac{1}{2}(T_{11} + T_{33}) - \frac{1}{3}T - 1 & \frac{1}{2}T_{23} \\ \frac{1}{2}T_{13} & \frac{1}{2}T_{23} & -\alpha_2 - \frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}) - \frac{1}{3}T + 1 \end{vmatrix}$$

N^* равно трансформированному N. Кривизна определяется двумя независимыми параметрами α_i и β_i и тензором $T_{\alpha\beta}$

III тип

$$M = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(T_{11} - T_{44}) + \frac{1}{3}T & \frac{1}{2}T_{12} + e_1 & \frac{1}{2}T_{13} \\ \frac{1}{2}T_{12} + e_1 & \frac{1}{2}(T_{22} - T_{44}) + \frac{1}{3}T & \frac{1}{2}T_{23} \\ \frac{1}{2}T_{13} & \frac{1}{2}T_{23} & \frac{1}{2}(T_{33} - T_{44}) + \frac{1}{3}T \end{vmatrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}T_{34} & -\frac{1}{2}T_{24} \\ -\frac{1}{2}T_{34} & 0 & -\frac{1}{2}T_{14} + e_2 \\ -\frac{1}{2}T_{24} & -\frac{1}{2}T_{14} + e & 0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

$$P = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(T_{23} + T_{33}) - \frac{1}{3}T & \frac{1}{2}T_{12} - e_1 & \frac{1}{2}T_{13} \\ \frac{1}{2}T_{12} - e_{13} & -\frac{1}{2}(T_{11} + T_{33}) - \frac{1}{3}T & \frac{1}{2}T_{23} \\ \frac{1}{2}T_{13} & \frac{1}{2}T_{23} & -\frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}) - \frac{1}{3}T \end{vmatrix}$$

e_1 и e_2, равные ± 1, независимы друг от друга. Киривизна определяется тензором $T_{\alpha\beta}$.

Из (7), (8), (9) следует, что кривизна пространства-времени в ортрепере определяется тензором энергии-импульса и инвариантами α_i, β_i (для III типа только тензором энергии-импульса). Кроме того, эти формулы наталкивают на мысль об их конкретизация путем более тщательного исследования тензора энергии-импульса.

§2. Классификация тензоров энергии-импульса

Рассмотрим в данной точке пространства-времени парасимметрических тензоров $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ ($|g_{\alpha\beta}| \neq 0$) и отвечающую им λ-матрицу

$$(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}).$$

Будем иметь, кроме того, в виду тот факт, что метрика пространства-времени определяется формой $g_{\alpha\beta}dx^\alpha\ dx^\beta$ гиперболического типа (сигнатура в точке вида $---+$). Пользуясь теоремой, полученной автором [3; 1; §20], можно выписать все возможные характеристики элементарных делителей и далее, пользуясь только вещественными преобразованиями координат, написать канонические формы тензоров $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в некотором однозначно определяемом вещественном квазиортрепере (слово «квази» употребляется здесь в том смысле, что среди координатных векторов такого репера могут появиться и изотропные векторы). Кажется, что в принципе возможны и

следующие типы характеристики λ-матрицы $(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})$:

$$1).[\mathrm{III}], \quad 2).[211] \quad 3).\ 31], \quad 4).\ [22], \quad 5).\ [4] \tag{10}$$

Причем эти характеристики могут подразделяться еще на особые подслучаи могущие возникнуть, если некоторые базисы элементарных делителей кратные, например, $[(21)\ 1]$ элементарные делители вида $(\lambda-\lambda_1)^2$, $(\lambda-\lambda_1)$, $(\lambda-\lambda_2)$ и т.д. Кроме того, вследствие неопределенности метрической формы возможно появление комплексных элементарных делителей и *изотропных и комплексных* собственных векторов тензора $T_{\alpha\beta}$.

Однако тот факт, что сигнатура метрики имеет вид $(---+)$, сокращает число возможных типов до трех. Этот результат всего проще получить как простое следствие общих формул, дающих канонический вид простое следствие общих формул, дающих канонический вид тензоров в квази-ортрепере для пары *вещественных* тензоров $g_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta}$ при *вещественных* преобразованиях и невырожденном тензоре $g_{\alpha\beta}$ $(|g_{\alpha\beta}| \neq 0)$, полученных автором еще в 1949 г. [3; 1 §9]. Данные формулы справедливы при любом n-числе измерений пространства и лбой сигнатуре метрики и входят в формулировку следующей теоремы. Матрицы двух вещественных симметрический тензоров g_{ij} и T_{ij} при условии $|g_{ij}| \neq 0$ можно вещественным неособенным линейным преобразованием координат привести к виду:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} G_1 & & \\ & \ddots & \\ & & G_v \end{pmatrix}, \quad (T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_v \end{pmatrix},$$

где V-число элементарных делителей λ-матрица $(T_{ij} - \lambda g_{ij})$, если считать пару комплексно-сопряженных делителей за один. Символами G_i и T_i обозначены квадратные матричные блоки, имеющие число строк и столбцов, равное показателю степени и соответствующего элементарного делителя вещественный, они имеют вид:

$$G_i \begin{vmatrix} & & e^i \\ & \iddots & \\ e_i & & \end{vmatrix}, \quad T_i = \begin{vmatrix} & & \lambda_i e_i & e_i \\ & \iddots & \iddots & \\ \lambda_i e_i & e_i & & \end{vmatrix}, \quad e_i = \pm 1 \tag{11}$$

В случае комплексных элементарных делителей для каждого комлексного делителя $(\lambda - \alpha - i\beta)^i$ найдется комплексно-сопряженный $(\lambda - \alpha + i\beta)^i$ и, которые, объединяясь в совокупности, определяют квадратичные блоки четного числа измерений вида:

$$G_{2i} = \begin{vmatrix} & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \text{-}1 \end{matrix}} \\ & \iddots & \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \text{-}1 \end{matrix}} & & \end{vmatrix}, \quad T_{2i} = \begin{vmatrix} & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha-\beta, & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta, & -\alpha+\beta \end{matrix}} \\ & & \iddots & \\ & \iddots & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \text{-}1 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} \alpha-\beta, & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta, & -\alpha+\beta \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \text{-}1 \end{matrix}} & & \end{vmatrix} \tag{12}$$

Самым существенным в этом рассуждении является то, что приведение к каноническому виду производится на *вещественном пути*, а не над полем комплексных чисел, когда вопрос о сигнатуре становится бессмысленным.

Таким образом, характеристика λ-матрицы $(T_{ij}-\lambda g_{ij})$ определяет условия сигнатуры, так как вид G_i в некоторой мере предопределяет сигнатуру метрики. Кроме того, следует рассмотреть все возможные случае кратности корней. Такого рода исследование было проведено автором, а затем

Т. Е. Изотовым [4] и В. И. Голиковым. Суть его в том, что матрица $(g_{\alpha\beta})$ приводится вещественными преобразованиями к диагональному виду, после чего разбирается вопрос о том, при какие e_i возможна сигнатура $(---+)$. Если она ни при каком выборе e_i не возможна, — случай отпадает. Опуская это очевидное рассуждение, приведем конечный результат: *для полей тяготения возможны только три типа тензоров энергии-импульса, определяемые соответственно характеристиками:* I. [IIII]; II.]112], III. [13]. Что же касается характеристик вида [22] и [4], то они вообще невозможны для сигнатуры гиперболического типа. Указанные три типа могут быть подвергнуты дальнейшей более детальной классификации в зависимости от того, имеются ли кратные элементарные делители (т.е. с одинаковыми базисами), и есть ли среди них комплексные.

Такая подробная классификация будет иметь следующий вид.

I тип

а) элементарные делители вещественные. В зависимости от кратности базисов возможны подслучаи α_1 ([III], α_2) [(II), II], α_3)[III) I], α_4)[(II) (II)], α_5)[(III)]. В ортрепере, построенном на базисе собственных векторов, будет иметь канонические формы

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}, \quad T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & & \\ & & -\lambda_3 & \\ & & & +\lambda_4 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Здесь λ_i – *базисы* элементарных делителей, совпадающие *с собственными числами* тензора T_{ij}. В случае кратности собственных чисел (случай $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$) следует в (13) соответствующие λ_i приравнять друг к другу.

б) имеются комплексные элементарные делители. В этом случае возможны только два подслучая: в$_1$) [IIII] — имеются два вещественных и два комплексно-сопряженных собственных числа тензора T_{ij}, который в вещественном пространстве имеет два собственных направления и одну инвариантную 2-плоскость. b_2 [(II) II] имеет два комплексно-сопряженные и одно вещественное (кратности два) собственные числа. Тензор T_{ij} имеет в вещественном пространстве двумерный пучок собственных направлений и одну инвариантную 2-плоскость. В вещественном квази-реперe из [11] и [12] получены канонические формулы для $g_{\alpha\beta}$ и $T_{\alpha\beta}$.

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & \text{-1} \end{pmatrix}, \quad (T_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \alpha-\beta, & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta, & -\alpha+\beta \end{matrix}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

причем, в случае $(b_2),\ \lambda_1 = \lambda_2$. Не представляет труда разделить вещественное линейное преобразование, приводящее $(g_{\alpha\beta})$ в (14) к диагональному виду.

II тип, [112]. Как и выше, легко проверить, что здесь возможны только вещественные собственные числа. В зависимости от их кратности получим следующие подслучаи: 1). [112]; 2) [(II) 2]; 3) [1(12)]; 4) [(112)].

В первом случае однозначно определяется такой ортрепер, для которого получены канонические формы

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_3+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3-1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Здесь имеется три собственных вектора тензора $T_{\alpha\beta}$, один из которых *изотропный* и одна инвариантная 2-плоскость, проходящая через изотропное собственное направление. В случае (2) в формулах (15) следует положить $\lambda_1 = \lambda_2$. Появляется целая 2-плоскость собственных векторов,

представляющая собой линейную оболочку двух неизотропных собственных векторов, отвечающих кратным элементарным делителям. В случае (3) следует в (15) положить $\lambda_2 = \lambda_3$. Имеется трехмерный пучок собственных направлений, натянутый на три независимые собственные векторы.

III тип [13]. *Возможны только собственные вещественные числа.* В зависимости от кратности собственных чисел возникают две возможности: 1) [13], 2) [(13)].
В первом случае имеются два собственных вектора, один из которых неизотропный (отвечает простому элементарному делителю). Другой, изотропный, отвечает непростому элементарному делителю. Имеется 3-мерный инвариантный пучок, проходящий через изотропное собственное направление. Всегда, и притом однозначно, можно определить ортрепер, для которого

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

В случае (2) и (16) следует положить $\lambda_1 = \lambda_2$. Здесь появляется инвариантная 2-плоскость, натянутая на изотропное и неизотропное собственные направления, вся состоящая из собственных векторов.

Этим заканчивается полная классификация возможных тензоров энергии-импульса, характеризующего состояние [5, §31, 32, 33].

1. `Тензор энергии-импульса пылевидной материи`, состоящей из невзаимодействующих между собой незаряженных частиц. $T_{\alpha\beta} = \varepsilon_0 U_\alpha U_\beta$, где ε_0 энергия покоя частицы, $\varepsilon_0 = \mu_0 C^2$, μ_0 масса покоя, U^α – единичный вектор 4-скорости частицы. В этом случае имеем характеристику простого типа [I(III)] с вещественными собственными числами, которой отвечает одно ненулевое число, равное энергии покоя в данной сопутствующей системе, и три — равные нулю.

1. `Случай идеальной жидкости`, когда имеются незаряженные частицы, оказывающие друг на друга давление по закону Паскаля для жидкостей.

$$T_{\alpha\beta} = (\varepsilon - p) U_\alpha U_\beta + p g_{\alpha\beta}.$$

Характеристика имеет вид [I (III)]. Случай отличается от предыдущего только тем, что имеется одно собственное число, равное разности энергии поля и давления p. Кроме того имеются еще три собственные числа, равные давлению.

3. `Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в пустоте` при отсутствии заряженных частиц.

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}(F_{a\delta} F^{\delta}_{\beta} - \frac{1}{4} F_{\delta\tau} F^{\delta\tau} g_{\alpha\beta}),$$

где $T^{\delta}_{\delta} = 0$, $F_{\alpha\beta}$ – тензор электромагнитного поля. Здесь появляется характеристика как простого, так и не простого типа:
1) [(II) (II)] – поле без сингулярности
2) [II2] – сингулярный случай, отвечающий чистому излучению.
В первом случае можно определить ортрепер, относительно которого

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (T_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & -\lambda \end{pmatrix},$$

и во втором, соответственно:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \text{e} & \text{-e} \\ \text{-e} & \text{e} \end{matrix}} & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} T_{\alpha\beta} = e l_\alpha \, l_\beta, \; l_\alpha \, l^\beta = 0 \\ S_p \, T_{\alpha\beta} = 0, \; e = \pm 1 \end{matrix} \tag{17}$$

Не представляет особого труда рассмотреть более сложные случае тензора энергии-импульса, отвечающие более сложной структуре состояния материи. Например, учитывая диссипативные процессы, теплопроводность или упругие силы, можно получить характеристику более сложного вида и записать, исходя из (11) и (12), канонический вид тензора энергии-импульса.

Фундаментальным является следующий факт: *в рамках общей теории относительности любое возможное физическое состояние системы описывается тензором энергии-импульса вида* (13) – (16).

Случай комплексных собственных чисел фактически до сих пор не изучался. Очень существенно отметить, что полученные выше результаты, хотя и записываются локальным образом в ортрепере, но по существу имеют инвариантный смысл и их можно записать в тензорном виде для *области пространства-времени.*

§3. Постановка проблемы. Случай электромагнитного поля.

При решении любой задачи в рамках общей теории относительности необходимым образом приходится, независимо от применяемого метода, осуществить два этапа исследования:
1) *Найти свойства, общие для любого тензора энергии-импульса и любого типо поля гравитации* (такие, например, как закон сохранения ковариантной дивергенции тенхора энергии-импульса или тождества Бианки), и более сложный этап –
2) *определить свойства, связанные со спецификой вопроса.* Они всегда приведут к необходимости выяснить тип поля и тип тензора энергии-импульса. Если при данной постановке проблемы возможны различные типы двух этих классификаций, то, естественно, возникает вопрос о разбиении задачи на mn случаев, где m – число допускаемых постановкой проблемы типов полей, а n – число допускаемых типов тензора энергии-импульса. В *общей теории относительности* (отвлекаясь от подслучаев, отвечающих кратностям собственных чисел существует *не более девяти типов возможных физических состояний* (3 типа полей $\times$ 3 типа $T_{\alpha\beta}$).

Задача определения этих типов сопряжена с трудностями и требует для своего решения тонкого математического аппарата и значительной изобретательности. Однако она является принципиальной для построения более глубокой теории и в неявном виде, для частных случаев, решается многими физиками.

При решении этой пробелмы прежде всего возникает вопрос – не существует ли между тремя типами полей (§1) и тремя типами тензоров энергии-импульса (§2) некоторого соответствия, исключающего некоторые логические пересечения этих двух классификаций? Общего ответа на этот вопрос пока нет, но исследование частных случаев наводит на мысль, что, вообще говоря, одному типу одной классификации могут соответствовать различные типы другой.

С этой целью рассмотрим, например, «сингулярный» случай чистого электромагнитного излучения в пустоте, определяемой формулами (17). Нетрудно убедиться, что в этом случае

$$T_{\alpha\beta} = e l_\alpha \, l_\beta, \quad l_\alpha \, l^\beta = 0, \quad e = \pm 1,$$

где l_β – изотропный собственный вектор $T_{\alpha\beta}$. Тензор электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ может быть представлен в виде

$$F_{\alpha\beta} = 2(\rho l_{[\alpha} h_{\beta]} + \sigma l_{[\alpha} k_{\beta]}), \tag{18}$$

где h_α и k_β два векторных неизотропных поля, а скаляры ρ и σ представляют собой синус и косинус некоторого скаляра, так как

$$\rho^2 + \sigma^2 = 4\pi,$$

причем, в ортрепере

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 & 0 \\ \rho & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 & \alpha \\ -\rho & 0 & -\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть для этой системы координат векторные поля, определяющие тензор электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$, имеют вид

$$L_\alpha = A\delta^4_\alpha, \quad h_\alpha = B\delta^2_\alpha, \quad k_\alpha = C\delta^3_\alpha. \tag{20}$$

Потребуем, чтобы удовлетворялись уравнения поля Эйнштейна (1), которые в данном случае ($T = 0$) будут иметь вид

$$R_{\alpha\beta} = el_\alpha\, l_\beta, \tag{21}$$

и уравнения Максвелла в пустоте

$$F_{[\alpha\beta,\,\gamma]} = F^{\sigma}_{\alpha\ ,\sigma} = 0. \tag{22}$$

Тогда можно убедиться непосредственной проверкой, что, полагая

$$\begin{aligned}
&\alpha = M(px^2 + nx^3 + S) && \partial_1\rho = \partial_1\sigma = 0\\
&\beta = M(x^3 + \int pdx^1 + v) && B\partial_3\rho - C\partial_2\sigma = 0\\
&\gamma = M(x^2 + \int ndx^1 + \omega) && C\partial_2\rho + B\partial_3\sigma = 0,
\end{aligned}$$

где $A(x^4)$, $M(x^4)$, $n(x^1)$, $v(x^4)$, $S(x^1)$, $\omega(x^4)$, $p(x^1)$ — произвольные функции, а $B(x^4)$, $C(x^4)$ определяются из уравнений:

$$BB' = \frac{B''}{B'} - \frac{M'}{M} = CC'(\frac{C''}{C'} - \frac{M'}{M}) = -\frac{L}{2}A^2B^2.$$

Этим удовлетворяем уравнениям поля (21), и уравнения Максвелла (22), а исследуя тензор Вейля конформной кривизны, нетрудно убедиться, что поле будет 1 типа.

Далее, если предположим, что

$$\begin{aligned}
&\alpha = M(v^1x_2 + t^1x^3 + S) && \partial_1\rho = \partial_1\sigma = 0\\
&\beta = M(v + C_1x^3l^{x^4}p) && B\partial_3\rho - C\partial_2\sigma = 0\\
&\gamma = M(t + C_1x^2l^{x^4} + q) && C\partial_2\rho + B\partial_3\sigma = 0,
\end{aligned}$$

где $A(x^4)$, $M(x^4)$, $v(x^1)$, $t(x^1)$, $S(x^1)$, $p(x^4)$, $q(x_4)$ — произвольные функции, а $B(x^4)$ и $C(x^4)$ определяются из уравнений

$$B'' - \frac{M'}{M}B' + \frac{L}{2}A^2B = C'' - \frac{M''}{M}C' + \frac{L}{2}A^2C = 0,$$

то уравнения (21) и (22) будут опять-таки удовлетворяться, а исследование тензора Вейля приводит к выводу, что поле будет II типа.

В случае поля III типа ограничимся тем, что сформулируем теорему, имеющую основное значение для исследования электромагнитного поля в данной постановке вопроса: *вектор электромагнитного излучения $l_\alpha(x)$ для поля 3 типа является собственным вектором тензора энергии-импульса и обладает свойствами:* 1) определяет *геодезическую* ($l_{\alpha,\beta}\, l^\beta = f\, l_\alpha$); 2) *изотропную* ($l_\alpha\, l^\alpha = 0$ и 3) *конформно-градиентную ($\varphi\, l_\alpha$ – град)* конгруенцию. Кроме того в случае 3 типо всегда можно нормировать поле l_α так, что тензор Вейля будет выражаться через векторные поля l_α, h_α, k_α, определяющие электромагнитное поле, в виде:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = -4(l_{[\alpha}h_{\beta]}l_{[\gamma}v_{\beta]}l_{[\alpha}v_{\beta]}l_{[\gamma}h_{\delta]} + l_{[\alpha}k_{\beta]}k_{[\gamma}h_{\delta]} + k_{[\alpha h\beta]}l_{[\gamma}k_{\delta]}),$$

где v_α – поле, определенное условиями

$$v_\alpha\, l^\alpha - 1 = v_\alpha\, h^\alpha = v_\alpha\, k^\alpha = v_\alpha v^\alpha = 0.$$

Таким образом, даже в довольно простом случае электромагнитного излучения возможны все три типа полей. Не останавливаясь на физическом истолковании полученных результатов, которое

требует специальной статьи, отметим лишь, что решение сформулированной выше проблемы в этом случае позволяет получить довольно интересные результаты, связанные с интегрированием сложной системы уравнений поля Эйнштейна.

Список литературы

1. А. З. Петров Пространства Эйнштейна. М. Физматгиз, 1961.

2. Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948.

3. А. З. Петров К теореме о главных осях тензора. Изв. Казанского физ-мат. общества. Серия 3, 14, 1949.

4. Г. Е. Изотов. О совместном приведении квадратичной и эрмитовой формы. Известия вузов. «Математика». №1, 1957.

5. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Теория поля, М. ГТТИ, 1948.

References

1. A. Z. Petrov Einstein Spaces. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961.

2. L. N. Eisenhart. Riemannian geometry. M., IL, 1948.

3. A. Z. Petrov On the principal axes theorem of the tensor. Izv. Kazan State University of Physics and Mathematics. companies. Series 3, 14, 1949.

4. D. E. Izotov. On the joint reduction of the quadratic and Hermitian forms. Izvestiya vuzov [News of Universities]. «Matematika». №1, 1957.

5. L. Landau and E. Lifshitz. Field Theory, Moscow State Technical University, 1948.

Авторы

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Петров А. З. Тип поля и тип тензора энергии-импульса. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2021. № 3. С. 10—19.

Authors

Please cite this article in English as:
Petrov A. Z. Field type and energy-momentum tensor type. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2021, no. 3, pp. 10–19.