

УДК 530.12, 532.5.013.2, 537.8

© Белевич М. Ю., 2022

МЕХАНИКА КОНТИНУУМА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ (ВАРИАНТ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ, СВОБОДНЫЙ ОТ РЯДА ИЗВЕСТНЫХ ПАРАДОКСОВ)Белевич М. Ю.^{a,b,1}^a Институт океанологии им. П.П.Ширшова, РАН, г. Москва, 117997, Россия^b Российский Государственный Гидрометеорологический университет, г. Санкт-Петербург, 195112, Россия

Строится вариант релятивистской механики сплошной среды с мерой. Теория удовлетворяет следующим принципам: причинности, общей ковариантности, соответствия и принципу относительности Эйнштейна. Групповой анализ получаемых уравнений модели среды показывает, что они допускают группу преобразований Пуанкаре и оказываются лоренц-инвариантными. Закон сохранения меры является основой обсуждаемой теории, а наблюдатель — ее необходимой составной частью.

Каких-либо ограничений скорости объекта не предполагается; допускаются произвольные значения скорости. Однако, ввиду того, что скорость объекта измеряется с использованием сигнала, распространяющегося с некоторой конечной скоростью, эта скорость сигнала в рамках данной теории фактически ограничивает диапазон измеряемых скоростей объектов. Объекты, движущиеся быстрее скорости сигнала (распространения информации), либо становятся ненаблюдаемыми, либо их измеренная скорость оказывается кажущейся и не превышает скорости сигнала.

Рассматриваются различные варианты синхронизации и построения пространств одновременных событий. В отличие от классической модели среды предлагаемая теория базируется на меньшем количестве постулируемых утверждений. Так например, закон сохранения полной энергии имеет место, однако, он не постулируется, как в классической модели среды, а является теоремой и следует из закона сохранения массы. Кроме того, не требует постулирования локальное термодинамическое равновесие. Наконец, в случае, когда скорость сигнала, доставляющего наблюдателю информацию об изучаемом явлении, меньше скорости объекта, второй закон термодинамики не выполняется. Всё это согласуется с поведением решения соответствующих явных конечно-разностных аналогов рассматриваемых уравнений. Подобное явление хорошо известно в вычислительной математике как отсутствие устойчивости численного алгоритма.

В рамках описываемой модели рассматриваются два уровня описания среды, что отражает наличие двух основных физических интерпретаций разрабатываемой теории — гидромеханической и электромагнитной. Обсуждаются обе интерпретации и выписываются соответствующие системы уравнений.

Ключевые слова: механика континуума; законы сохранения; теория поля; теория относительности; уравнения Максвелла; второе начало термодинамики.

¹ E-mail: mbelevich@ioras.nw.ru, mbelevich@yahoo.com

CONTINUUM MECHANICS FROM AN OBSERVER'S VIEWPOINT (A VARIANT OF RELATIVISTIC FIELD THEORY FREE FROM SOME KNOWN PARADOXES)

Belevich M.^{a,b,1}

^a Shirshov Institute of Oceanology, RAS, Moscow, 117997, Russia

^b Russian State Hydrometeorological University, St.Petersburg, 195112, Russia

A variant of the relativistic continuum mechanics with the measure is presented. The theory satisfies the following principles: the causality principle, the general covariance principle, the correspondence principle, and Einstein's principle of relativity. The group analysis of the resulting equations shows that they admit the Poincaré group of transformations, and appear to be Lorentz-invariant. The measure conservation law is the basis of the discussed theory, and the observer is its necessary component.

The theory does not imply any speed limitation of an object. Arbitrary values of velocity are admissible. However, since the velocity of an object is being measured using the signal propagating with some finite speed, this speed in fact acts as a limit for the measured velocities of objects. This is due to the fact that objects moving faster than the speed of the signal (information propagation) either become unobservable, or their measured velocity turns out to be seeming and does not exceed the signal speed.

Various options for synchronization and construction of spaces of simultaneous events are considered. Another distinctive feature of the constructed environment model is the smaller number of postulated statements. For example, the total energy conservation law holds. However, it is not postulated, as in the classical fluid model, but follows from the mass conservation law and, therefore, is a theorem. Also, local thermodynamic equilibrium does not require postulation. Finally, the second law of thermodynamics does not hold in the cases when the speed of the signal providing the observer with information about the phenomenon under study is less than the speed of the object. Such behavior is corroborated using the corresponding numerical models, in particular, based on the explicit difference methods. A similar phenomenon is known as the absence of stability of the numerical algorithm.

Two levels of description within the considered model are demonstrated. This reflects the presence of two main physical interpretations of the developed theory — hydromechanical and electromagnetic. Both interpretations are discussed and corresponding systems of equations are presented.

Keywords: fluid mechanics; conservation laws; field theory; theory of relativity; Maxwell's equations; second law of thermodynamics.

PACS: 40., 47., 47.10.–g, 47.10.A

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2022.1.20-63

1. Введение

Любая современная физическая теория зиждется на фундаменте, включающем наблюдения, их интерпретацию и базовые принципы мировосприятия. К настоящему времени уже выработано некоторое представление о том, что нас окружает, каким основным закономерностям это окружение подчиняется и как обо всем этом можно рассуждать. Обретя такие инструменты, исследователь получил возможность описывать явления природы и строить их модели.

Если прежде главную роль играли наблюдения, а их интерпретация часто казалась очевидной, то сегодня роль интерпретации существенно возросла. От того, какой именно точке зрения будет отдано предпочтение, зависит не только разрабатываемая модель, но нередко и смежные с ней области знания. Критериями, позволяющими предпочесть одну интерпретацию другой, обычно служат простота создаваемой теории, отсутствие в ней парадоксов и особенностей, а также возможность общего взгляда на совокупность различных явлений. Это же служит одним из побудительных мотивов для формулировки нового взгляда на существующие описания и теории. Другим мотивом является желание расширить область применимости теории, за пределами которой прежняя теория перестает работать. Признаками таких границ служат, например, выявляемые в теории парадоксы, сингулярности, и т. п. В теории относительности (ТО), к примеру,

все это давно обнаружено, обсуждалось (например, в [1, 2]) и неоднократно служило поводом для критики и формулировки альтернативных теорий, свободных от выявленных недостатков (см., например, [3]).

То же касается и подхода, обсуждаемого в настоящей работе. Его основа изначально создавалась с целью разрешения проблем, связанных с механикой вязкой теплопроводящей жидкости и желанием построить причинно-обусловленную модель такой среды. Соответствующая модель была построена (см. [4–9]), и разработана теория, удовлетворяющая следующим принципам:

1. *принципу причинности* (скорость распространения информации о состоянии изучаемого объекта конечна¹),
2. *принципу общей ковариантности* (отсутствует зависимость от выбора системы координат в трехмерном пространстве мест),
3. *принципу соответствия* (если скорость распространения информации возрастает до бесконечности уравнения модели стремятся к стандартным уравнениям модели вязкой среды).

Исследование построенной модели и, в частности, групповой анализ соответствующей системы уравнений показал (см. приложение Е), что эти уравнения допускают группу преобразований Пуанкаре, являются лоренц-инвариантными и удовлетворяют принципу относительности Эйнштейна. Такой несколько неожиданный результат побудил взглянуть на построенную модель с иных позиций, и этот взгляд излагается ниже.

1.1. Отличия от стандартной ТО

Описание объектов физического мира, естественно, всегда производится с позиции наблюдателя. Но само представление о наблюдателе эволюционировало. Изменения касались, главным образом, скорости, с которой он получал информацию об объекте изучения. Эти меняющиеся представления накладывали отпечаток на строящиеся теории. Например, наблюдатель классической механики получал информацию об объекте мгновенно, наблюдатель ТО — со скоростью света, и т.д. В результате возникло представление о пространствах одновременных событий, а сами наблюдатели стали различаться не только положением в пространстве, но и пространствами одновременных с ними событий.

К сожалению, в экспериментальной физике используется, по существу, только два переносчика информации: свет и звук. Однако, кроме физического эксперимента, в ряде случаев можно использовать и эксперимент численный, что дает в руки исследователя широкий набор скоростей распространения информации. В этом случае удобно пользоваться разностными методами и строить разностные аналоги соответствующих уравнений. Явные разностные схемы обладают тем преимуществом, что они по сути имитируют реальное физическое явление. Они являются причинно-обусловленными, и переход с одного временного слоя на другой происходит с конечной скоростью. Решение, соответствующее некоторому временному слою, естественно интерпретировать как численный аналог измерения рассматриваемой характеристики явления в указанный момент времени. В свою очередь, скорость последовательного перехода с текущего временного слоя на соседний естественно интерпретировать как скорость распространения информации о явлении, и эта скорость может меняться экспериментатором (здесь, вычислителем) в широких пределах².

Поскольку картина изучаемой действительности строится наблюдателем, она будет, в частности, зависеть и от величины скорости используемого им сигнала. В данной работе рассматривается общий случай наблюдателя, единственным ограничением скорости сигнала которого является его конечность. Описываемая ниже теория строится с точки зрения такого наблюдателя. Под сигналом понимается любой переносчик информации, пренебрежимо мало влияющий на свойства объекта.

¹Это единственное ограничение на скорость.

²Обсуждение такого численного эксперимента см. в приложении А.

Поскольку теория отражает исключительно точку зрения наблюдателя, все, что может быть определено наблюдателем, им и определяется. В частности, им задается параметризация его мировой линии³, способ синхронизации параметров других мировых линий с временем наблюдателя, выбор сигнала, и т.п. Основой теории служит аксиома, которая формулируется как закон сохранения меры. Последняя может интерпретироваться по-разному, например, как масса рассматриваемого тела, его энергия, заряд, и тому подобное.

Предлагаемая здесь теория рассматривается как вариант построения ТО и имеет ряд отличительных особенностей, среди которых можно выделить следующие.

1. Теория основывается на том, что извлекается непосредственно из опыта (измерений), т.е. строится на базе интегральных параметров, поскольку именно интегральные параметры доступны измерению. Как было сказано, основа теории — закон сохранения меры [4, 6, 7].
2. Допускается возможность получения информации об изучаемом объекте с помощью любых сигналов, распространяющихся с произвольными скоростями.
3. Рассматриваются различные варианты синхронизации событий (см. приложение С).

В результате классическая модель континуума видоизменяется. В приводимой таблице указаны совокупности постулатов, образующие как классическую модель среды, так и модель, описываемую в данной работе. Первые четыре постулата являются общими для обеих моделей. Однако закон сохранения энергии в число составляющих предлагаемую модель постулатов уже не входит. Он по-прежнему выполняется, но в силу того, что является следствием закона сохранения массы, т.е. является теоремой. Кроме того, постулирование локального термодинамического равновесия в рамках рассматриваемой модели не требуется (детали см. в [10]).

ПОСТУЛАТЫ МОДЕЛИ СРЕДЫ		
	КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ	ПРЕДЛАГАЕМАЯ МОДЕЛЬ
1	сохранение массы	
2	баланс импульса	
3	уравнение состояния	
4	определение тензора напряжений	
5	сохранение энергии	—
6	локальное т/д равновесие	

К числу особенностей предлагаемой модели следует отнести также следующие ее черты.

1. Отсутствует второе начало термодинамики как основополагающий принцип. В обычных условиях этот закон должен выполняться. Однако, невыполнение неравенства Клаузиуса не является свидетельством ошибочности построенной теории, а служит признаком того, что скорость выбранного сигнала недостаточно велика и он не подходит для описания соответствующих явлений (детали см. в [6]. Там же обсуждается аналогичное явление из области численного решения дифференциальных уравнений. Оно хорошо известно и давно описано под названием потери устойчивости явного численного алгоритма).
2. Отсутствует так называемый тензор энергии-импульса; его роль выполняет четырехмерный тензор плотности потока импульса. Что касается энергии, то она определяется как мера, а ее плотность является скалярной величиной, а не компонентой тензора.
3. Отсутствует ограничение скорости перемещения физических объектов. Наблюдаемое ограничение является результатом интерпретации (см. приложение А), что легко может быть продемонстрировано.

³Иными словами, часы, выбранные наблюдателем, по определению являются точными.

4. В теории отсутствуют известные парадоксы ТО: «замедления времени», «сокращения длин», ...; все они являются результатами используемой интерпретации (см. приложение С).

В работе также

1. обосновывается применяемая процедура разделения описываемых движений по масштабам (детали см. в [8]),
2. описывается связь между внутренней энергией и диффузией плотности,
3. приводятся различные интерпретации построенной механики континуума (см. приложение 4), которые впервые были продемонстрированы в [7],
4. обсуждаются допустимые группы преобразований построенной модели среды (см. приложение Е).

1.2. Структура работы

Данное исследование имеет следующую структуру. В главе 2 обсуждаются общие соображения о математических моделях физических явлений и способах их построения. Глава 3 посвящена разработке теории континуума с точки зрения произвольного наблюдателя. Здесь же рассматриваются различные варианты описания, с каждым из которых связана преимущественно одна из известных интерпретаций (в приложении 4 приводятся оба варианта интерпретаций, гидродинамический и электромагнитный). В заключительной главе 5 содержится обсуждение результатов работы.

Помимо указанных глав, в статье имеется раздел 5, включающий ряд приложений. В приложении Е рассматриваются допустимые группы преобразований уравнений предлагаемой модели континуума. В приложении А обсуждаются ограничения результатов измерений скоростей объектов. В приложении В описываются варианты синхронизации параметров мировых линий с временем наблюдателя, а в приложении С обсуждается связь методов синхронизации с преобразованием Лоренца и эффектом Доплера. Так называемое сложение скоростей рассматривается в приложении D. Варианты интерпретации механики континуума приводятся в приложении 4.

2. Общие соображения

2.1. Методология

Для описания любого физического объекта или явления необходимо наличие

- а) *субъекта* (или *наблюдателя*), выполняющего это описание, и
- б) *информации* об объекте.

Поскольку под описанием объекта здесь подразумевается построение его математической модели, информация об объекте представляет собой совокупность чисел, однозначно характеризующих свойства объекта. В виду того, что обсуждается локальная теория, а объект и наблюдатель, вообще говоря, разнесены в пространстве, требуется также

- в) *переносчик* необходимой информации от объекта к наблюдателю, который далее называется *сигналом*.

Помимо способности доставлять наблюдателю сведения об объекте, от сигнала требуется минимально исказить картину явления (например, скорость движения объекта).

Само описание объекта (т.е. его модель) представляет собой совокупность утверждений, достаточных для однозначного определения описываемых свойств. Такие утверждения должны быть:

- непротиворечивы (это обеспечивает существование теоретического объекта),
- независимы (в противном случае некоторые утверждения избыточны, поскольку являются следствиями остальных),

- основаны на сделанных наблюдениях (измерениях) и ими мотивированы.

Кроме того, эти утверждения должны удовлетворять законам логики и базовым принципам мировосприятия, существующим в современном мире (таким, например, как *принцип причинности*, устанавливающий допустимые пределы влияния физических событий друг на друга [11]). В физике указанные утверждения называются *законами природы*. В математической модели они же формулируются как аксиомы и составляют собственно модель явления. Остальным утверждениям, следующим из законов природы, в математической модели соответствуют теоремы.

2.1.1 Наблюдатель

Как уже отмечалось, описание физического объекта или явления подразумевает наличие наблюдателя, который в известном смысле произволен⁴. Каждый наблюдатель строит свое уникальное описание объекта, и по этой причине описание должно включать наблюдателя, чьей точке зрения оно соответствует. Будем исходить из того, что каждый наблюдатель Obs ощущает объекты материального мира (в том числе и себя) расположенными в тех или иных совокупностях точек (мест) трехмерного⁵ *пространства мест* $\mathcal{L}$, которые могут меняться при изменении того, что принято называть *моментом времени*. Непрерывно следующие друг за другом моменты времени упорядочивают множество мест, занимаемых наблюдателем, образуя *траекторию* его движения $\chi_{Obs} \subset \mathcal{L}$.

Множество моментов времени $\mathcal{T}$ и пространство мест $\mathcal{L}$ удобно рассматривать совокупно как прямое произведение $\mathcal{E}^{vents} \equiv \mathcal{T} \times \mathcal{L}$, называемое *пространством событий* или *пространственно-временным континуумом*. Его элементы, т.е. пары (момент времени, место) называются *событиями*. Упорядоченная совокупность событий, связанная с наблюдателем $\lambda_{Obs} \subset \mathcal{E}^{vents}$, называется его *мировой линией*. Упорядоченность задается значениями моментов времени, которыми их снабжает наблюдатель и которые фактически нумеруют события, связанные с ним, и, таким образом, *параметризуют* его мировую линию.

Любой наблюдатель ощущает события с ним связанные как события двух видов: события реально происходящие и события кажущиеся, мнимые. Реально происходящие события связаны с единственным моментом времени, которое наблюдатель ощущает как *настоящее*. Остальные события воспринимаются им либо как прошлые, либо как могущие произойти в будущем, и, в обоих случаях, не настоящие. Для описания подобных событий их имеет смысл ассоциировать с мнимыми числами it , где $i = \sqrt{-1}$, а величина $t \in \mathbb{R}^1$ называется *временем*. Поскольку среди мнимых чисел имеется единственное действительное число — нуль, с ним разумно связать настоящее время $t = 0$. Соответственно, с положительными значениями времени $t > 0$ можно связывать, скажем, события будущего, а с отрицательными $t < 0$ — события прошлого. Здесь важно учитывать, что описываемое время — это время наблюдателя, им выбранное и им же назначенное в качестве такового при параметризации своей мировой линии.

Время остальных событий из $\mathcal{E}^{vents}$ удобно согласовывать (синхронизировать) с временем наблюдателя, для чего требуются дополнительные гипотезы, связанные, как правило, со средством доставки наблюдателю информации об изучаемом объекте или явлении, т.е. с сигналом⁶.

⁴Все наблюдатели, конечно, равноправны, но не все одинаково удобны. При отсутствии каких-либо внешних предпочтений, теорию, видимо, имеет смысл строить с позиции того наблюдателя, с точки зрения которого она оказывается наиболее простой.

⁵Представление о трехмерности пространства мест связано с нашей способностью воспринимать органами чувств именно три пространственных измерения. С одной стороны, это представление отражает возможности человека, а с другой стороны, имеется, например, исследование П.Эренфеста [12], обосновывающее использование такого представления. Вместе с тем, далеко не все понятия современной физики человек способен воспринимать непосредственно органами чувств, и поскольку для описания явлений природы могут оказаться удобными пространства мест иной размерности, кажется разумным формулировать теории так, чтобы они были справедливы в пространствах мест произвольной размерности.

⁶Под сигналом можно понимать, например, монохромное излучение, слабо взаимодействующее с рассматриваемой средой и не меняющее при этом ее физических свойств. Скоростью сигнала в этом случае можно называть его фазовую скорость. Чаще всего используются электромагнитные сигналы, однако, это не единственная возмож-

Единственную характеристику сигнала, существенную в данном рассмотрении — скорость его распространения — будем далее обозначать буквой s . Подчеркнем, во избежание недоразумения, что здесь s — скорость используемого сигнала, а не обязательно скорость света (хотя, разумеется, может быть равна и ей).

Процедура синхронизации позволяет распространить время наблюдателя на все $\mathcal{E}^{vents}$ и строить подпространства одновременных событий $\mathcal{E}_t^{vents} \subset \mathcal{E}^{vents}$. Синхронизация, иными словами, задает *слоение* пространства событий, а каждое подпространство $\mathcal{E}_t^{vents}$ является *листом* этого слоения. Момент времени t здесь играет роль номера листа $\mathcal{E}_t^{vents}$. При этом нужно иметь в виду, что процедура синхронизации не единственна и, значит, результат построения подпространств одновременных событий, т.е. слоения, не однозначен, а зависит как от выбранного наблюдателя, с чьей точки зрения строится модель явления, так и от предпочитаемого этим наблюдателем способа синхронизации (см. приложения В и С). Различные наблюдатели порождают разные слоения и, следовательно, не совпадающие пространства одновременных событий. И от того, какой способ синхронизации предпочтет наблюдатель, зависит, каким будет время в его вселенной.

Таким образом, помимо выбранной процедуры синхронизации, с наблюдателем связана тройка понятий (мировая линия наблюдателя, ее параметризация, скорость сигнала) или (λ_{Obs}, t, s) . Далее, говоря о наблюдателе, будем подразумевать эту тройку и используемую процедуру синхронизации.

2.1.2 Системы отсчета

Система отсчета — совокупность системы координат в пространстве мест и системы координат в пространстве моментов времени. Иными словами, система отсчета — это указанное подмножество систем координат в пространстве событий, задача которой — снабдить точки пространства событий однозначными числовыми эквивалентами. Поскольку выбор системы отсчета не единствен, можно потребовать выполнения некоторых дополнительных условий, чтобы сузить выбор.

Как уже говорилось, удобно связать начало системы отсчета с настоящим временем наблюдателя. Поскольку было решено пространства одновременных событий нумеровать мнимыми числами, отобразим мировую линию наблюдателя на пространство мнимых чисел, которое обозначим через $i\mathbb{R}^1$, а пространство одновременных событий — на $\mathbb{R}^3$. В результате возникает отображение $\phi: \mathcal{E}^{vents} \rightarrow i\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$, которое называется *системой отсчета наблюдателя*. Это отображение снабжает всякую точку из $\mathcal{E}^{vents}$ упорядоченной четверкой чисел $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ — координатами этой точки. Мировая линия точки тела определяется четырьмя функциями $x^0(t), x^1(t), x^2(t), x^3(t)$. Мировая линия наблюдателя, в таком случае, по определению есть $(x^0(t), 0, 0, 0)$. Удобно полагать, что $dx^0 = isdt$, где s — введенная выше скорость сигнала. Это обеспечивает одинаковую физическую размерность всем координатам, описывающим событие.

Таким образом, нулевая координата x^0 мнима за исключением точки $x^0 = 0$, что соответствует значению времени $t = 0$, т.е. настоящему времени. С прошлым ассоциируются значения $t < 0$, а с будущим — $t > 0$. Остальные три координаты $x = (x^1, x^2, x^3)$, описывающие положение точки тела в пространстве мест $\mathcal{L}$, вещественны.

ность. Многие наблюдения проводятся с помощью звуковых сигналов (сейсмометрия, эхолокация и т.д.). Более того, выходя за рамки современного физического эксперимента, мы обнаруживаем множество возможных переносчиков информации, имеющих различные скорости. К таковым надо отнести почту, устные сообщения (например, рассказы очевидцев) и т.п. В свое время многие полезные модели окружающей среды были построены на основе информации, полученной таким путем. Классический пример — составление Б.Франклином первой карты Гольфстрима (карта — это тоже модель явления) на основе информации, полученной от пересекавших Атлантику моряков. Множество различных скоростей сигналов возникает также в рамках численных моделей среды, где такими скоростями служат отношения пространственных и временных шагов сетки (в случае явных разностных алгоритмов).

2.1.3 Объект

Всякая модель — это попытка описать ограниченную совокупность характеристик сложного явления. Выберем те стороны физического явления, которые математическая модель должна описывать обязательно. К таким наиболее существенным чертам наблюдаемых объектов будем в первую очередь относить то, что объекты

1. в каждый данный момент времени занимают совокупность мест в соответствующем пространстве мест (т. е. *существуют*),
2. могут изменять занимаемую совокупность мест при изменении момента времени, (могут *двигаться*),
3. наделены некоторым свойством (например, *массой*, *зарядом* и т.п.), описание эволюции которого входит в задачу строящейся модели.

Хотя упомянутые черты и не исчерпывают всех свойств реальных объектов, они являются определяющими при описании их движения. В случае, когда требуется описать какие-либо дополнительные свойства объектов, приведенный список соответственно увеличивается.

Таким образом, будем рассматривать идеальные объекты $\mathcal{B}^{ody}$, называемые *телами*, которые наделены лишь указанными свойствами.

2.1.4 Описываемые параметры

Построение математических моделей основывается на сопоставлении свойствам физического объекта числовых эквивалентов. Такое сопоставление называется измерением. Все измеряемые свойства тел описываются так называемыми *мерами* или *интегральными параметрами*, т.е. аддитивными функциями множества (см., например, [13]). Они характеризуют тело или его фрагмент в целом. Например, масса, заряд, энергия тела или его объем являются такими интегральными параметрами.

Если интегральный параметр характеризует континуум точек (например, пространственный отрезок, временной интервал или какой-либо многомерный объект), то его значение в любой точке такого континуума равно нулю. В этом случае для математического описания данного свойства в точке вместо интегральных параметров используются их *плотности* или, что то же, *локальные (дифференциальные) параметры*. Любая плотность определяется как предел отношения двух интегральных параметров, т.е., по существу, является производной одной меры по другой (см. [13]). Например, скорость перемещения является локальным параметром, т.е. плотностью, и есть производная меры пространственной протяженности по мере протяженности во времени.

В задаче построения модели движущегося тела $\mathcal{B}^{ody}$ рассматриваются параметры обоих видов. Один — локальный параметр — скорость v_M движения тела как целого. Другие параметры — интегральные. Это может быть масса тела, его заряд, объем и др. Локальный параметр ассоциируется с некоторой точкой x_M , называемой *центром масс* тела, которая движется так, как если бы в ней была сосредоточена вся масса тела и приложены все внешние силы. Скорость движения центра масс является вектором $v_M = d_t x_M$, касательным к соответствующей траектории $x_M(t)$, которая является проекцией мировой линии центра масс на пространство мест.

2.2. Построение модели

Как уже отмечалось в п.2.1, любая математическая модель есть совокупность постулатов, которые соответствуют тем или иным законам природы, связанным с описываемым объектом. Все остальные утверждения об объекте суть следствия из постулатов или, другими словами, теоремы. В качестве постулатов выбираются наиболее общие утверждения, имеющие отношение к

рассматриваемому объекту. Чаще они формулируются в виде законов сохранения, основываясь на следующем базовом принципе.

2.2.1 Базовый принцип

Одним из фундаментальных принципов современного естествознания является, так называемый, *принцип причинности*, который в данном контексте утверждает, что всякое изменение (*следствие*) должно иметь *причину*, и следствие не может причине предшествовать. Если, скажем, нам известна причина Σ , вызывающая изменение некоторого интегрального параметра Π , то это может быть записано в виде уравнения

$$d_t \Pi = \Sigma.$$

Величина Σ , описывающая скорость изменения Π под действием причины, называется *мощностью источника* этого параметра. В отсутствие причины ($\Sigma = 0$) значение Π с течением времени не меняется, т.е. сохраняется

$$d_t \Pi = 0.$$

Оба эти уравнения носят название *интегральных законов сохранения*.

2.2.2 Основные постулаты, следующие из базового принципа

Если строить модель тела $\mathcal{B}^{ody}$, снабженного параметром $\mathcal{M}$, и отождествлять это тело с материальной точкой x , движущейся вдоль своей мировой линии со скоростью v , то искомыми величинами будут $\mathcal{M}$ и v . В задаче, таким образом, имеется два параметра, связанных с телом: $\mathcal{M}$ и поток $\mathbf{m} = \mathcal{M}v$. Применение принципа причинности к этим двум величинам порождает два утверждения, описывающих

1. эволюцию параметра:

$$d_t \mathcal{M} = \Sigma_{\mathcal{M}} \tag{1}$$

и

2. эволюцию потока параметра:

$$d_t \mathbf{m} = \Sigma_{\mathbf{m}}. \tag{2}$$

Здесь $\Sigma_{\mathcal{M}}$ и $\Sigma_{\mathbf{m}}$ — причины изменения параметра $\mathcal{M}$ и его потока $\mathbf{m}$, соответственно.

2.2.3 Гипотеза сплошности

Другой вариант построения модели движущегося тела $\mathcal{B}^{ody}$, состоит в описании движения всех мельчайших частиц, это тело составляющих, и которые, в свою очередь, отождествляются с точками. В виду того, что множество таких точек, как правило, оказывается чрезвычайно большим, а задача описания индивидуального движения каждой точки — невысказанно сложной, дискретное множество точек заменяют континуумом или *сплошной средой*. Для этого принимается так называемая *гипотеза сплошности*, и это означает, что

- а) тело рассматривается, как всюду плотное множество, т.е. континуум, и
- б) свойства тела описываются гладкими функциями.

Критерием возможности применения гипотезы сплошности служит *число Кнудсена* Kn равное отношению характерного (среднего) расстояния между частицами тела к его пространственному масштабу. Оно характеризует относительную разреженность рассматриваемого тела. В случае, когда размер рассматриваемого объекта не менее, чем на порядок превышает характерное расстояние между частицами, составляющими объект, т.е. $Kn < 0.1$, использовать гипотезу сплошности считается допустимым.

2.2.4 Ограничения в силу гипотезы сплошности

Представление тела сплошной средой позволяет использовать такие теоретические инструменты как хорошо разработанный аппарат математического анализа, теорию дифференциальных уравнений и т.п. Между тем, принятие гипотезы сплошности означает, что строящаяся модель должна главным образом описывать макроскопические, крупномасштабные движения среды. Именно их строящаяся модель описывает явно. Все, происходящее на малых масштабах (где после принятия гипотезы сплошности присутствует множество фиктивных точек) приходится либо не принимать в расчет, либо описывать параметрически (т.е. совокупно характеризовать числом — значением некоторого параметра).

Таким образом, движение точек среды в силу принятой гипотезы сплошности требуется разделить на крупномасштабное и мелкомасштабное. Для этой цели удобно ввести в рассмотрение скалярную величину $\mathcal{K} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{v}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2}\mathcal{M}|\mathbf{v}|^2$, называемую *энергией* тела, которая характеризует движение тела и всех его частей, т.е. движение всех масштабов, присущих телу.

Если затем разделить движение по масштабам (в некотором, заранее оговоренном смысле), то энергию тела можно будет записать в виде суммы двух величин $\mathcal{K} \equiv K + E$, одна из которых K характеризует крупномасштабное движение и называется *кинетической энергией* тела, а вторая E характеризует мелкомасштабное движение (среднюю кинетическую энергию этих движений среды) и называется *внутренней энергией* тела. Сама же исходная величина $\mathcal{K}$ называется в этом случае *полной энергией* тела.

3. Механика континуума (теория поля)

Описываемая далее математическая модель может быть интерпретирована по-разному. Она содержит два уровня описания, с каждым из которых связана преимущественно одна из двух известных интерпретаций (см. приложение 4, а также [7]): первая — гидромеханическая, и вторая — электромагнитная. Вероятно возможны и иные интерпретации.

3.1. Первый уровень описания

3.1.1 Основные понятия

Будем считать, что гипотеза сплошности принята, и тело $\mathcal{B}^{ody}$ мыслится, как сплошная среда. С каждой точкой $\mathcal{X}$ тела $\mathcal{B}^{ody}$ ассоциируется непрерывная упорядоченная совокупность событий — ее мировая линия $\lambda(\mathcal{X}) \subset \mathcal{E}^{vents}$. Совокупность мировых линий точек тела $\lambda(\mathcal{B}^{ody})$ образует его мировую трубку, которая рассматривается как 4-мерное многообразие $\mathcal{B}^4 \equiv \lambda(\mathcal{B}^{ody})$ в пространстве $\mathcal{E}^{vents}$.

Каждая мировая линия параметризуется временем t наблюдателя. Наличие наблюдателя и принятой процедуры синхронизации позволяет определить пространства одновременных с моментом t событий $\mathcal{E}_t^{vents}$. Сечение $\mathcal{B}_t^{ody}$ мировой трубки $\lambda(\mathcal{B}^{ody})$ пространством $\mathcal{E}_t^{vents}$ называется *конфигурацией* тела $\mathcal{B}^{ody}$ в момент времени t .

Параметризация мировых линий порождает на каждой из них касательное векторное поле скорости $\vec{\tau} = d_t \mathbf{x}$. На многообразии $\mathcal{B}^4$, в свою очередь, также оказывается определенным касательное векторное поле. Векторы, далее, будем описывать компонентами относительно координатного базиса $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=0}^3$, $\vec{e}_\alpha = \partial_{x^\alpha}$, выбранного в каждой точке $\mathcal{E}^{vents}$. Так если $\vec{\tau} = \tau^\alpha \vec{e}_\alpha$, то $\tau^\alpha = d_t x^\alpha$ и $\tau^0 = d_t x^0 = i s$. Здесь и далее постоянно применяется правило суммирования по повторяющемуся индексу, а также считается, что латинские индексы принимают значения от 1 до 3, а греческие — от 0 до 3.

3.1.2 Меры и законы сохранения

На теле $\mathcal{B}^{body}$ и в пространстве событий $\mathcal{E}^{events}$ можно определить меры $M(\mathcal{B}^{body})$ и $V(\mathcal{E}^{events})$, которые на сечении $\mathcal{B}_t$ индуцируют меры $M(\mathcal{B}_t)$ и $V(\mathcal{B}_t)$. При этом мера M может интерпретироваться по-разному (например, как масса, заряд и т.п.), а мера $V(\mathcal{B}_t)$ обычно интерпретируется как объем конфигурации тела.

Постулируется закон сохранения меры конфигурации тела

$$d_t M(\mathcal{B}_t) = 0. \quad (3)$$

Таким образом, независимо от изменения во времени конфигурации тела $\mathcal{B}_t$ указанная мера сохраняется. Очевидно, что закон (3) определяет меру M с точностью до постоянного множителя⁷. Действительно, если существует независимая от времени константа C , а величина $\mathcal{K}$ определяется равенством $\mathcal{K}(\mathcal{B}_t) = C \cdot M(\mathcal{B}_t)$, тогда уравнение

$$d_t \mathcal{K}(\mathcal{B}_t) = 0 \quad (4)$$

необходимо следует из уравнения (3). Реализация такой возможности обсуждается ниже. Новую меру $\mathcal{K}(\mathcal{B}_t)$ будем называть *энергией* конфигурации тела.

Между мерами конфигурации тела $M(\mathcal{B}_t)$ и $V(\mathcal{B}_t)$ имеется связь. Можно показать, что в силу теоремы Радона-Никодима (см., например, [13]) при весьма общих допущениях существует единственная функция ρ такая, что верным оказывается соотношение

$$M(\mathcal{B}_t) = \int_{V(\mathcal{B}_t)} \rho dV. \quad (5)$$

Аналогичное соотношение справедливо и для мер $\mathcal{K}(\mathcal{B}_t)$ и $V(\mathcal{B}_t)$

$$\mathcal{K}(\mathcal{B}_t) = \int_{V(\mathcal{B}_t)} \varkappa dV.$$

Величины $\rho = \rho(t, x)$ и $\varkappa = \varkappa(t, x)$ называются плотностями соответствующих мер в точке x в момент времени t . При этом, $\varkappa = C \cdot \rho$.

Уравнения (3) и (4) порождают соответствующие дифференциальные законы сохранения (см. [4] или [6])

$$\begin{aligned} d_t M &= \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{\tau}) dV = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{\tau}) = 0, \\ d_t \mathcal{K} &= \int_V \operatorname{div}(\varkappa \vec{\tau}) dV = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\varkappa \vec{\tau}) = \rho d_t \frac{\varkappa}{\rho} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\vec{\tau}$ — вектор, касательный к мировой линии. Уравнение (6) часто называется уравнением *неразрывности*.

Из физических соображений удобно определить константу C следующим образом $C = \frac{1}{2} |\vec{\tau}|^2$. Это можно сделать за счет выбора подходящего метрического тензора $\mathbf{g}$. Положим величину

$$|\vec{\tau}|^2 = \mathbf{g}(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = g_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta \quad (7)$$

равной константе, например, $|\vec{\tau}| = 1$. В данном случае это всегда возможно, поскольку $\tau^0 = i\mathbf{s} \neq 0$. Относительно ортогонального базиса метрический тензор диагонален и может быть выбран пропорциональным единичному тензору $\mathbf{l}$ с коэффициентом пропорциональности g_0 : $\mathbf{g} = g_0 \mathbf{l}$. При этом

$$g_0 = \frac{1}{\mathbf{l}(\vec{\tau}, \vec{\tau})} \Rightarrow g_0^{-1} = \sum_{\alpha} \tau^\alpha \tau^\alpha. \quad (8)$$

Далее мы будем считать, что выбран ортогональный базис и соответствующий метрический тензор. При таком выборе имеем $\varkappa = \frac{1}{2} |\vec{\tau}|^2 \rho$ и, следовательно, $\varkappa = \frac{1}{2} \rho$.

⁷ Вообще закон (3) определяет меру с точностью до линейного преобразования: $\mathcal{K} = C \cdot M + C_1$, где C и C_1 — константы. Однако, в случае $M = 0$, из физических соображений разумно считать, что $\mathcal{K} = 0$, и, следовательно, $C_1 = 0$.

3.1.3 Термодинамика и закон сохранения полной энергии

Переход к термодинамическому случаю, по существу, состоит в разделении движения среды по масштабам (обоснование см. выше в п. 2.2.4) и осуществляется путем осреднения уравнений модели. Осреднённые уравнения описывают крупномасштабные (сглаженные) движения, а остальные движения описываются параметрически. Каждая мировая линия, при этом, представляется в виде суммы сглаженной кривой и флуктуации. Соответственно, касательное векторное поле $\vec{\tau} = \vec{v} + \vec{v}'$ разделяется на осреднённое векторное поле $\vec{v}$, касающееся сглаженных мировых линий, и векторное поле флуктуаций $\vec{v}'$. Обсуждение процедуры осреднения см. в [5, 8].

В результате осреднения (далее оператор осреднения обозначается надчёркиванием) закон сохранения меры (6) приводит к уравнению диффузии плотности меры, которое следует рассматривать, как обобщение уравнения неразрывности (детали см. в [8]). Как правило, однако, рассматривают более грубое приближение, заключающееся в пренебрежении диффузией⁸ и сохраняющее вид дифференциального закона сохранения меры. Здесь мы воспользуемся именно таким приближением, и осредненное уравнение (6) также будем записывать в виде четырехмерного уравнения неразрывности

$$\overline{\operatorname{div}(\rho\vec{\tau})} = \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0. \quad (9)$$

В свою очередь, энергия $\mathcal{K}(\mathcal{B}_t)$, называемая в термодинамическом случае *полной энергией*, записывается как сумма *кинетической* $K(\mathcal{B}_t)$ и *внутренней* $E(\mathcal{B}_t)$ энергий конфигурации тела

$$\mathcal{K}(\mathcal{B}_t) = K(\mathcal{B}_t) + E(\mathcal{B}_t), \quad K, E > 0,$$

с плотностями

$$\frac{1}{2}\rho\overline{|\vec{\tau}|^2} = \frac{1}{2}\rho, \quad \kappa \equiv \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2, \quad \varepsilon \equiv \frac{1}{2}\rho\left(\overline{|\vec{\tau}|^2} - |\vec{v}|^2\right) = \frac{1}{2}\rho(1 - |\vec{v}|^2), \quad (10)$$

соответственно. В силу определений (10) верно равенство $\frac{\kappa+\varepsilon}{\rho} = \frac{1}{2}$. Метрический коэффициент g_0 в этом случае переопределяется и имеет вид (ср. с (8))

$$g_0 = \frac{1 - 2\epsilon}{l(\vec{\tau}, \vec{\tau})}, \quad \epsilon = \frac{\varepsilon}{\rho}. \quad (11)$$

Осредняя скорость изменения полной энергии, получим

$$\overline{d_t \mathcal{K}} = \frac{1}{2} \overline{\int_V \operatorname{div}(\rho|\vec{\tau}|^2 \vec{\tau}) dV} = 0. \quad (12)$$

Это интегральное соотношение соответствует дифференциальному уравнению баланса плотности полной энергии

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \overline{\operatorname{div} \rho |\vec{\tau}|^2 \vec{\tau}} = \frac{1}{2} \overline{\left(\rho(v_\alpha + v'_\alpha)(v^\alpha + v'^\alpha)(v^\beta + v'^\beta) \right)_{;\beta}} = \\ &= \overline{\left(\underbrace{\frac{1}{2}\rho v_\alpha v^\alpha v^\beta}_{\kappa} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v'_\alpha v'^\alpha v^\beta}_{\varepsilon} + \underbrace{\rho v^\alpha v'_\alpha v'^\beta}_{(\mathbf{T}'\vec{v})^\beta} + \frac{1}{2}\rho v'_\alpha v'^\alpha v'^\beta \right)_{;\beta}} = \\ &= \overline{\left((\kappa + \varepsilon)v^\beta + (\mathbf{T}'\vec{v})^\beta + \frac{1}{2}\rho v'_\alpha v'^\alpha v'^\beta \right)_{;\beta}} = \\ &= \rho d_t \frac{\kappa + \varepsilon}{\rho} + \overline{\operatorname{div}(\mathbf{T}'\vec{v} + \varepsilon'\vec{v}')}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь v^α и v'^α суть компоненты векторов $\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha$ и $\vec{v}' = v'^\alpha \vec{e}_\alpha$ относительно базиса $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=0}^3$. Величина $\varepsilon' \equiv \frac{1}{2}\rho v'_\alpha v'^\alpha$ интерпретируется как флуктуация плотности внутренней энергии порожденная флуктуациями скорости $\vec{v}'$. Величины $\rho v'_\alpha v'^\beta = \rho g_{\alpha\gamma} \overline{v'^\gamma v'^\beta} = g_{\alpha\gamma} \mathbf{T}'^{\gamma\beta}$ связаны с компонентами

⁸Это стандартный подход, который, однако, может приводить к нежелательным последствиям. Соответствующий пример рассмотрен в [8].

4-тензора *вязких напряжений* $\mathbf{T}' = \overline{\rho \vec{v}'} \otimes \vec{v}'$, тогда как $(\mathbf{T}' \vec{v})^\beta = \rho v^\alpha \overline{v'_\alpha v'^\beta}$ означает свертку $\mathbf{T}'$ с вектором $\vec{v}$.

Подставляя (13) в интеграл (12), получим

$$\int_V \left(\rho d_t \frac{\kappa + \varepsilon}{\rho} + \operatorname{div}(\mathbf{T}' \vec{v} + \varepsilon' \vec{v}') \right) dV = 0$$

или, применяя ко второму слагаемому теорему Гаусса-Остроградского,

$$d_t \underbrace{\int_V (\kappa + \varepsilon) dV}_{(K+E)} + \underbrace{\int_{\partial V} (\mathbf{T}' \vec{v})_n dS}_{-W} + \underbrace{\int_{\partial V} (\varepsilon' \vec{v}')_n dS}_{-Q} = 0. \quad (14)$$

Здесь ∂V — поверхность объема V конфигурации тела. Первое слагаемое описывает скорость изменения полной энергии в объеме V . Второе слагаемое описывает поток полной энергии через границу объема ∂V . Последнее слагаемое описывает поток Q внутренней энергии через границу. Таким образом, баланс энергии (он же — интегральный закон сохранения полной энергии; он же — I-е начало термодинамики) имеет вид

$$d_t(K + E) = W + Q.$$

В отсутствие W и Q полная энергия сохраняется

$$d_t(K + E) = 0. \quad (15)$$

3.1.4 Баланс импульса и энергии

Уравнения баланса Из уравнения (13) можно получить уравнения баланса плотности обоих видов энергии. Для этого вычислим сначала дивергенцию⁹ свертки $\mathbf{T}' \vec{v}$ в уравнении (13)

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}' \vec{v}) = \mathbf{g}(\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T}') + \mathbf{T}' : \nabla \vec{v},$$

а затем сгруппируем члены так, чтобы в каждую из групп входили слагаемые, описывающие эволюцию лишь одного из видов энергии.

$$\underbrace{\rho d_t \frac{\kappa}{\rho} + \mathbf{g}(\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T}')}_{=d_t \pi} + \underbrace{\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} + \mathbf{T}' : \nabla \vec{v} + \operatorname{div} \varepsilon' \vec{v}'}_{=-d_t \pi} = 0. \quad (16)$$

Так, первая группа членов связана с изменением плотности кинетической энергии, а вторая — с изменением плотности внутренней энергии. Поскольку обе группы членов должны различаться лишь знаком, обозначим их через $\pm d_t \pi$ и запишем два дифференциальных уравнения баланса плотности энергии

$$\rho d_t \frac{\kappa}{\rho} = d_t \pi - \mathbf{g}(\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T}'), \quad (17)$$

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = -d_t \pi - \mathbf{T}' : \nabla \vec{v} - \operatorname{div} \varepsilon' \vec{v}', \quad (18)$$

кинетической и внутренней, соответственно. Величина π имеет смысл скалярной кривизны пространства событий $\mathcal{W}$ (детали см. в [6]). Слагаемое $\mathbf{g}(\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T}')$ в уравнении (17) описывает перераспределение и диссипацию плотности кинетической энергии. В свою очередь, слагаемые в уравнении (18) описывают вязкий приток внутренней энергии $(\mathbf{T}' : \nabla \vec{v})$ и ее перенос теплопроводностью $(\operatorname{div} \varepsilon' \vec{v}')$.

⁹Здесь двоеточие обозначает скалярное произведение тензоров.

Баланс импульса. Слагаемые в уравнении (16) были сгруппированы так, чтобы первая группа соответствовала уравнению движения вязкой жидкости. Действительно, скорость изменения удельной плотности кинетической энергии (т.е. левую часть (17)) можно записать в виде

$$\rho d_t \frac{\kappa}{\rho} = \mathbf{g}(\vec{v}, \text{div} \mathbf{M}), \quad (19)$$

где тензор $\mathbf{M} \equiv \rho \vec{v} \otimes \vec{v}$ называется 4-тензором *плотности потока импульса*. Для его описания вводится тензор 2-го ранга $\mathbf{T}$ — 4-тензор *напряжений*, и постулируется следующее уравнение

$$\text{div} \mathbf{M} = \text{div} \mathbf{T}. \quad (20)$$

Оно известно, как *уравнение баланса плотности импульса* или *уравнение движения* (в данном случае четырехмерное). В соответствии с (20) уравнение (19) можно переписать так

$$\rho d_t \frac{\kappa}{\rho} = \mathbf{g}(\vec{v}, \text{div} \mathbf{T}). \quad (21)$$

Комбинируя (15), (20) и (21), получим уравнение баланса плотности внутренней энергии (ср. с уравнением (18))

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = -\mathbf{g}(\vec{v}, \text{div} \mathbf{T}) - \text{div} \overline{\varepsilon' \vec{v}'}. \quad (22)$$

Тензор напряжений. Сравнивая оба варианта записи уравнения баланса плотности кинетической энергии (17) и (21), получим

$$\mathbf{T} = \pi \mathbf{g}^{-1} - \mathbf{T}'. \quad (23)$$

Тензор вязких напряжений определяется как $\mathbf{T}' = 2\rho\chi\mathbf{D}$. Здесь тензор 2-го ранга $\mathbf{D}$ — так называемый, 4-тензор *скоростей деформации*. Величина $\mu = -\rho\chi g_0^{-1}$ называется коэффициентом *динамической вязкости*. Первое слагаемое в правой части (23) обычно записывается в виде $\pi \mathbf{g}^{-1} = \pi g_0^{-1} \mathbf{I} = -p \mathbf{I}$, а множитель $p \equiv -\pi g_0^{-1}$ называется *давлением*. Таким образом, вид 4-мерного тензора напряжений $\mathbf{T}$, записанного в терминах давления и тензора скоростей деформации согласуется с его 3-мерным аналогом $\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}$. Если пренебречь тензором вязких напряжений, получим модель идеальной жидкости. В противном случае — модель вязкой жидкости.

Уравнение баланса плотности внутренней энергии. Слагаемое $\text{div} \overline{\varepsilon' \vec{v}'}$ в правой части уравнения (22) описывает перенос плотности внутренней энергии теплопроводностью. Соответствующая корреляция обычно записывается в терминах градиента удельной плотности внутренней энергии $\overline{\varepsilon' \vec{v}'} = \theta \mathbf{g}^{-1}(\nabla \varepsilon)$. То же, в случае ортогонального базиса, выглядит так $\overline{\varepsilon' \vec{v}'} = -k \nabla \varepsilon$, где $k = -g_0^{-1} \theta$. Таким образом, рассматриваемое слагаемое теперь имеет вид $\text{div} \overline{\varepsilon' \vec{v}'} = \text{div} (\theta \mathbf{g}^{-1}(\nabla \varepsilon))$ или $\text{div} \overline{\varepsilon' \vec{v}'} = -\text{div} (k \nabla \varepsilon)$, если базис ортогонален. Множитель k называется коэффициентом *температуропроводности*.

В простейшем случае идеальной жидкости тензор вязких напряжений равен нулевому тензору $\mathbf{T}' = \mathbf{O}$, и тензор напряжений пропорционален метрическому тензору $\mathbf{T} = \pi \mathbf{g}^{-1}$. Уравнение баланса внутренней энергии (22) в этом случае имеет вид

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = -d_t \pi - \text{div} \overline{\varepsilon' \vec{v}'}.$$

Полагая $\mathbf{g} = g_0 \mathbf{I}$ и вводя обозначение $e = g_0^{-1} \frac{\varepsilon}{\rho}$ для удельной плотности внутренней энергии, получим уравнение

$$\rho d_t e = d_t p + \text{div} (\rho k \nabla e). \quad (24)$$

В более общем случае вязкой жидкости тензор напряжений имеет вид $\mathbf{T} = \pi \mathbf{g}^{-1} - 2\rho\chi\mathbf{D}$, и если $\mathbf{g} = g_0 \mathbf{I}$, получим аналогичное уравнение, учитывающее приток внутренней энергии за счет вязкости

$$\rho d_t e = d_t p - \text{div} (2\mu \mathbf{D} \vec{v}) + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} + \text{div} (\rho k \nabla e). \quad (25)$$

3.1.5 Система уравнений 1-го уровня

Таким образом, система 1-го уровня состоит из следующих уравнений, вытекающих из принятых постулатов (3) и (20):

1. уравнение неразрывности $\text{div}(\rho\vec{v}) = 0$,

2. уравнение движения $\text{div}\mathbf{M} = \text{div}\mathbf{T}$.

Эти два постулата дополняет

3. определение тензора напряжений¹⁰ $\mathbf{T}$ и

4. уравнение состояния, алгебраическое соотношение, замыкающее систему уравнений (это тоже постулат).

3.2. Второй уровень описания

То, что здесь названо вторым уровнем описания, в случае механики континуума в полном объеме не используется. В задачах гидромеханики можно встретить запись уравнения движения в так называемой форме Громеки-Лэмба, а также уравнение вихря (скорости). Обе эти конструкции суть часть описания 2-го уровня. Полностью такой способ описания применяется в теории электромагнитного поля. Поскольку одной из целей данной работы является демонстрация того, что оба поля (и гравитационное, и электромагнитное) различаются не способом описания, но лишь мерой, порождающей соответствующее поле, ниже приводится вывод уравнений 2-го уровня для случая механики сплошной среды.

Традиционно уравнения 1-го уровня формулируются в векторной форме и именно так они были записаны выше. Напротив, уравнения 2-го уровня удобнее записывать на языке 1-форм. Для вывода системы уравнений 2-го уровня требуется, в качестве промежуточного шага, рассмотреть так называемое уравнение вихря. Наряду с уравнением неразрывности оно связывает оба уровня описания.

3.2.1 Уравнение вихря

Для начала перепишем 1-форму ускорения в виде:

$$\begin{aligned} d_t v_\alpha = v^\beta v_{\alpha;\beta} &= 2v^\beta \mathbf{w}_{\alpha\beta} + v^\beta v_{\beta;\alpha} = \ell_\alpha + \left(\frac{\kappa}{\rho}\right)_{,\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow d_t \tilde{v} &= \tilde{\ell} + d\frac{\kappa}{\rho}. \end{aligned} \quad (26)$$

Четырехмерную величину $\tilde{\ell} \equiv 2\tilde{\mathbf{w}}(\vec{v})$ с компонентами $\ell_\alpha = 2v^\beta \mathbf{w}_{\alpha\beta}$ назовем *1-формой Лэмба* по аналогии с известным трехмерным вектором Лэмба. Величину $\tilde{\mathbf{w}}$ с компонентами $\mathbf{w}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(v_{\alpha;\beta} - v_{\beta;\alpha})$ будем называть *2-формой вихря скорости*. Она является кососимметричной частью градиента скорости, т.е. равна внешней производной 1-формы скорости $\tilde{\mathbf{w}} = d\tilde{v}$ и тем самым является точной. Внешняя производная $d\tilde{\mathbf{w}}$ тождественно равна нулю

$$d\tilde{\mathbf{w}} = 0. \quad (27)$$

С учетом определения (23) уравнение движения (20) записывается в виде:

$$\tilde{\ell} = \frac{1}{\rho} d\pi - d\frac{\kappa}{\rho} + 2\eta \text{div} D, \quad \eta \equiv \frac{\chi}{\rho}. \quad (28)$$

¹⁰Это позволяет понять, какая именно часть полной энергии описывается параметрически, т.е. считается внутренней энергией.

Любую 1-форму можно записать в виде суммы двух слагаемых, одно из которых является точной 1-формой. Для того чтобы выделить внешнюю производную в правой части (28), перепишем последнее слагаемое в виде:

$$2(\operatorname{div} D)_\alpha = \left(v_{;\alpha\beta}^\beta + v_{\alpha;\gamma\beta} \delta^{\beta\gamma} \right) = \left(v_{;\beta\alpha}^\beta - v^\beta R_{\beta\alpha} + v_{\alpha;\beta}^\beta \right)$$

или в бескоординатной форме

$$2\operatorname{div} D = (d(\operatorname{div} \vec{v}) - R(\vec{v}) + \square \vec{v}).$$

Здесь $\square$ — оператор Даламбера, а R — тензор Риччи. Пользуясь этим выражением, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\ell} &= d \underbrace{\left(\frac{\pi}{\rho} - \frac{\kappa}{\rho} + \eta \operatorname{div} \vec{v} \right)}_{\equiv H} + \underbrace{\left(-\pi d \left(\frac{1}{\rho} \right) + \eta (\square \vec{v} - R(\vec{v})) \right)}_{\equiv \tilde{f}} = \\ &= dH + \tilde{f}. \end{aligned} \quad (29)$$

По аналогии с трехмерной гидромеханикой величину H будем называть *интегралом Бернулли*. Уравнение (29) представляет собой четырехмерный вариант записи уравнения движения в *форме Лэмба* (см., например, [14]).

Теперь в силу уравнения (29) и тождества $d(dH) = 0$ найдем, что 2-форма $d\tilde{\ell}$ удовлетворяет равенству

$$d\tilde{\ell} = d\tilde{f}, \quad (30)$$

которое будем называть четырехмерным *уравнением вихря*. Для несжимаемой идеальной среды величина $\tilde{f} \equiv 0$, а уравнение вихря приводится к виду

$$d\tilde{\ell} = 0$$

или

$$\ell_{\alpha;\beta} - \ell_{\beta;\alpha} = 0.$$

3.2.2 Система уравнений второго уровня.

Теперь займемся выводом уравнений второго уровня механики континуума (подробнее см. в [7]).

1. Определения меры M и ее плотности остаются прежними (см. уравнения (3) и (5)).
2. Четырехмерное векторное поле $\vec{d}$ определим так, что

$$\operatorname{div} \vec{d} = \rho. \quad (31)$$

Это векторное поле будем называть *M-индукцией*.

3. В силу уравнения неразрывности, записанного в терминах дифференциальных форм

$$d(*(\rho \vec{v})) = 0,$$

где $*$ — оператор звездочка Ходжа, можно определить 2-форму $\tilde{h}$ такую, что локально (см., например, [15])

$$d\tilde{h} = *(\rho \vec{v}). \quad (32)$$

Эту 2-форму назовем *напряженностью поля вихря*.

4. С помощью представления (29) 1-формы Лэмба $\tilde{\ell} = dH + \tilde{f}$ можно определить 1-форму $\tilde{\xi} \equiv \tilde{\ell} - \tilde{f}$ такую, что

$$d\tilde{\xi} = 0. \quad (33)$$

Это уравнение есть уравнение вихря (30).

5. Рассмотрим, наконец, баланс энергии и соответствующее уравнение второго уровня. С помощью определений $\tilde{\xi}$ и H можно записать:

$$\tilde{\xi} = dH = d\frac{\pi}{\rho} - d\frac{\kappa}{\rho} + d(\eta \operatorname{div} \vec{v}).$$

Отсюда получаем выражение для градиента величины $\frac{\kappa}{\rho}$

$$d\frac{\kappa}{\rho} = d\left(\frac{\pi}{\rho} + \eta \operatorname{div} \vec{v}\right) - \tilde{\xi}.$$

Градиент полной энергии теперь записывается в виде:

$$d\left(\frac{\kappa}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\rho}\right) = d\left(\frac{\pi}{\rho} + \eta \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\varepsilon}{\rho}\right) - \tilde{\xi} = d\mathcal{H} - \tilde{\xi}.$$

Последнее равенство выполняется в силу соотношения $d\frac{\varepsilon}{\rho} = -d\frac{\kappa}{\rho}$, которое имеет место, поскольку $\frac{\kappa+\varepsilon}{\rho} = 1$. Значение левой части предыдущего выражения на векторе $\rho\vec{v}$ равно нулю в силу закона сохранения (15). В свою очередь, значение правой части на том же векторе дает уравнение, которое является иной формой закона сохранения полной энергии:

$$(dH - \tilde{\xi})(\rho\vec{v}) = 0. \quad (34)$$

Это уравнение можно переписать в более удобной форме. Сделаем замену $\rho\vec{v} = *\tilde{d}\mathbf{h}$ и запишем

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (H_{,\alpha} h_{\beta\gamma,\delta} - \xi_{\alpha} h_{\beta\gamma,\delta}) = \\ &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\underbrace{(H_{,\alpha} - \xi_{\alpha})}_{=0} h_{\beta\gamma} \right)_{,\delta} - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (H_{,\alpha} - \xi_{\alpha})_{,\delta} h_{\beta\gamma} = \\ &= d\xi(*\mathbf{h}), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — четырехиндексный символ Леви-Чивиты. Последнее равенство выполняется в силу $d(d(H)) = 0$.

Уравнения (31)–(33) образуют систему уравнений *второго уровня* механики континуума. Их связь с уравнениями первого уровня очевидна: уравнение (32) следует из уравнения неразрывности (6), уравнение движения (20) или его производные (28), (29) порождают уравнение (33), а уравнение (35) соответствует уравнению баланса полной энергии (15). Последнее уравнение (31) — определение.

Система содержит 11 скалярных уравнений относительно 19 неизвестных $(\rho, \vec{v}, \vec{d}, \tilde{\xi}, \mathbf{h})$. Для замыкания системы необходимы некоторые дополнительные (материальные) соотношения. Они следуют из закона тяготения Ньютона и закона Ома. В отличие от системы уравнений (9), (20) и (22), предполагающей существование ненулевой меры, система (31)–(33) имеет смысл и в случае $\rho = 0$.

4. Интерпретации механики континуума

Общий случай механики континуума можно интерпретировать, как минимум, двояко. Каждая интерпретация традиционно имеет дело главным образом с одним из представленных уровней описания.

Во-первых, можно рассматривать гидромеханическую интерпретацию и считать меру M массой физического тела. Это дает два эквивалентных четырехмерных описания механики континуума. Первый уровень (уравнения (6), (20), (22) и, например, (23)) был предложен в [4]. Уравнения второго уровня (четырёхмерное уравнение вихря (33) и три других уравнения (31), (32) и (35)), а также их интерпретация были рассмотрены в [7].

Во-вторых, можно предложить электромагнитную интерпретацию, в которой мера M заряженного физического тела считается электрическим зарядом q с плотностью ρ_e . Такая интерпретация теории первого уровня дает уравнение неразрывности для зарядов $\operatorname{div}(\rho_e \vec{\tau}) = 0$ (ср. с уравнением (6)) и уравнение

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla \varphi,$$

где $\vec{E}$ — напряженность электрического поля, а $\vec{A}$ и φ — векторный и скалярный потенциалы. Второй уровень описания механики континуума соответствует теории электромагнитного поля.

Классические варианты всех этих физических теорий трехмерны и могут быть получены как интерпретации частных случаев общей теории континуума. Такие частные случаи включают, например, дополнительные предположения относительно скорости сигнала ($s = \infty$ или $s = \text{const}$), вязкости или сжимаемости. Случай $s = \infty$ в рамках теории первого уровня соответствует классической механике жидкости. Система уравнений теории второго уровня вместе с допущением $s = c = \text{const}$, где c — скорость света, эквивалентна уравнениям Максвелла (см. [7]).

4.1. Гидродинамическая интерпретация

4.1.1 Силы и искривленность мировых линий

Мировая линия, не параллельная мировой линии наблюдателя, ассоциируется с точкой тела, движущейся относительно наблюдателя. Если эта мировая линия отлична от прямой, то движение неравномерно. Рассмотрим причины, порождающие неравномерное движение. Будем называть величину x_*

$$x_* = \frac{\int_{V(\mathcal{B}_t)} \rho x dV}{\int_{V(\mathcal{B}_t)} \rho dV} = \frac{1}{M(\mathcal{B}_t)} \int_{V(\mathcal{B}_t)} \rho x dV.$$

центром масс конфигурации $\mathcal{B}_t$. Кривая $x_*(t)$ является мировой линией центра масс. Ее кривизна характеризует среднюю кривизну мировой трубки тела и до некоторой степени кривизну мировых линий.

Причины, вызывающие искривление мировой линии центра масс, будем называть *внешними факторами*. Преобразование координат, выпрямляющее мировую линию центра масс, аннулирует действие внешних факторов на мировые линии всех точек тела. Все остальные причины, искривляющие мировые линии точек тела и не влияющие на мировую линию центра масс, будем называть *внутренними факторами*.

Кривизна мировых линий, связанная с ускорением движущихся частиц, традиционно объясняется взаимодействием тела с окружающей средой и описывается с помощью понятий *массовых сил* f_B и *контактных сил* f_S . В этих терминах основной закон динамики формулируется следующим образом (см., например, [22]):

$$d_t(M dx_*) = \int_{V(\mathcal{B}_t)} \rho d_t \vec{v} dV = f_B + f_S.$$

Величина в скобках в левой части называется импульсом тела $\mathcal{B}$ и является вектором, касательным к кривой $x_*(t)$. Массовые силы ассоциируются с внешними факторами, а контактные силы — с внутренними.

4.1.2 Внутренние факторы (контактные силы)

Учет внутренних факторов осуществляется путем выбора структуры тензора вязких напряжений $\mathbf{T}'$. Сам тензор $\mathbf{T}'$ — результат разделения движений среды на крупно- и мелкомасштабные.

Если $\mathbf{T}' = \mathbf{O}$, т.е. тензор вязких напряжений равен нулевому тензору, то модель среды называется *идеальной*. Тензор напряжений в этом случае есть

$$\mathbf{T} = \pi \mathbf{g}^{-1} = \pi g_0^{-1} \mathbf{I} \equiv -p \mathbf{I}. \quad (36)$$

Функция p , называемая *давлением* и связана с кривизной пространства-времени (см. ниже п. 4.1.3).

Напротив, если $\mathbf{T}' = 2\rho\chi\mathbf{D}$, модель среды называется вязкой. Тогда тензор напряжений таков:

$$\mathbf{T} = \pi \mathbf{g}^{-1} + 2\rho\chi\mathbf{D} = -p \mathbf{I} + 2\mu g_0 \mathbf{D}. \quad (37)$$

Тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$ является симметричной частью градиента 4-скорости, а коэффициент динамической вязкости $\mu \equiv g_0^{-1}\rho\chi$ — положителен. Заметим, что если g_0 определяется выражением (11), то $\chi < 0$ в силу того, что $g_0 < 0$, а $\mu > 0$.

4.1.3 Давление и кривизна пространства-времени

Для того чтобы найти геометрический смысл величины π и связанного с ней давления, рассмотрим общий случай вязкой жидкости. С помощью определения (37) уравнение (20) можно записать в виде:

$$((\mathbf{M} - 2\chi\mathbf{D})^{\alpha\beta} - \mathbf{g}^{\alpha\beta}\pi)_{;\alpha} = 0. \quad (38)$$

Уже упоминалось, что если интерпретировать симметричный тензор $\frac{1}{2}\mathbf{M} - \chi\mathbf{D}$ как *тензор Риччи* $\mathbf{R}$, а скаляр π — как скалярную кривизну R пространства-времени, тогда предыдущее уравнение становится хорошо известным *тождеством Бьянки* для тензора Риччи (см., например, [17])

$$\left(\mathbf{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\alpha\beta} R \right)_{;\alpha} = 0.$$

Поскольку свертка $\frac{1}{2}\mathbf{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{M} - 2\chi\mathbf{D})^{\alpha\beta}$, записанная в терминах компонент метрического тензора, дает правильное выражение для скалярной кривизны, подобная интерпретация возможна. Действительно, в силу определения тензор Риччи можно записать в виде:

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = (\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^{\alpha}) + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}), \quad (39)$$

где $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}h^{\alpha\lambda}(h_{\lambda\gamma,\beta} + h_{\lambda\beta,\gamma} - h_{\beta\gamma,\lambda})$ — символы Кристоффеля, а $\mathbf{h}$ — некоторый метрический тензор. Пусть $\mathbf{h} = h_0 \mathbf{I}$, а u_{α} обозначает $\frac{1}{h_0}h_{0,\alpha}$. С помощью соотношений $u_{\nu,\mu} = u_{\nu;\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}u_{\alpha}$ тензор Риччи записывается так:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}u_{\mu}u_{\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{h}_{\mu\nu}u^{\alpha}u_{\alpha} - \frac{1}{2}(u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu}) - \frac{1}{2}\mathbf{h}_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}u_{\alpha,\beta} = \\ &= -\frac{1}{2}u_{\mu}u_{\nu} + \frac{1}{2}\mathbf{h}_{\mu\nu}u^{\alpha}u_{\alpha} - \frac{1}{2}(u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu}) - \frac{1}{2}\mathbf{h}_{\mu\nu}u^{\alpha}_{;\alpha}. \end{aligned} \quad (40)$$

Скалярная кривизна R

$$\begin{aligned} R = h^{\mu\nu}\mathbf{R}_{\mu\nu} &= -\frac{3}{2}u^{\alpha}u_{\alpha} - h^{\mu\nu}u_{\mu;\nu} = \\ &= \frac{3}{2}u^{\alpha}u_{\alpha} - 3u^{\alpha}_{;\alpha}. \end{aligned} \quad (41)$$

В свою очередь, сворачивая $(\mathbf{M} - 2\eta\mathbf{D})$ с метрическим тензором, найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{M} - 2\eta\mathbf{D})^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\rho v^{\alpha}v_{\alpha} - \eta v^{\alpha}_{;\alpha} = \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{\eta}{3}v^{\alpha}\right)\left(\frac{\rho}{\eta}v_{\alpha}\right) - 3\left(\frac{\eta}{3}v^{\alpha}\right)_{;\alpha}. \end{aligned}$$

Переопределяя вектор скорости $\vec{u} \equiv \frac{\eta}{3}\vec{v}$ и метрический коэффициент $h_0 \equiv \frac{3\rho}{\eta^2}g_0$, получим требуемый результат.

В классическом пределе $s \rightarrow \infty$ диагональные компоненты метрики $g^{\alpha\alpha} = g_0^{-1} \rightarrow -\infty$ и, поскольку давление $p = -\pi g_0^{-1}$ произвольно, величина π , т.е. скалярная кривизна, стремится к нулю $R \rightarrow 0$. Это случай стандартной гидромеханики, пространство-время которой плоско. Напротив, пространство-время причинно-обусловленной модели не плоско по определению, и давление до некоторой степени отражает e

4.1.4 Внешние факторы (массовые силы).

Внешние факторы, рассматриваемые в контексте механики сплошной среды, обычно связываются с действием гравитационного поля. Его можно учесть тремя способами, приводящими к одному и тому же результату. Так, можно указать дополнительное изменение любой из следующих величин:

1. плотности кинетической энергии: $\hat{\kappa} = \kappa + \boxed{\rho\phi}$,
2. ускорения: $\rho d_t \vec{v} = \text{div} \mathbf{T} + \boxed{\rho \vec{b}}$,
3. скорости сигнала: $(\hat{s})^2 = s^2 - \boxed{\sigma^2}$.

Величина ϕ есть *потенциал гравитационного поля*, $\rho\phi$ называется плотностью *потенциальной энергии*, а сумма $(\kappa + \rho\phi)$ — плотностью *механической энергии*. Вектор $\rho \vec{b}$ известен как плотность *массовой силы*. Следует иметь в виду, что величины $\frac{\kappa}{\rho}$, $\frac{\varepsilon}{\rho}$ и ϕ являются безразмерными, поскольку модуль 4-скорости здесь безразмерен. Напротив, в стандартной гидромеханике модуль 3-скорости — величина размерная.

Связь утверждений 1 и 2. В соответствии с определением кинетической энергии (10) имеем:

$$\frac{\hat{\kappa} + \varepsilon}{\rho} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\kappa + \varepsilon}{\rho} + \phi = \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Это выражение вместе с уравнением неразрывности (6) приводит к цепочке равенств:

$$\begin{aligned} 0 = \text{div}(\kappa + \varepsilon + \rho\phi)\vec{v} &= \rho d_t \left(\left(\frac{\kappa}{\rho} + \phi \right) + \frac{\varepsilon}{\rho} \right) = \\ &= \underbrace{\rho d_t \left(\frac{\kappa}{\rho} + \phi \right)}_{=d_t \pi} + \underbrace{\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho}}_{=-d_t \pi}. \end{aligned} \quad (43)$$

Первое слагаемое, обозначенное $d_t \pi$, используется далее для получения уравнения движения. Действительно, имеют место следующие импликации:

$$\begin{aligned} \rho d_t \left(\frac{\kappa}{\rho} + \phi \right) - d_t \pi = 0 &\quad \Rightarrow \quad v^\alpha (\rho g_{\alpha\beta} d_t v^\beta + \rho \phi_{,\alpha} - \pi_{,\alpha}) = 0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \rho d_t v^\beta = -\rho g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} + g^{\alpha\beta} \pi_{,\alpha}. \end{aligned}$$

Вводя обозначение $-g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \equiv b^\beta$ и пользуясь (36), получим утверждение 2.

Связь между утверждениями 1 и 3. Определим ϕ в утверждении 1 равенством $\varphi = \frac{1}{2}g_0\sigma^2$, где σ — произвольная гладкая функция с размерностью скорости. Из первого утверждения с помощью определения длины вектора скорости (7) получим

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 = 2 \frac{\hat{\kappa} + \varepsilon}{\rho} = 2 \left(\frac{\kappa}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\rho} + \phi \right) &= g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + 2 \frac{\varepsilon}{\rho} + 2\phi = \\ &= g_0 (v^\alpha)^2 + g_0 \sigma^2 + 2 \frac{\varepsilon}{\rho} = \\ &= g_0 (-s^2 + (v^n)^2 + \sigma^2) + 2 \frac{\varepsilon}{\rho}, \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta = 0, \dots, 3$, а $n = 1, 2, 3$. Это дает новое выражение для метрического коэффициента:

$$g_0 = \frac{|\vec{v}|^2 - 2\frac{\varepsilon}{\rho}}{-(s^2 - \sigma^2) + v^n v^n}.$$

Будем интерпретировать σ как ту часть скорости сигнала, значения которой определяются внешними факторами, тогда как значения оставшейся части $\sqrt{s^2 - \sigma^2}$ — внутренними. Напомним, что $|\vec{v}| = \text{const}$.

Если *потенциал гравитационного поля* обозначить через ϕ , то уравнение движения среды (38) в гравитационном поле запишется в виде

$$((M - 2\chi D)^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\pi)_{;\alpha} = -\rho g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}.$$

Вводя в рассмотрение плотность *массовой силы* $\rho\vec{b}$ с компонентами $\rho b^\beta \equiv -\rho g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}$, то же уравнение можно записать так:

$$\rho d_t \vec{v} = \text{div} T + \rho \vec{b}.$$

Оба уравнения согласуются с законом тяготения Ньютона.

4.2. Электромагнитная интерпретация. Уравнения Максвелла

Продemonстрируем теперь электромагнитную интерпретацию частного случая ($s = \text{const}$) уравнений (31)–(33); подробности см. в [7].

1. Сохраняющуюся меру здесь обозначим через q и назовем *электрическим зарядом*.¹¹ Его плотность будем обозначать через ρ_e (ср. с уравнением (5))

$$q(\mathcal{B}_t) = \int_{V(\mathcal{B}_t)} \rho_e dV.$$

2. Плотность электрического заряда порождает векторное поле *электрической индукции* $\vec{D}$ такое, что

$$(\nabla, \vec{D}) \equiv \rho_e. \quad (44)$$

Это выражение известно как *закон Гаусса для $\vec{D}$* .

3. Сохранение заряда q порождает уравнение неразрывности электрических зарядов

$$\partial_t \rho_e + (\nabla, \rho_e \vec{u}) = 0. \quad (45)$$

Оно следует из четырехмерного уравнения неразрывности при $v^0 = \text{const}$. В трехмерном случае уравнение (32) можно записать в обычном виде *закона Ампера*. Действительно, с помощью (44) уравнение (45) преобразуется к виду

$$(\nabla, \partial_t \vec{D} + \rho_e \vec{u}) = 0,$$

откуда следует закон Ампера, поскольку $(\nabla, \nabla \times \vec{H}) = 0$ для произвольного векторного поля $\vec{H}$

$$\partial_t \vec{D} + \rho_e \vec{u} = \nabla \times \vec{H}. \quad (46)$$

Векторное поле $\vec{H}$ называется полем *магнитной напряженности*. Легко видеть, что тензор $*\tilde{h}$ в выражении (32) соответствует известному $\binom{2}{0}$ тензору Фарадея F (см., например, [15])

$$F = \begin{pmatrix} 0 & v^0 D^1 & v^0 D^2 & v^0 D^3 \\ -v^0 D^1 & 0 & H^3 & -H^2 \\ -v^0 D^2 & -H^3 & 0 & H^1 \\ -v^0 D^3 & H^2 & -H^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹¹Если рассматривать физические заряды разных знаков, математическую меру, положительную по определению, следует заменить математическим понятием заряда (см., например, [21]).

4. Вводя обозначение $\vec{B} \equiv \vec{\omega}$, уравнение (27) можно записать в виде *закона Гаусса для $\vec{B}$*

$$(\nabla, \vec{B}) \equiv 0, \quad (47)$$

где $\vec{B}$ называется *магнитной индукцией*.

5. Последний в теории *закон Фарадея* есть уравнение (33), записанное в новых обозначениях ($\vec{B} \equiv \vec{\omega}$, $\vec{E} \equiv \vec{\zeta}$; здесь $\vec{E}$ — *поле электрической напряженности*)

$$\partial_t \vec{B} + \nabla \times \vec{E} = 0. \quad (48)$$

Таким образом, получены все уравнения теории Максвелла. Именно, уравнения (44), (46), (47) и (48) образуют систему уравнений теории электромагнитного поля. Закон сохранения энергии (35) соответствует уравнению баланса электромагнитной энергии в форме уравнения Пойнтинга:

$$\frac{1}{2} \left((\vec{D}, \partial_t \vec{E}) + (\vec{H}, \partial_t \vec{B}) \right) + (\nabla, \vec{E} \times \vec{H}) + (\vec{j}, \vec{E}) = 0.$$

Материальные уравнения, требующиеся для замыкания системы уравнений, соответствуют хорошо известным соотношениям электромагнитной теории $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ и $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$, где ε_0 — диэлектрическая постоянная, μ_0 — магнитная постоянная, а векторы поляризации $\vec{P}$ и намагничивания $\vec{M}$ либо известны, либо определены дополнительными соотношениями. Последнее материальное уравнение, замыкающее систему, — закон Ома $\sigma \vec{E} = \vec{j}$, где σ — электрическая проводимость, а $\vec{j}$ — плотность тока.

4.3. Частные случаи и их интерпретации

4.3.1 Теория первого уровня: частный случай $s = \text{const}$

С помощью гипотезы сплошности физическое тело можно трактовать как сплошную среду. Меры m и V интерпретируются как масса и объем конфигурации тела. В этом случае величина ρ есть плотность массы, вектор $\vec{v}$ — скорость среднего движения точек тела, а тензор D — известный тензор скоростей деформации.

Процедура осреднения, так же как вектор скорости, внутренняя энергия и коэффициент вязкости, могут быть интерпретированы по-разному в зависимости от пространственно-временных масштабов изучаемого явления. Так, можно рассматривать либо ламинарный поток, когда e и μ имеют обычный физический смысл плотности внутренней энергии и коэффициента динамической вязкости, либо турбулентное течение, где e обозначает плотность турбулентной энергии, а μ — коэффициент турбулентной вязкости. В последнем случае вектор $\vec{v}$ интерпретируется как средняя скорость турбулентного потока.

В зависимости от выбора тензора напряжений T уравнения (9), (??) и (24), замкнутые некоторым уравнением состояния, образуют систему уравнений причинно-обусловленной механики среды (идеальной, вязкой или турбулентной).

4.3.2 Теория второго уровня: 4D уравнение вихря

Обобщенное полевое описание движения среды необычно для гидромеханики, хотя и возможно. Как было указано, уравнения (31), (32), четырехмерное уравнение вихря (33) и (35) образуют систему полевых уравнений, описывающих диссипативное движение континуума. Ее следует замкнуть с помощью дополнительных соотношений. Одно из таких соотношений может быть получено с помощью гравитационного закона Ньютона. Рассмотрим уравнение движения, записанное в виде (см. уравнение (29) и определение $\tilde{\xi}$)

$$\vec{\xi} = g^{-1} (d\mathcal{H}), \quad (49)$$

и вычислим дивергенцию обеих его частей. Получим

$$\operatorname{div} \vec{\xi} = g^{\alpha\beta} \mathcal{H}_{,\alpha\beta} = \square \mathcal{H} = \gamma \rho, \quad (50)$$

где γ — гравитационная постоянная. Последнее равенство выполняется в силу гравитационного закона Ньютона. Сравнивая уравнение (50) с определением $\vec{d}$ (31), найдем соответствие

$$\vec{d} \equiv \frac{1}{\gamma} \vec{\xi}. \quad (51)$$

Заметим, что линейность этого уравнения является не особенностью теории, а связана с дополнительным внешним допущением, а именно, гравитационным законом Ньютона с $\gamma = \text{const}$. Соотношение (51) уменьшает на четыре число неизвестных. В следующих параграфах рассматриваются некоторые другие замыкающие соотношения.

4.3.3 Теория второго уровня: частный случай $s = \text{const}$

Для простоты все дальнейшее рассмотрение проводится в декартовых координатах и соответствующем координатном базисе.

Четырехмерная 2-форма вихря и трехмерный вектор вихря Сначала рассмотрим 2-форму вихря $\tilde{\omega}$ и уравнение (27). Поскольку $v^0 = \text{const}$, можно записать:

$$\begin{aligned} 2\tilde{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 & -v_{1,0} & -v_{2,0} & -v_{3,0} \\ v_{1,0} & 0 & v_{1,2} - v_{2,1} & v_{1,3} - v_{3,1} \\ v_{2,0} & v_{2,1} - v_{1,2} & 0 & v_{2,3} - v_{3,2} \\ v_{3,0} & v_{3,1} - v_{1,3} & v_{3,2} - v_{2,3} & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 0 & -v_{1,0} & -v_{2,0} & -v_{3,0} \\ v_{1,0} & 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ v_{2,0} & \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ v_{3,0} & -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь было использовано определение трехмерного вектора вихря $\vec{\omega}$:

$$v_{i,j} - v_{j,i} \equiv \varepsilon_{jik} \omega^k. \quad (52)$$

Отсюда получаем связь между компонентами 2-формы $\tilde{\omega}$ и компонентами вектора $\vec{\omega}$. Величина ε_{ijk} — трехиндексный символ Леви-Чивиты. Внешняя производная $2d\tilde{\omega}$ является нулевой 3-формой. Действительно, вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} 2d\tilde{\omega} &= -(\nabla, \vec{\omega}) dx^{123} + ((v_{3,2} - v_{2,3})_{,0} - \omega_{,0}^1) dx^{023} - \\ &\quad - ((v_{1,3} - v_{3,1})_{,0} - \omega_{,0}^2) dx^{013} + ((v_{2,1} - v_{1,2})_{,0} - \omega_{,0}^3) dx^{012} = 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее используется сокращение $dx^{\alpha\beta\gamma} \equiv dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma$. Последние три компоненты совпадают с частными производными по времени от компонент определения (52). Первая компонента равна нулю в силу того же определения

$$(\nabla, \vec{\omega}) = 0. \quad (53)$$

Четырехмерная 1-форма Лэмба и ее трехмерный аналог. Рассмотрим трехмерный вариант уравнения движения (29). С помощью определения (52) k -я компонента 1-формы Лэмба может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \ell_k &= 2v^\alpha \mathbf{w}_{k\alpha} = \partial_t v_k + 2v^n \mathbf{w}_{kn} = \partial_t v_k + \varepsilon_{kni} v^n \omega^i = \\ &= \partial_t v_k + (\vec{\omega} \times \vec{v})_k = \partial_t v_k + l_k. \end{aligned} \quad (54)$$

Величина $\vec{l} \equiv \vec{\omega} \times \vec{u}$ известна как *вектор Лэмба*. Здесь и далее вектор $\vec{u}$ обозначает три непостоянных компоненты вектора скорости $\vec{v} \equiv (v^0, \vec{u})$. Выражение (54) позволяет записать уравнение движения (29) в виде

$$\ell_k \stackrel{(54)}{=} \partial_t v_k + l_k \stackrel{(29)}{=} \mathcal{H}_{,k} + f_k \Rightarrow \partial_t v_k + (l_k - f_k) = \mathcal{H}_{,k}$$

или

$$\partial_t \vec{u} + \vec{\zeta} = \mathbf{g}_3^{-1}(\nabla \mathcal{H}), \quad (55)$$

где $\vec{\zeta} \equiv \vec{l} - \vec{f}_3 = (\vec{\omega} \times \vec{u}) - \vec{f}_3$, $\mathbf{g}_3$ — трехмерный (пространственный) метрический тензор, $\vec{l} = \mathbf{g}_3^{-1}(\tilde{l})$, $\vec{f}_3 = \mathbf{g}_3^{-1}(\tilde{f}_3)$ и $\tilde{f} = (f_0, \tilde{f}_3)$. Когда $\vec{f}_3$ равно нулю (жидкость невязкая и несжимаемая) последнее уравнение преобразуется в известную *форму Громеки-Лэмба уравнения движения идеальной жидкости*

$$\partial_t \vec{u} = -\vec{l} - \mathbf{g}_3^{-1}(\nabla \mathcal{H}).$$

Индукция и поляризация. Поскольку определение (31) не описывает векторное поле $\vec{d}$ единственным образом, его можно выбрать так, что $\vec{d} \equiv (d^0, \vec{d}_3)$, где $d^0 = \text{const}$, а $\vec{d}_3$ есть трехмерный вектор такой, что

$$\text{div} \vec{d} = (\nabla, \vec{d}_3) = \rho. \quad (56)$$

В силу определения (56), материального уравнения (51) и соотношений $\xi^n = \partial_t v^n + \zeta^n$ (следующих из (54) и определений $\vec{\xi}$ и $\vec{\zeta}$) имеют место равенства:

$$\rho = \begin{cases} d_{,\alpha}^\alpha = \frac{1}{\gamma}(\xi_{,0}^0 + \xi_{,n}^n) = \frac{1}{\gamma} \left(\xi_{,0}^0 + (\zeta^n + \partial_t v^n)_{,n} \right), \\ d_{3,n}^n = \frac{1}{\gamma} \zeta_{,n}^n + \frac{1}{\gamma} (\xi_{,0}^0 + \partial_t v_{,n}^n), \end{cases}$$

которые дают, с точностью до произвольного трехмерного бездивергентного вектора, связь между двумя трехмерными векторами $\vec{d}_3$ и $\vec{\zeta}$:

$$\vec{d}_3 = \frac{1}{\gamma} \vec{\zeta} + \vec{P}. \quad (57)$$

По определению $P_{,n}^n \equiv \frac{1}{\gamma} (\xi_{,0}^0 + \partial_t v_{,n}^n)$. По аналогии с теорией электромагнитного поля векторы $\vec{d}_3$ и $\vec{P}$ можно назвать трехмерной *m-индукцией* и *поляризацией* соответственно.

Структура напряженности поля вихря. Определим теперь 2-форму $\tilde{h} = h_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ так, чтобы уравнение (32) выполнялось. В этом случае внешняя производная $d\tilde{h}$ запишется в виде:

$$\begin{aligned} d\tilde{h} &= \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\gamma} dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \\ &= (h_{01,2} + h_{12,0} + h_{20,1}) dx^{012} + (h_{01,3} + h_{13,0} + h_{30,1}) dx^{013} + \\ &\quad + (h_{02,3} + h_{23,0} + h_{30,2}) dx^{023} + (h_{12,3} + h_{23,1} + h_{31,2}) dx^{123}. \end{aligned}$$

Выражение для 3-формы $*(\rho \vec{v})$ имеет вид:

$$*(\rho \vec{v}) = \rho v^0 dx^{123} - \rho v^1 dx^{023} + \rho v^2 dx^{013} - \rho v^3 dx^{012}.$$

Подставив все это в уравнение (32), найдем

$$\rho v^0 = h_{12,3} + h_{23,1} + h_{31,2}, \quad (58)$$

$$-\rho v^1 = (h_{02,3} - h_{03,2}) + h_{23,0}, \quad (59)$$

$$-\rho v^2 = (h_{03,1} - h_{01,3}) + h_{31,0}, \quad (60)$$

$$-\rho v^3 = (h_{01,2} - h_{02,1}) + h_{12,0}. \quad (61)$$

Для того чтобы понять, что означает этот результат, рассмотрим трехмерный вариант уравнения неразрывности (9). При $v^0 = \text{const}$ оно приобретает свой стандартный вид

$$\partial_t \rho + (\nabla, \rho \vec{u}) = 0. \quad (62)$$

С помощью уравнения (56) можно записать

$$(\nabla, \partial_t \vec{d}_3 + \vec{j}) = 0,$$

откуда следует существование трехмерного векторного поля $\vec{\eta}$ такого, что

$$\partial_t \vec{d}_3 + \vec{j} = \nabla \times \vec{\eta}. \quad (63)$$

Здесь $\vec{j} \equiv \rho \vec{u}$.

Сравнивая уравнения (56) с (58), а (63) — с (59)–(61), найдем соответствия:

$$\begin{aligned} h_{01} &= \eta^1, & h_{23} &= v^0 d_3^1, \\ h_{02} &= \eta^2, & h_{13} &= -v^0 d_3^2, \\ h_{03} &= \eta^3, & h_{12} &= v^0 d_3^3. \end{aligned}$$

Матрица же 2-формы $\tilde{h}$ в координатном базисе имеет вид:

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} 0 & \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ -\eta^1 & 0 & v^0 d_3^3 & -v^0 d_3^2 \\ -\eta^2 & -v^0 d_3^3 & 0 & v^0 d_3^1 \\ -\eta^3 & v^0 d_3^2 & -v^0 d_3^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Четырехмерное уравнение вихря и его трехмерный аналог. Рассмотрим уравнение вихря (33). Поскольку координата x^0 мнимая, матрица $\xi_{\alpha, \beta} - \xi_{\beta, \alpha}$ 2-формы $d\tilde{\xi}$, записанная в координатном базисе, содержит вещественные ($\alpha = j, \beta = k$) и мнимые ($\alpha = 0, \beta = k$), ($\alpha = j, \beta = 0$) подматрицы, каждая из которых имеет три независимых компоненты.

1. Сначала рассмотрим вещественные компоненты четырехмерного уравнения вихря (33):

$$\begin{aligned} 0 = \xi_{k,j} - \xi_{j,k} &= 2 \underbrace{((v^0 \mathbf{w}_{k0})_{,j} - (v^0 \mathbf{w}_{j0})_{,k})}_{\partial_t \mathbf{w}_{kj}} \\ &\quad + 2((v^n \mathbf{w}_{kn})_{,j} - (v^n \mathbf{w}_{jn})_{,k}) - (f_{k,j} - f_{j,k}) \\ &= \varepsilon_{kji} \left(\partial_t \vec{\omega} + \nabla \times \left((\vec{\omega} \times \vec{u}) - \vec{f}_3 \right) \right)^i. \end{aligned}$$

Последнее выражение дает трехмерное уравнение вихря:

$$\partial_t \vec{\omega} + \nabla \times \vec{\zeta} = 0. \quad (65)$$

2. Теперь рассмотрим мнимые компоненты уравнения (33). Принимая во внимание уравнение (51), можно записать:

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{0,j} - \xi_{j,0} = \gamma(d_{0,j} - d_{j,0}) = \gamma(d_{0,j} - (\tilde{d}_3 + \tilde{\delta})_{j,0}), \\ \delta_{j,0} &\equiv d_{0,j} - \frac{1}{v^0} \partial_t (\tilde{d}_3)_j \end{aligned}$$

или

$$\partial_t (\tilde{d}_3)_j + v^0 (\delta_{j,0} - d_{0,j}) = 0.$$

В силу уравнения (63) последнее выражение можно заменить следующим:

$$\left(\partial_t \vec{d}_3 + \vec{j} - \nabla \times \vec{\eta} \right)_j = 0.$$

Здесь и далее для сокращения записи вместо $(\mathbf{g}(\vec{a}))_j$ пишется $(\vec{a})_j$. Таким образом, мнимые компоненты уравнения (33) приобретают вид:

$$0 = \xi_{0,j} - \xi_{j,0} = -\frac{\gamma}{v_0} \left(\partial_t \vec{d}_3 + \vec{j} - \nabla \times \vec{\eta} \right)_j. \quad (66)$$

или, используя (57),

$$0 = \xi_{0,j} - \xi_{j,0} = -\frac{\gamma}{v_0} \left(\partial_t \left(\frac{1}{\gamma} \vec{\zeta} + \vec{P} \right) + \vec{j} - \nabla \times \vec{\eta} \right)_j.$$

3. В итоге левый нижний треугольник результирующей антисимметричной матрицы записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{антисимметричные} & & \\ \frac{\gamma}{v_0} \left(\partial_t \vec{d}_3 + \vec{j} - \nabla \times \vec{\eta} \right)_1 & 0 & \text{компоненты} & \\ \frac{\gamma}{v_0} \left(\partial_t \vec{d}_3 + \vec{j} - \nabla \times \vec{\eta} \right)_2 & (\partial_t \vec{\omega} + \nabla \times \vec{\zeta})_3 & 0 & \\ \frac{\gamma}{v_0} \left(\partial_t \vec{d}_3 + \vec{j} - \nabla \times \vec{\eta} \right)_3 & -(\partial_t \vec{\omega} + \nabla \times \vec{\zeta})_2 & (\partial_t \vec{\omega} + \nabla \times \vec{\zeta})_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Плотность тока и намагниченность. Теперь рассмотрим частную производную по времени от вектора Лэмба $\vec{l}$. Учитывая уравнение движения (55) и уравнение вихря (65), можно записать

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{l} = \partial_t (\vec{\omega} \times \vec{u}) &= \partial_t \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times \partial_t \vec{u} = \\ &= -(\nabla \times \vec{\zeta}) \times \vec{u} - \vec{\omega} \times (\vec{\zeta} - \mathbf{g}_3^{-1}(\nabla \mathcal{H})). \end{aligned} \quad (67)$$

Чтобы придать этому уравнению желаемую форму, извлечём вихрь из первого слагаемого в правой части. Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\nabla(\vec{u}, \vec{\zeta}) = \begin{cases} \underbrace{\nabla(\vec{u}, \vec{\omega} \times \vec{u})}_{=0} - \nabla(\vec{u}, \vec{f}_3), \\ (\vec{u}, \nabla) \vec{\zeta} + (\vec{\zeta}, \nabla) \vec{u} + \vec{u} \times (\nabla \times \vec{\zeta}) + \vec{\zeta} \times (\nabla \times \vec{u}). \end{cases}$$

Они позволяют выразить первое слагаемое в правой части уравнения (67):

$$(\nabla \times \vec{\zeta}) \times \vec{u} = (\vec{u}, \nabla) \vec{\zeta} + (\vec{\zeta}, \nabla) \vec{u} + \vec{\zeta} \times \vec{\omega} + \nabla(\vec{u}, \vec{f}_3). \quad (68)$$

Чтобы найти выражение для первого члена в правой части этого соотношения, рассмотрим два варианта записи векторного произведения $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{\zeta})$:

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{\zeta}) = \begin{cases} \nabla \times (\vec{u} \times (\vec{l} - \vec{f}_3)) = \nabla \times (|\vec{u}|^2 \vec{\omega} - (\vec{u}, \vec{\omega}) \vec{u} - \vec{u} \times \vec{f}_3), \\ \vec{u}(\nabla, \vec{\zeta}) - \vec{\zeta}(\nabla, \vec{u}) + (\vec{\zeta}, \nabla) \vec{u} - (\vec{u}, \nabla) \vec{\zeta}, \end{cases}$$

что дает

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \nabla) \vec{\zeta} &= -\nabla \times (|\vec{u}|^2 \vec{\omega} - (\vec{u}, \vec{\omega}) \vec{u} - \vec{u} \times \vec{f}_3) + \\ &+ \vec{u}(\nabla, \vec{\zeta}) - \vec{\zeta}(\nabla, \vec{u}) + (\vec{\zeta}, \nabla) \vec{u} \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнение (68), получим

$$\begin{aligned} -(\nabla \times \vec{\zeta}) \times \vec{u} &= \nabla \times (|\vec{u}|^2 \vec{\omega} - (\vec{u}, \vec{\omega}) \vec{u} - \vec{u} \times \vec{f}_3) - \\ &- \vec{u}(\nabla, \vec{\zeta}) + \vec{\zeta}(\nabla, \vec{u}) - 2(\vec{\zeta}, \nabla) \vec{u} - \\ &- \vec{\zeta} \times \vec{\omega} - \nabla(\vec{u}, \vec{f}_3). \end{aligned} \quad (69)$$

Теперь, найдём выражение для слагаемого $\vec{u}(\nabla, \vec{\epsilon})$, вычисляя дивергенцию от обеих частей уравнения (55) и учитывая трехмерный закон гравитации Ньютона $\Delta\mathcal{H} = \gamma\rho$. Это дает $\vec{u}(\nabla, \vec{\zeta}) = \gamma\rho\vec{u} - \vec{u}\partial_t(\nabla, \vec{u})$. В результате соотношение (67) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{l} = & \nabla \times \left(|\vec{u}|^2 \vec{\omega} - (\vec{u}, \vec{\omega}) \vec{u} - \vec{u} \times \vec{f}_3 \right) + \left(-(\gamma\rho - \partial_t(\nabla, \vec{u})) \vec{u} + \right. \\ & \left. + \left(\vec{\zeta}(\nabla, \vec{u}) - 2(\vec{\zeta}, \nabla) \vec{u} - \nabla(\vec{u}, \vec{f}_3) + \vec{\omega} \times \mathbf{g}_3^{-1}(\nabla\mathcal{H}) \right) \right). \end{aligned} \quad (70)$$

Поскольку $\gamma\vec{d}_3 = \vec{\zeta} + \gamma\vec{P} = \vec{l} - \vec{f}_3 + \gamma\vec{P}$, предыдущее выражение можно переписать, как уравнение (63)

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{d}_3 + & \left(\rho\vec{u} + \frac{1}{\gamma} \left(-\vec{u}\partial_t(\nabla, \vec{u}) - \vec{\zeta}(\nabla, \vec{u}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(\vec{\zeta}, \nabla) \vec{u} + \nabla(\vec{u}, \vec{f}_3) + \partial_t(\vec{f}_3 - \gamma\vec{P}) - \vec{\omega} \times \mathbf{g}_3^{-1}(\nabla\mathcal{H}) \right) \right) = \\ & = \frac{1}{\gamma} \nabla \times \left(|\vec{u}|^2 \vec{\omega} - (\vec{u}, \vec{\omega}) \vec{u} - \vec{u} \times \vec{f}_3 \right). \end{aligned}$$

Сравнивая оба эти выражения, найдем соответствия:

$$\begin{aligned} \vec{\eta} &= \frac{|\vec{u}|^2}{\gamma} \vec{\omega} - \vec{M}, \\ \vec{M} &= \frac{1}{\gamma} \left((\vec{u}, \vec{\omega}) \vec{u} + \vec{u} \times \vec{f}_3 \right), \\ \vec{j} &= \rho\vec{u} + \frac{1}{\gamma} \left(-\vec{u}\partial_t(\nabla, \vec{u}) - \vec{\zeta}(\nabla, \vec{u}) + 2(\vec{\zeta}, \nabla) \vec{u} + \right. \\ & \quad \left. + \nabla(\vec{u}, \vec{f}_3) + \partial_t(\vec{f}_3 - \gamma\vec{P}) - \vec{\omega} \times \mathbf{g}_3^{-1}(\nabla\mathcal{H}) \right). \end{aligned} \quad (71)$$

По аналогии с теорией электромагнитного поля, введенные выше векторы $\vec{M}$ и $\vec{j}$ можно называть намагничиванием и плотностью тока соответственно.

Баланс энергии. Для получения трехмерного уравнения баланса энергии вычислим сначала дуальный тензор $*\tilde{\mathbf{h}}$

$$*\tilde{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} 0 & v^0 d_3^1 & v^0 d_3^2 & v^0 d_3^3 \\ -v^0 d_3^1 & 0 & \eta^3 & -\eta^2 \\ -v^0 d_3^2 & -\eta^3 & 0 & \eta^1 \\ -v^0 d_3^3 & \eta^2 & -\eta^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (72)$$

и воспользуемся выражениями (65) и (66). Теперь свертка $d\xi(*\tilde{\mathbf{h}})$ выглядит так

$$d\xi(*\tilde{\mathbf{h}}) = 2 \left(d_3^j \gamma \left(\partial_t \vec{d}_3 + \vec{j} - \nabla \times \vec{\eta} \right)_j + \eta^j \left(\partial_t \vec{\omega} + \nabla \times \vec{\zeta} \right)_j \right) = 0 \quad (73)$$

и равна нулю в соответствии с законом сохранения энергии (35). В частном случае, когда $\vec{P} = 0$ и $\gamma\vec{d}_3 = \vec{\zeta}$, закон сохранения энергии (73) сводится к виду:

$$\left((\vec{d}_3, \partial_t \vec{\zeta}) + (\vec{\eta}, \partial_t \vec{\omega}) \right) + (\vec{\zeta}, \vec{j}) + (\nabla, \vec{\zeta} \times \vec{\eta}) = 0. \quad (74)$$

3D система уравнений второго уровня. В заключение перечислим уравнения результирующей трехмерной системы. Это уравнения (42), (63) и (24) вместе с замыкающими соотношениями (57) и (71). Тринадцать скалярных уравнений связывают шестнадцать неизвестных $(\rho, \vec{u}, \vec{d}_3, \vec{\eta}, \vec{\omega}, \vec{\zeta})$. Таким образом, требуется еще одно трехмерное соотношение. В электромагнитной теории такое соотношение известно как закон Ома.

5. Заключительные замечания

Одной из основных задач настоящей работы является демонстрация важности интерпретации результатов наблюдений (измерений). В частности, представление пространства событий слоением, листами которого служат пространства одновременных событий, позволяет избегать обсуждения такой категории, как время и всего, что с этим обычно связывают, понимая под ним параметр (номер) листа и только.

В заключение еще раз обратим внимание на принципиально важные, на мой взгляд, моменты.

1. Коль скоро всякая физическая теория строится для описания физических явлений, она должна основываться на наблюдениях и, в конечном итоге, на данных измерений. Поскольку измерить можно лишь интегральные параметры среды, законы природы должны формулироваться в терминах интегральных параметров. Исключением из этого общего правила можно, видимо, считать соотношения, служащие для замыкания системы уравнений модели (уравнение состояния, материальные уравнения и т.п.).
2. Любая математическая модель физического явления есть совокупность постулатов, часть которых отражает сформулированные законы природы. Отсюда следует, что все такие постулаты суть соотношения между мерами, соответствующими интегральным параметрам.
3. Ограничения возможных значений каких-либо характеристик физических явлений должны иметь под собой чрезвычайно весомые основания. Речь идет о пресловутом 2-м постулате СТО. Насколько мне известно, это единственный случай такого рода ограничения. Кроме того, подобное ограничение фактически означает, что все потенциально наблюдаемые объекты и явления во вселенной, наблюдаемы с помощью электромагнитных сигналов. Однако, обнаружение так называемой «темной материи» может свидетельствовать как раз об обратном.

Благодарности

Большую помощь мне оказал мой друг и коллега А.А.Тронь. Беседы с ним всегда были интересны и полезны. Я хотел бы выразить ему мою глубокую признательность, увы, *post-mortem*.

Данная работа была выполнена в рамках темы 0149-2019-0015 Института океанологии им.П.П.Ширшова, РАН, Москва, Россия.

Приложения

А. Скорость сигнала, как верхняя граница наблюдаемых скоростей объектов

Обсуждаемые в настоящей работе уравнения допускают известные преобразования Лоренца (см. приложение Е), если входящую в них скорость s интерпретировать как скорость сигнала. Структура этих преобразований такова, что фигурирующая в них скорость сигнала должна, на первый взгляд, превосходить по модулю скорость любого изучаемого объекта. В стандартной ТО, где иные, кроме света, сигналы и не рассматриваются, эта проблема решается с одной стороны за счет 2-го постулата, утверждающего независимость скорости света от скорости источника¹², а с другой стороны — за счет принятия дополнительного утверждения, согласно которому скорость света в вакууме считается фундаментальной константой, ограничивающей сверху модули скоростей любых материальных объектов¹³. Последнее утверждение имеет настолько далекоидущие следствия, что его следует подвергнуть детальному анализу.

Существование некой величины, ограничивающей возможные скорости перемещения, само по себе странно и ниоткуда не следует. Преобразования Лоренца, которые привлекают для обоснования такого ограничения, фактически ничего не обосновывают, а лишь дают повод для его формулировки. Все это становится очевидным, если прибегнуть к иной интерпретации преобразований Лоренца.

Если с величиной c в преобразованиях Лоренца не связывать однозначно скорость света, а понимать под ней скорость сигнала s , переносящего информацию от объекта к наблюдателю¹⁴, то становится ясно, что сингулярность возникающую при $v \rightarrow s$ можно трактовать по меньшей мере двояко.

Традиционная трактовка объявляет, как было сказано, $s = c$ фундаментальной константой и постулирует ограничение скорости материальных объектов $v < c$. Таким способом удается, конечно, отсеять упомянутую сингулярность. Однако, сам этот способ столь необычен для физики, что нельзя не удивляться тому, насколько легко и глубоко он укоренился в науке. При этом, неисследованным остался, судя по всему, иной вариант трактовки рассматриваемой ситуации¹⁵.

Такой, альтернативный вариант трактовки существует и состоит в том, что сигнал, распространяющийся медленнее, чем движется исследуемый объект, считается неподходящим для исследования движения такого объекта. Никакого ограничения на скорость перемещения физических объектов это не накладывает, но указывает, что для корректных измерений требуется более быстрый сигнал и только¹⁶. Вместе с тем, использование медленного сигнала для измерения скоростей физических объектов приводит к искажению результатов измерений, и, тем самым, к неверной их интерпретации. Иными словами, использование такого сигнала порождает иллюзию того, что все объекты, скорости которых измерялись подобным образом, двигались со скоростями не превосходящими скорость используемого сигнала s . Анализ подобной ситуации приведен ниже; см., также Рис.1 и Рис.2.

Проиллюстрируем все сказанное двояко. Во-первых, можно прибегнуть к компьютерному моделированию, и воспользоваться численным решением уравнений соответствующей математической модели с помощью, например, явных разностных схем¹⁷. В этом случае само решение естественно

¹²О возможности обойтись без 2-го постулата см. у Игнатовского [16], а комментарий — у Паули [17], стр.27.

¹³Встречается уже в первой работе Эйнштейна на тему ТО 1905 г. [18]. Кроме того Болотовский и Гинзбург [19] отмечают, что «как подчеркивалось Эйнштейном еще в 1907 г. (см. [20], а также [17]), условие $v < c$ для скорости материального «тела» или какого-то «действия» связано не с вопросом о релятивистской инвариантности, а с требованием причинности: ни в одной системе отсчета следствие не должно опережать причину.»

¹⁴Что и делалось в работе [18] при обсуждении синхронизации часов.

¹⁵По крайней мере, мне не удалось найти в литературе результаты такого рода исследований.

¹⁶С точки зрения экспериментатора такая ситуация выглядит, конечно, тупиковой, поскольку в его арсенале нет широкого набора сигналов с разными скоростями распространения, и скорость света является наибольшей из известных. Однако, это позволяет избегать ложной интерпретации данных измерений.

¹⁷Использование здесь явных схем диктуется в частности тем, что они удовлетворяют принципу причинности, и переход решения с одного временного слоя на следующий происходит с конечной скоростью. Эта скорость известна

интерпретировать как измерение, а отношение шагов сетки, типа $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (Δx — шаг пространственной дискретизации, а Δt — шаг по времени) — как скорость измеряющего сигнала. Если моделируемые движения столь быстры, что превосходят по модулю соотношение, трактуемое как скорость сигнала, явная разностная схема оказывается неспособной их описать. Результат такого моделирования часто характеризуется как «взрыв решения», что связывают с нарушением условия устойчивости решений разностных аналогов уравнений модели. Таковым является или условие Куранта-Фридрихса-Леви для уравнения переноса, или аналогичное условие для уравнения диффузии, и т.п. По существу, эти условия налагают ограничение на аналог скорости сигнала, который должен превосходить по модулю скорость любого моделируемого объекта или процесса. Данная иллюстрация хороша тем, что демонстрирует ситуацию, когда в распоряжении наблюдателя оказывается большой набор сигналов с различными скоростями распространения. И какой бы ни оказалась скорость моделируемого явления (скажем, скорость переноса) всегда можно подобрать такую скорость сигнала, что соответствующее условие устойчивости будет выполнено. Иными словами, скорость физического явления ничем не ограничивается, а вот сигнал нужно выбирать подходящий.

С другой стороны, возможна и чисто физическая иллюстрация. Для этого следует провести измерения скорости движения объекта с помощью, например, звукового сигнала и заметить возникновение «сингулярности» при $v \rightarrow v_{sound}$. Легко видеть, что допущение того, что скорость света в вакууме c является универсальной константой, ограничивающей сверху модули скорости любых материальных объектов, основывается лишь на интерпретации (и, похоже, неверной) результатов измерений и преобразований Лоренца.

Проследим причину неверной интерпретации результатов измерений скорости объекта «медленным» сигналом. Рассмотрим для простоты двумерный пространственно-временной континуум. Пусть точечный объект P равномерно движется относительно наблюдателя Obs . Пять вариантов такого движения показаны на Рис.1. Варианты от а) до е) показывают измерение расстояния до точки P , а также скорость ее перемещения $v_o = s \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол между мировыми линиями $\lambda(P)$ и Obs . Варианты от а') до е') демонстрируют измерения скорости движения точки P (в соответствии с определением средней скорости движения за некоторый промежуток времени).

Скорость измеряющего сигнала, посылаемого наблюдателем Obs есть $s = s \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, т.е. угол между мировыми линиями сигнала и Obs равен $\frac{\pi}{4}$. Скорость отраженного сигнала есть $s_+ = -s \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \varphi)$, а его мировая линия образует с $\lambda(P)$ также угол $\frac{\pi}{4}$. Соотношения скорости сигнала и скорости движения точечного объекта следующие: а') $v_o > s$, б') $s > v_o > 0$, в') $v_o = 0$, д') $-s < v_o < 0$, е') $v_o < -s$. В трех случаях, когда $|v| < s$, измерения дают истинные значения скорости движения точки и не искажают ее мировую линию.

Если же $|v| > s$, меняется последовательность прихода отраженных сигналов: отражение первого посланного сигнала приходит вторым, а первым приходит отражение от второго сигнала. Если у наблюдателя нет возможности установить с каким сигналом связано то или иное отражение¹⁸, значит, как показывают варианты а') и е'), наблюдатель будет по-прежнему считать первый пришедший отклик результатом отражения первого посланного сигнала и т.п., а потому, будет считать, что точка P движется по другой (кажущейся) мировой линии λ' и имеет иную (кажущуюся) скорость перемещения, меньшую по модулю, чем скорость сигнала.

Таким образом, в этом случае используемый сигнал фактически ограничивает измеряемые скорости рассматриваемых объектов, однако это происходит не за счет запрета высоких значений реальных скоростей объектов, а в силу неверной интерпретации результатов проводимых измерений. Все это можно подтвердить следующими простыми рассуждениями.

и может варьироваться в широких пределах.

¹⁸ А у него такой возможности, по сути, нет; возможна лишь более или менее правдоподобная гипотеза.

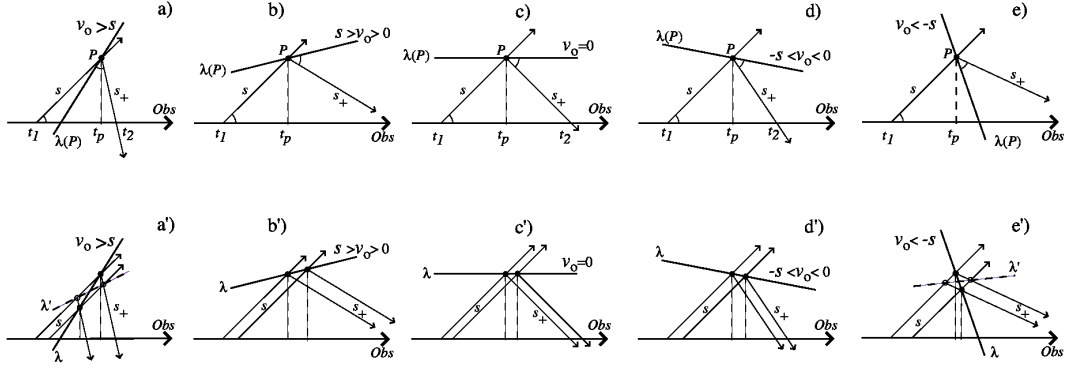


Рис. 1. Измерение положения точки P (рис. от a) до e)) и скорости ее перемещения $v_o = s \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол между λ и Obs (рис. от a') до e')).

a), a') $v_o > s$, b), b') $s > v_o > 0$, c), c') $v_o = 0$, d), d') $-s < v_o < 0$, e), e') $v_o < -s$.

Скорость измеряющего сигнала: $s = s \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, скорость отраженного сигнала: $s_+ = -s \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \varphi)$. В случаях a') и e') измерения дают кажущиеся значения скорости $|v| < s$, а также кажущиеся мировые линии λ' точки P .

A.1. Стандартная синхронизация параметров мировых линий

Если используется стандартный для ТО способ синхронизации параметров мировых линий (стандартный способ синхронизации часов), то положение x некоторой точки и соответствующий момент времени t связаны между собой соотношениями $x = s_-(t - t_{-i}) = s_+(t_{+i} - t)$. Скорость точки v средняя за интервал $\delta t = t_2 - t_1$ может быть вычислена с помощью результатов двух измерений

$$v = \frac{\delta x}{\delta t} = s_+ s_- \frac{\tau_2 - \tau_1}{s_+ \tau_2 + s_- \tau_1},$$

где $\delta x = x_2 - x_1$, а $\tau_1 = t_{-2} - t_{-1}$, $\tau_2 = t_{+2} - t_{+1}$ суть интервалы между двумя последовательными посылками сигналов и приемами откликов. Мгновенная скорость неравномерно движущейся точки среды дается выражением:

$$v_o = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0} v = s_+ s_- \frac{1 - \alpha}{s_+ + s_- \alpha}, \quad (75)$$

где $\alpha \equiv \lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \frac{\tau_1}{\tau_2}$. Зависимость α от мгновенной скорости v легко может быть получена из предыдущей формулы:

$$\alpha = \frac{1 - \frac{v_o}{s_-}}{1 + \frac{v_o}{s_+}}.$$

Эта функция положительна лишь на интервале $v_o \in (-s_+, s_-)$, имеет особенность при $v_o = -s_+$ и равна нулю при $v_o = s_-$. Она может менять знак только вместе с τ_2 , поскольку $\alpha \approx \frac{\tau_1}{\tau_2}$ и $\tau_1 > 0$. Если $\tau_2 < 0$, то при $v_o < -s_+$ или $v_o > s_-$ это означает, что отклик на сигнал, посланный первым, приходит вторым. Если же знак τ_2 наблюдателю неизвестен, и, значит, он может измерить только модуль α , формула (75) приобретает вид:

$$v = \frac{s_- |s_+ + v_o| - s_+ |s_- - v_o|}{|s_+ + v_o| + |s_- - v_o|} = \begin{cases} v_o, & v_o \in (-s_+, s_-), \\ \frac{s_+ s_- - \frac{1}{2}(s_+ - s_-)v_o}{v_o + \frac{1}{2}(s_+ - s_-)}, & v_o \notin (-s_+, s_-). \end{cases}$$

Кроме того, выполняются следующие предельные соотношения:

$$\lim_{v \rightarrow s_-} v = s_-, \quad \lim_{v \rightarrow -s_+} v = -s_+, \quad \lim_{v \rightarrow \pm \infty} v = \frac{1}{2}(s_- - s_+).$$

Иными словами, наблюдатель, неверно интерпретируя измерения, фиксирует те значения скорости точки, которые лежат в интервале $(-s_+, s_-)$ независимо от их истинных значений.

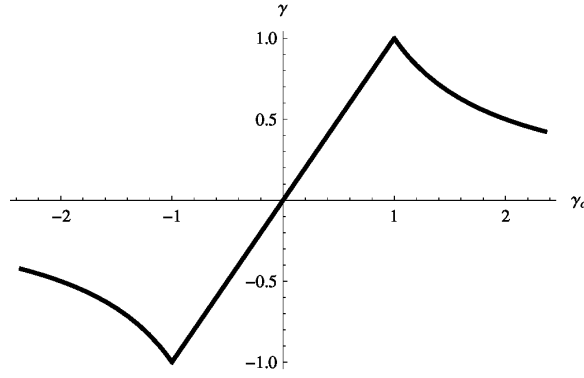


Рис. 2. Зависимость измеренного значения относительной скорости объекта γ от его истинного значения γ_0 .

В случае $s_+ = s_- = s$ формула для $\bar{v}$ записывается в более простом виде:

$$v = s \frac{|s + v_o| - |s - v_o|}{|s + v_o| + |s - v_o|} = \begin{cases} v_o, & |v_o| < s, \\ \frac{s^2}{v_o}, & |v_o| > s, \end{cases} \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{|1 + \gamma_o| - |1 - \gamma_o|}{|1 + \gamma_o| + |1 - \gamma_o|} = \begin{cases} \gamma_o, & |\gamma_o| < 1, \\ \frac{1}{\gamma_o}, & |\gamma_o| > 1. \end{cases},$$

где $\gamma_o \equiv \frac{v}{s}$ и $\gamma \equiv \frac{v}{s}$. Таким образом, скорость сигнала, используемого наблюдателем для проведения измерений, ограничивает сверху по модулю измеренные значения скорости любых наблюдаемых объектов (см. Рис. (2)). Если измерения осуществляются с помощью электромагнитных сигналов, скорость всех наблюдаемых объектов не будет превышать скорость света в той среде, где измерения проводятся. Если для измерений используется только звуковой сигнал, все фиксируемые скорости не будут превосходить скорость звука в среде, и т.п.

А.2. Нестандартная синхронизация параметров мировых линий

При нестандартной синхронизации параметров мировых линий, варианты которой рассмотрены в приложении В, скорость сигнала сохраняет свою ограничивающую функцию, хотя конкретные значения измеренных скоростей движущихся точек будут, конечно, иными.

В. Одновременность и пространства одновременных событий

Как и параметризация мировой линии наблюдателя, произвольная в значительной степени, так и процедура синхронизации параметров мировых линий с временем наблюдателя также не единственна. Во-первых, из совокупности возможных связей параметров мировых линий с параметром t мировой линии наблюдателя удобно выбрать ту, которую можно интерпретировать в терминах скорости сигнала. Во-вторых, вариантов такого рода связей может быть несколько. Вот только два примера.

1. Стандартная синхронизация. Время t_P события P полагается равным среднему времени послыки сигнала t_1 и приема отражения t_2 от точки P (см. Рис.(3)):

$$t_P = \frac{1}{2}(t_1 + t_2). \quad (76)$$

При этом допускается, что скорости распространения сигнала туда и обратно одинаковы и равны s . В этом случае, зная расстояние x_P от наблюдателя до точки P , время t_P можно вычислить как $t_P = \frac{x_P}{s}$.

2. Нестандартная синхронизация. Мировая линия сигнала помечает одновременные события (см. Рис.4). Сигнал, посланный наблюдателем, достигнув объекта, связывает это событие с тем значением времени наблюдателя, в которое сигнал был послан.

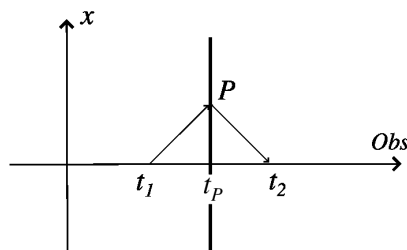


Рис. 3. Стандартная синхронизация параметров мировых линий и построение пространств одновременных событий. Событие P ассоциируется с моментом времени t_P наблюдателя в соответствии с формулой (76). Все события, лежащие на линии, проходящей через точки P и t_P считаются в силу формулы (76) происходящими в то же самое время. Эта линия — пример пространства одновременных событий.

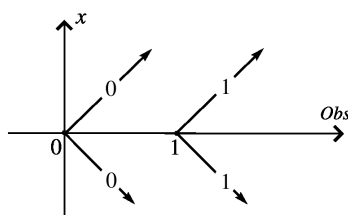


Рис. 4. Вариант синхронизации параметров мировых линий и построения пространств одновременных событий. События, лежащие на мировой линии сигнала, посланного наблюдателем в момент времени t , образуют пространство одновременных с этим временем событий.

Первый вариант удобен при построении теории и стандартно используется в СТО. Он также использовался выше. Однако, второй вариант (или какой-нибудь третий) также имеет право на существование и может оказаться более удобным практически.

Здесь важно отметить, что именно выбранная процедура синхронизации параметров мировых линий устанавливает время в пространственно-временном континууме. Это необходимо учитывать при интерпретации. Независимо от того, как работают и что показывают движущиеся относительно наблюдателя устройства (например, часы), время событий, составляющих их мировые линии (здесь эти устройства считаются точечными), будет определяться наблюдателем и выбранной им процедурой синхронизации, и только. Говорить о замедлении времени бессмысленно, уже хотя бы потому, что абсолютного времени нет, а значение времени, ассоциированное с данным событием, связано с выбранной процедурой синхронизации. Другими словами, оно назначено наблюдателем и никем иным.

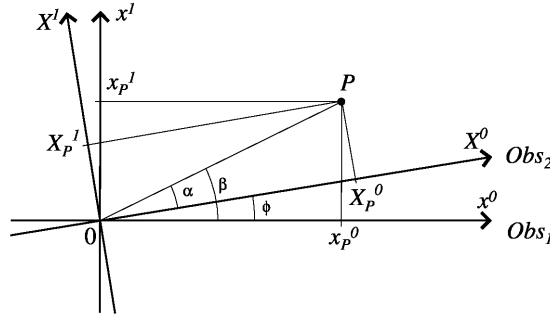


Рис. 5. Координаты события P с точки зрения наблюдателей Obs_1 и Obs_2 .

С. Пространственно-временная связь между описаниями объекта различными инерциальными наблюдателями

Исследуем изменение описания событий (их координат) и мировых линий (скоростей перемещения) при смене наблюдателя. Пусть Obs_1 и Obs_2 суть две мировых линии в двумерном (для простоты и наглядности) пространстве событий $\mathcal{W}^2$. Если какая-либо из них интерпретируется как мировая линия наблюдателя, то другая может быть интерпретирована как мировая линия некой физической точки, равномерно движущейся относительно наблюдателя с некоторой постоянной скоростью, которую обозначим через U .

С.1. Стандартная синхронизация; преобразования Лоренца

Пусть в 2D пространственно-временном континууме введена система декартовых координат (x^0, x^1) , связанная с наблюдателем Obs_1 . Координаты события P в этой системе координат (см. Рис. 5) суть $x_P = (x_P^0, x_P^1)$. Если вместо Obs_1 считать наблюдателем Obs_2 , движущегося равномерно относительно Obs_1 со скоростью U , и связать с Obs_2 декартову систему координат (X^0, X^1) , то она будет повернута относительно системы, связанной с Obs_1 , на некоторый угол $\phi = \text{arctg} \frac{U}{s}$. Координаты события P в системе координат Obs_2 соответственно равны $X_P = (X_P^0, X_P^1)$. Координаты произвольного события и P , в частности, в обеих системах координат связаны соотношением

$$X = Rx. \quad (77)$$

Матрица преобразования координат $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$ легко может быть найдена, если учесть, что $\frac{x_P^1}{x_P^0} = \text{tg} \beta$, $\frac{X_P^1}{X_P^0} = \text{tg} \alpha$, а также

$$OP = \frac{x_P^0}{\cos \beta} = \frac{X_P^0}{\cos \alpha}, \quad OP = \frac{x_P^1}{\sin \beta} = \frac{X_P^1}{\sin \alpha}.$$

Простые вычисления дают

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \phi}} \begin{pmatrix} 1 & \text{tg} \phi \\ -\text{tg} \phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Если учесть, что уравнение мировой линии Obs_2 есть $x^1 = (\text{tg} \phi)x^0$, и $\text{tg} \phi = \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{dx^1}{is dt} = \frac{U}{is} \equiv -i\gamma$, то

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \begin{pmatrix} 1 & -i\gamma \\ i\gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \equiv \frac{U}{s}. \quad (78)$$

Легко видеть, что матрица R ортогональна и, значит, $R^{-1} = R^T$. Таким образом, прямое (77) и обратное $x = R^T X$ преобразования координат произвольного события в компонентной форме

выглядят так:

$$\begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \begin{pmatrix} x^0 - i\gamma x^1 \\ i\gamma x^0 + x^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \begin{pmatrix} is(t_1 - \frac{U}{s^2}x^1) \\ -Ut_1 + x^1 \end{pmatrix}, \quad (79)$$

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \begin{pmatrix} X^0 + i\gamma X^1 \\ -i\gamma X^0 + X^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \begin{pmatrix} is(t_2 + \frac{U}{s^2}X^1) \\ Ut_2 + X^1 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Полученная связь координат события в двух инерциальных системах отсчета $(t_1, x^1) \rightarrow (t_2, X^1)$

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{U}{s^2}x^1}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad X^1 = \frac{x^1 - Ut_1}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

называется преобразованиями Лоренца.

В общем n -мерном случае связь (77) между инерциальными системами отсчета (или в первом приближении и между неинерциальными системами отсчета) сохраняется. При этом R — ортогональная $n \times n$ матрица.

С.2. Нестандартная синхронизация; эффект Доплера

Пусть сигналы посылаются Obs с интервалом в единицу времени наблюдателя (см. рис. 4). Тогда некоторая иная мировая линия λ будет пересекать мировые линии сигналов (т.е. будет принимать эти сигналы) через интервалы, которые по определению зададут единицу времени этой мировой линии. Иными словами, мировая линия любого сигнала наблюдателя (а в 4-пространстве событий это будет «трехмерный сигнальный конус») определяет совокупность одновременных событий¹⁹. Пока наблюдателем считается Obs , время λ задается принятыми от Obs сигналами, а единицей измерения времени служит интервал между двумя последовательно принятыми сигналами. Если, напротив, наблюдателем назначается λ , то аналогично используется другая процедура синхронизации параметров мировых линий, а именно та, которую предпочел λ . Если λ выбирает тот же способ синхронизации, что и Obs , то сигналы распространяющие информацию о времени посылает наблюдатель λ . Собственные часы другого «наблюдателя», т.е. некоторое устройство, если они совершенно идентичны часам наблюдателя (а одинаковые часы в двух инерциальных системах отсчета будут идти одинаково), должны восприниматься, как идущие замедленно до встречи с наблюдателем, и как идущие ускоренно — после. Фактически же дело обстоит иначе. Часы, разумеется, идут, как и шли, а сигналы от наблюдателя, индуцирующие время в пространстве событий, до встречи поступают чаще, а после — реже в силу так называемого эффекта Доплера.

Рассмотрим еще раз введение времени в пространстве событий (см. Рис. 6), и графическое представление единиц времени λ , перемещающегося со скоростью U относительно Obs .

Мировые линии сигналов, посланных наблюдателем Obs — суть подпространства одновременных событий, назначаемые наблюдателем. Точка пересечения мировой линии сигнала с мировой линией λ определяет соответствующее время для λ . На графике пересечение мировой линии λ с мировой линией Obs задает для λ время, скажем, 0. Расстояние от левой точки пересечения λ с мировой линией сигнала до нуля определяет единицу времени λ при сближении λ с наблюдателем. Соответственно, расстояние от нуля до правой точки пересечения λ с мировой линией сигнала определяет единицу времени λ при расхождении λ с наблюдателем. Единицы времени λ до и после нуля, т.е. пересечения Obs и λ , очевидно, различаются. Это есть эффект Доплера.

¹⁹Важно понимать, что, в соответствии с нашим выбором, параметризация мировой линии λ индуцируется параметризацией мировой линии наблюдателя Obs . Иначе говоря, время определяет наблюдатель, он задает подпространства одновременных событий, и вся картина мира строится с его точки зрения. Попытка сравнить единицу времени наблюдателя Obs с единицей времени λ с помощью синхронизированных часов по существу является подменой наблюдателя Obs (а значит, и выбранной параметризации его мировой линии) некоторым новым наблюдателем. Разумеется, наблюдателя можно сменить и назвать, скажем, мировой линией наблюдателя λ . Однако, при этом, вся картина мира будет строиться с другой точки зрения, а время в пространстве событий будет определяться новым наблюдателем λ .

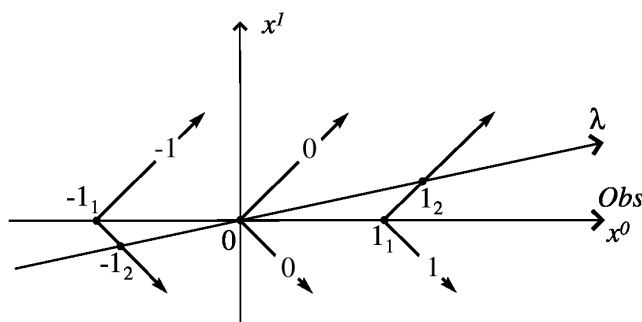


Рис. 6. Вариант нестандартной синхронизации параметра мировой линии λ с временем наблюдателя Obs , т.е. с выбираемым независимо параметром мировой линии Obs . Линии, помеченные цифрами $-1, 0, 1$ суть пространства одновременных событий. Точки помечают единицы времени $\pm 1_1$ наблюдателя λ и индуцированные им единицы времени $\pm 1_2$ объекта λ .

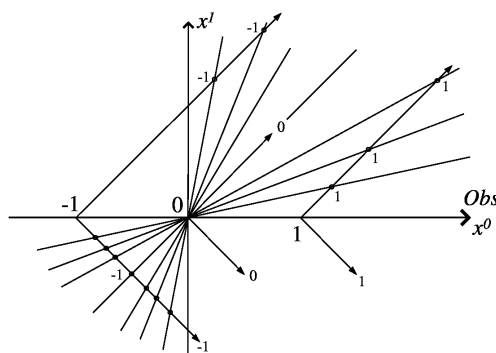


Рис. 7. Изменение единицы времени объекта в зависимости от его относительной скорости γ перемещения относительно наблюдателя Obs . Если $\gamma = 0$, объект неподвижен относительно наблюдателя, если $|\gamma| = 1$, объект перемещается со скоростью сигнала. В случае, когда $|\gamma| < 1$, наблюдатель может индуцировать время объекта с сохранением причинной обусловленности событий. Если $|\gamma| \geq 1$, индуцированное время объекта не сохраняет причинную обусловленность.

При сближении объекта с наблюдателем (см. Рис. 7) единица времени, индуцированная временем наблюдателя Obs на мировой линии объекта меньше, чем единица времени Obs . Напротив, при расхождении объекта с наблюдателем (после пересечения их мировых линий в точке 0) единица времени объекта становится больше, чем единица времени Obs . На Рис. 7 показано это изменение единицы времени в зависимости от относительной скорости γ перемещения объекта и наблюдателя. Если $\gamma = 0$, объект неподвижен относительно наблюдателя, если $|\gamma| = 1$, объект перемещается со скоростью сигнала. В случае, когда $|\gamma| < 1$, наблюдатель может индуцировать время объекта с сохранением причинной обусловленности событий. Напротив, если $|\gamma| \geq 1$, легко видеть, что индуцированное время объекта не сохраняет причинную обусловленность, что означает, что используемый сигнал является слишком медленным, и для описания подобных явлений с сохранением причинной обусловленности требуется более быстрый сигнал²⁰.

Легко вычислить единицу индуцированного времени в плоском случае. Рассмотрим отдельно сближение объекта с наблюдателем (третий квадрант на Рис. (7)) и удаление объекта от наблюдателя (первый квадрант на Рис. 7).

²⁰Здесь прямая аналогия с явными конечно-разностными методами численного решения дифференциальных уравнений в частных производных.

С.2.1 Сближение.

Точка пересечения мировых линий объекта и сигнала есть решение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} x^1 = -i\gamma x^0, & \text{объект,} \\ x^1 = i(x^0 - x_{*1}^0), & \text{сигнал,} \end{cases} \quad (81)$$

где x_{*1}^0 — некоторая точка на мировой линии наблюдателя, справа от 0. Отсюда находим

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \frac{x_{*1}^0}{1 + \gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\gamma \end{pmatrix}.$$

Поворачивая систему координат $X = R x$ так, чтобы точка пересечения оказалась на оси X^0 , определим координату X_{*1}^0 , соответствующую (или одновременную) координате x_{*1}^0

$$X_{*1} = R x_{*1} = x_{*1}^0 \sqrt{\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{*1}^0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1_{*1} = \sqrt{\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}}.$$

Величина 1_{*1} — индуцированное время, соответствующее единице времени наблюдателя (нижняя кривая на Рис. 8).

С.2.2 Расхождение.

Здесь точкой пересечения мировых линий объекта и сигнала является решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^1 = -i\gamma x^0, & \text{объект,} \\ x^1 = -i(x^0 - x_{*2}^0), & \text{сигнал.} \end{cases} \quad (82)$$

Откуда имеем

$$x_{*2} = \frac{x_{*2}^0}{1 - \gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\gamma \end{pmatrix}.$$

Величина x_{*2}^0 — некоторая точка на мировой линии наблюдателя, слева от 0. Здесь также поворачиваем систему координат $X = R x$ так, чтобы точка пересечения оказалась на оси X^0 , и определяем координату X_{*2}^0 , соответствующую (или одновременную) координате x_{*2}^0

$$X_{*2} = R x_{*2} = x_{*2}^0 \sqrt{\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{*2}^0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1_{*2} = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}}.$$

Величина 1_{*2} — индуцированное время, соответствующее единице времени наблюдателя (верхняя кривая на Рис. 8).

Д. Кинематика. Касательные векторные пространства; сложение скоростей

Снова рассмотрим Рис. 5, где P — событие на мировой линии OP точки, движущейся равномерно относительно Obs_1 и Obs_2 со скоростями u_1 и u_2 , соответственно. Координаты события P , изображенного на рисунке, в координатной системе Obs_1 равны $x = (x^0, x^1) = (ist_1, u_1 t_1)$. Тангенс угла β между мировыми линиями Obs_1 и OP равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x^1}{x^0} = \frac{u_1 t_1}{ist_1} = -i \frac{u_1}{s} \equiv -i\gamma_1.$$

В свою очередь, координаты того же события в координатной системе Obs_2 равны $X = (X^0, X^1) = (ist_2, u_2 t_2)$. Тангенс угла α между мировыми линиями OP и Obs_2 равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X^1}{X^0} = \frac{u_2 t_2}{ist_2} = -i \frac{u_2}{s} \equiv -i\gamma_2.$$

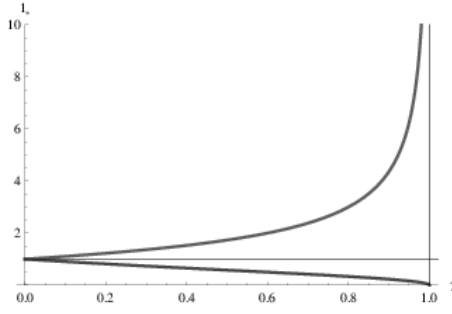


Рис. 8. Зависимость индуцированной единицы времени 1_* от относительной скорости $\gamma \equiv \frac{U}{s}$. Нижняя кривая — объект сближается с наблюдателем, а верхняя кривая — объект удаляется от наблюдателя. Здесь нарисован случай $\gamma < 1$, когда скорость объекта не превышает скорости сигнала. При этом, индуцируемая параметризация мировых линий такова, что сохраняется причинная обусловленность следования событий, которая нарушается в случае $\gamma \geq 1$. Если $\gamma = 1$, то объект движется со скоростью сигнала. При этом, в случае сближения с наблюдателем индуцированная единица времени минимальна, а в случае удаления — бесконечно велика т.к. сигнал не в состоянии достичь объекта.

Кроме того, выше было получена связь $\operatorname{tg} \phi = -i \frac{U}{s} \equiv -i \gamma$. Пользуясь тем, что $\phi = \beta - \alpha$, находим

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow \gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2}.$$

Откуда получаем

$$U = \frac{u_1 - u_2}{1 - \frac{u_1 u_2}{s^2}}. \quad (83)$$

Из формулы (83) можно получить два выражения для u_1 и u_2 :

$$u_1 = \frac{U + u_2}{1 + \frac{U u_2}{s^2}}, \quad \text{и} \quad u_2 = -\frac{U - u_1}{1 - \frac{U u_1}{s^2}}.$$

При этом верны следующие предельные значения

$$\begin{aligned} \lim_{u_2 \rightarrow s} u_1 &= s, & \lim_{u_1 \rightarrow s} u_2 &= s, \\ \lim_{U \rightarrow s} u_1 &= s, & \lim_{U \rightarrow s} u_2 &= -s, \end{aligned}$$

где s — скорость сигнала, используемого для измерений обоими наблюдателями. Если скорости сигналов у наблюдателей различны, скажем, s_1 и s_2 , то выражение (83) заменяется на

$$U = \frac{u_1 - u_2 \frac{s_1}{s_2}}{1 - \frac{u_1 u_2}{s_1 s_2}}.$$

Выражения для u_1 и u_2 также меняются

$$u_1 = \frac{U + u_2 \frac{s_1}{s_2}}{1 + \frac{U u_2}{s_1 s_2}}, \quad \text{и} \quad u_2 = -\frac{U - u_1}{\frac{s_1}{s_2} - \frac{U u_1}{s_1 s_2}}.$$

Соответственно, предельные значения таковы

$$\begin{aligned} \lim_{u_2 \rightarrow s_2} u_1 &= s_1, & \lim_{u_1 \rightarrow s_1} u_2 &= s_2, \\ \lim_{U \rightarrow s_1} u_1 &= s_1, & \lim_{U \rightarrow s_1} u_2 &= -s_2. \end{aligned}$$

Е. Группы преобразований модели среды

Рассмотрим групповые свойства различных моделей среды и изучим связь свойств симметрии системы уравнений с допущениями, положенными в ее основу. В качестве базовой используем описанную выше причинно-зависимую модель сжимаемой вязкой бароклиной жидкости, включающую уравнение диффузии плотности (см. [8]). Другие исследуемые здесь модели являются ее частными случаями.

Е.1. Основная модель жидкости

Базовой служит причинно-зависимая модель бароклиной вязкой жидкости

$$\rho d_t v^\alpha + \delta^{\alpha\beta} (p - \mu \operatorname{div} \vec{v})_{;\beta} = (\rho \nu \delta^{\beta\gamma} v_{;\gamma}^\alpha)_{;\beta}, \quad (84)$$

включающая вместо уравнения неразрывности уравнение диффузии плотности массы

$$d_t \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div}(\nu_\rho \nabla \rho). \quad (85)$$

Здесь ν — кинематический коэффициент диффузии, ν_ρ — коэффициент диффузии плотности массы, $x^0 \equiv i\tau$, $d\tau \equiv s dt$, а $\partial_\alpha \equiv \partial_{x^\alpha}$.

Используя далее декартовы координаты, запишем базовую модель в виде:

$$\begin{aligned} s \partial_\tau \rho + v^k \partial_k \rho + \rho (\partial_\tau s + \partial_k v^k) &= \nu_\rho (-\partial_\tau \rho + \Delta \rho), \\ s \partial_\tau s + v^k \partial_k s - \frac{1}{\rho} \partial_\tau (p - \rho \nu (\partial_\tau s + \partial_k v^k)) &= \nu (-\partial_\tau s + \Delta s), \\ s \partial_\tau v^j + v^k \partial_k v^j + \frac{1}{\rho} \partial_j (p - \rho \nu (\partial_\tau s + \partial_k v^k)) &= \nu (-\partial_\tau v^j + \Delta v^j). \end{aligned}$$

Е.2. Варианты модели

В качестве вариантов рассмотрим ряд упрощений базовой модели. В первую очередь, это касается учета вязкости. В первом случае положим $\nu_\rho = 0$, т.е. вместо уравнения диффузии плотности будем использовать уравнение неразрывности:

$$s \partial_\tau \rho + v^k \partial_k \rho + \rho (\partial_\tau s + \partial_k v^k) = 0.$$

Во втором случае рассмотрим идеальную жидкость, $\nu_\rho = \nu = 0$ и уравнения движения запишем в виде:

$$\begin{aligned} s \partial_\tau s + v^k \partial_k s - \frac{1}{\rho} \partial_\tau p &= 0, \\ s \partial_\tau v^j + v^k \partial_k v^j + \frac{1}{\rho} \partial_j p &= 0. \end{aligned}$$

Помимо общих случаев исследуем также следующие допущения:

1. скорость распространения сигнала постоянна $s = \text{const}$:

$$\begin{aligned} s \partial_\tau \rho + v^k \partial_k \rho + \rho \partial_k v^k &= \nu_\rho (-\partial_\tau \rho + \Delta \rho), \\ -\frac{1}{\rho} \partial_\tau (p - \rho \nu \partial_k v^k) &= 0, \\ s \partial_\tau v^j + v^k \partial_k v^j + \frac{1}{\rho} \partial_j (p - \rho \nu \partial_k v^k) &= \nu (-\partial_\tau v^j + \Delta v^j), \end{aligned}$$

2. скорость распространения сигнала бесконечна:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + v^k \partial_k \rho + \rho \partial_k v^k &= \nu_\rho \Delta \rho, \\ 0 &= 0, \\ \partial_t v^j + v^k \partial_k v^j + \frac{1}{\rho} \partial_j (p - \rho \nu \partial_k v^k) &= \nu \Delta v^j. \end{aligned}$$

Е.3. Симметрии моделей жидкости

Группой симметрий дифференциального уравнения называется (см., например, [25]) локальная группа преобразований G , действующая на подмножестве пространства $X \times U$ независимых X и зависимых U переменных и переводящая решения уравнения в решения же. Другими словами, если $u = u(t, \mathbf{x})$ — решение дифференциального уравнения, а $g \in G$ — некоторое преобразование из группы и действие этого преобразования на решение gu определено, то gu также является решением того же уравнения. Каждый элемент g в окрестности единичного элемента группы можно записать как экспоненту $g = \exp(\mathbf{v})$ для некоторого вектора $\mathbf{v}$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Последнюю можно отождествить с касательным пространством к G в единичном элементе e , замкнутым относительно операции коммутирования. Проходящий через единицу группы поток $g^\sigma = \exp(\sigma \mathbf{v})e$ порождает однопараметрическую подгруппу группы G , а вектор $\mathbf{v}$ оказывается, таким образом, генератором этой подгруппы или ее инфинитезимальной образующей.

Любой элемент $g \in G$ всегда может быть записан как произведение экспонент $g = \exp(\mathbf{v}) \dots \exp(\mathbf{w})$ для конечного числа векторов $\mathbf{v}, \dots, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}$. Если же n — размерность алгебры и $\{V_i\}_{i=1}^n$ — ее базис, то $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i V_i$, где v^i — компоненты вектора $\mathbf{v}$ в базисе $\{V_i\}$ и $g = \prod_{i=1}^n \exp(v^i V_i)$. Таким образом, группа преобразований G будет группой симметрий дифференциального уравнения, если симметрией будет каждая ее однопараметрическая подгруппа $g_i^\sigma = \exp(\sigma V_i)e$.

Для отыскания максимальной группы симметрий требуется найти и решить переопределенную систему определяющих уравнений и вычислить коэффициенты η^k и φ^a инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ однопараметрической группы

$$\mathbf{v} = \eta^k \partial_{x_k} + \varphi^a \partial_{u_a}.$$

Здесь $(x_1, \dots, x_k, \dots) \in X$ — независимые и $(u_1, \dots, u_a, \dots) \in U$ — зависимые переменные задачи. Выражения для коэффициентов η^k и φ^a обычно содержат набор произвольных констант и функций. Количество констант задает размерность соответствующей конечномерной алгебры Ли, а функции определяют бесконечномерные подалгебры. Детали вычислений можно найти, например, в [25].

Вычисления, связанные с групповым анализом, как правило, достаточно трудоемки (нередко требуется решать системы из сотен линейных дифференциальных уравнений в частных производных), но часто могут быть выполнены с помощью специализированных программ, работающих в среде той или иной системы аналитических вычислений. В данной работе необходимые вычисления проводились с помощью программы Desolv, разработанной К.Т. Vu и J. Carminati и ориентированной на среду Maple V release 5.

Полученные результаты сведены в приводимые ниже таблицы, в которых используются следующие обозначения инфинитезимальных операторов:

трансляции:	$P_\alpha = \partial_{x^\alpha}, \quad P_i = \partial_{x^i},$
	$P_t = \partial_t, \quad P_p = \partial_p,$
пространственные повороты:	$J_i = \varepsilon_{ijk} (x^j \partial_{x^k} + v^j \partial_{v^k}),$
преобразования Галилея:	$G_i = t \partial_{x^i} + \partial_{v^i},$
преобразования Лоренца:	$L_i = x^i \partial_{x^0} - x^0 \partial_{x^i} + v^i \partial_{v^0} - v^0 \partial_{v^i},$
растяжения:	$D_\alpha = x^\alpha \partial_{x^\alpha}, \quad D_v = v^\alpha \partial_{v^\alpha},$
	$D_\rho = \rho \partial_\rho, \quad D_p = p \partial_p,$
	$D_t = t \partial_t, \quad D_x = x^k \partial_{x^k},$
	$D_u = v^k \partial_{v^k}.$

При этом $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$, а $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Рассматриваются следующие варианты модели среды:

- вариант I — общий вязкий случай;
- вариант II — отсутствие диффузии плотности ($\nu_\rho = 0$);

Таблица 1. Генераторы симметрий 4D и 3D моделей жидкости.

	a. 4D общий случай	b. 4D ($s = \text{const}$)	c. 3D ($s = \infty$)
I	$P_p, P_\alpha, J_k, L_j,$ $-D_\alpha + D_v + 2D_p$	P_p, P_α, J_k	$f(t)\partial_p, P_t, P_i, J_k, G_j,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$
II	$P_p, P_\alpha, J_k, L_j,$ $D_\alpha - D_\rho - D_p,$ $-D_\alpha + D_v + 2D_p$	$P_p, P_\alpha, J_k,$ $D_\alpha - D_\rho - D_p$	$f(t)\partial_p, P_t, P_i, J_k, G_j,$ $D_t + D_x - D_\rho - D_p,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$
III	$P_p, P_\alpha, J_k, L_j,$ $D_\alpha, D_\rho + D_p,$ $D_v + 2D_p$	$P_p, P_\alpha, J_k,$ $D_\alpha, D_\rho + D_p,$ $D_x + D_u - 2D_\rho$	$f(t)\partial_p, P_t, P_i, J_k, G_j,$ $D_t + D_x, D_x + D_u + 2D_p, D_\rho + D_p,$ $t(-D_t - D_x + D_u + 5D_p + 3D_\rho)$ $-\sum_i x^i \partial_{v^i}$

Таблица 2. Группы симметрий моделей жидкости: $\text{Eu}(1, 3)$ — группа Евклида, $\text{G}(1, 3)$ — группа Галилея, $\text{P}(1, 3)$ — группа Пуанкаре. Надчеркивание обозначает расширение группы за счет растяжений.

Вариант	a. 4D общий сл.	b. 4D ($s = \text{const}$)	c. 3D ($s = \infty$)
I	$\bar{\text{P}}(1, 3)$	$\text{Eu}(1, 3)$	$\bar{\text{G}}(1, 3)$
II	$\bar{\text{P}}(1, 3)$	$\bar{\text{Eu}}(1, 3)$	$\bar{\text{G}}(1, 3)$
III	$\bar{\text{P}}(1, 3)$	$\bar{\text{Eu}}(1, 3)$	$\bar{\text{G}}(1, 3)$

вариант III — невязкая жидкость ($\nu = 0$).

В таблицах 1 и 2 приводятся группы симметрий и их генераторы, вычисленные для указанных моделей жидкости. Соответствующие уравнения выписаны в предыдущем параграфе.

Для сравнения в табл.3 приводятся группы симметрий и их генераторы, вычисленные для классических вариантов уравнений идеальной жидкости (уравнения Эйлера) и вязкой жидкости (уравнения Навье-Стокса). Эти результаты совпадают с уже известными и опубликованными.

Е.4. Обсуждение результатов

Результаты, полученные для уравнений Навье-Стокса и Эйлера, совпадают с известными (см. [23–25]). Кроме того, обнаружено, что подгруппа, появляющаяся в уравнениях Эйлера в случае политропного газа при показателе политропы, равном $\frac{5}{3}$ [23], допускается и в общем случае сжимаемого газа при произвольном уравнении состояния. Появление бесконечномерных алгебр объясняется исключительно бесконечной скоростью распространения сигнала. Они связаны с симметриями по давлению (сдвиг по давлению на произвольную функцию времени t).

В отличие от стандартного случая (см., например, [25]), где уравнения модели вязкой жидкости и уравнение теплопроводности (уравнение переноса тепла в жидкости) имеют различные группы симметрии, в общем причинно-зависимом случае и уравнения модели движущейся среды, и уравнение переноса в среде тепла имеют близкие группы симметрий.

Тип группы определяется гипотезами, принятыми относительно скорости сигнала, которые

Таблица 3. Генераторы симметрий классических уравнений гидромеханики. Здесь $f(t)$ — произвольная функция времени.

система Навье-Стокса: $\bar{\text{G}}(1, 3)$	система Эйлера: $\bar{\text{G}}(1, 3)$
$f(t)\partial_p, P_t, P_i, J_k, G_j,$ $D_t + D_x - D_\rho - D_p,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$	$f(t)\partial_p, P_t, P_i, J_k, G_j,$ $D_t + D_x, D_\rho + D_p,$ $D_x + D_u + 2D_p$

определяют наличие или отсутствие того или иного принципа относительности. Так, если s — величина переменная и является функцией события (т.е. считается функцией времени и пространственных координат), система уравнений допускает группу Лоренца, определяющую принцип относительности Эйнштейна и, как следствие, группу Пуанкаре или расширенную (за счет растяжений) группу Пуанкаре $\bar{P}(1, 3)$. Если $s = \text{const}$, принцип относительности отсутствует и допускается лишь группа Евклида (расширенная группа Евклида). Наконец, если $s = \infty$, вместо группы Лоренца допускается группа Галилея (расширенная группа Галилея), определяющая соответствующий принцип относительности Галилея. Последний результат совпадает с известным (см. [24] для системы Навье-Стокса и [23, 25] для системы Эйлера).

Уменьшение числа вязких уравнений (варианты I, II и III) приводит к увеличению числа групп растяжений (их дроблению). Можно показать, что ни вязкость, ни (не)сжимаемость и/или (без)дивергентность поля скорости не оказывает влияния на допустимую группу симметрий, хотя и меняет вид отдельных инфинитезимальных операторов.

Список литературы

1. Терлецкий Я.П. *Парадоксы теории относительности*. М.: Наука, 1965. 120 с.
2. Хокинг С., Эллис Дж. *Крупномасштабная структура пространства-времени*. М.: Мир, 1977.
3. Логунов А.А., Лоскутов Ю.М., Мествиришвили М.А. Релятивистская теория гравитации и критика ОТО. *Теоретическая и математическая физика*. 1987. Т. 73. №2. С. 163–186.
4. Belevich M. Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion. *Acta Mechanica*, 2003, vol. 161, pp. 65–80.
5. Belevich M. Causal description of heat and mass transfer. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2004, vol. 37, no. 8, pp. 3053–3069.
6. Belevich M. Relationship between standard and causal fluid models. *Acta Mechanica*, 2005, vol. 180, pp. 83–106.
7. Belevich M. Non-relativistic abstract continuum mechanics and its possible physical interpretations. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2008, vol. 41, 045401. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/4/045401>
8. Belevich M. On the continuity equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2009, vol. 42, 375502. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/37/375502>
9. Belevich M. Symmetry properties of the causal heat equations. *Acta Mechanica*, 2013, vol. 224, pp. 587–596.
10. Belevich M. Thermodynamics from an observer's viewpoint (on the example of the viscous fluid). *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2014, 26:303–320. <https://doi.org/10.1007/s00161-013-0303-z>
11. *Физическая энциклопедия*. Т. IV. Большая рос. энцикл., 1994. С. 119–121.
12. Эренфест П. Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения? В кн.: Горелик Г.Е. Размерность пространства: историко-методологический анализ. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 197–205.
13. Шварц Л. *Анализ*. Т.1. М.: Мир, 1972. 824 с.
14. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. М.: Наука, 1973.
15. Шутц Б. *Геометрические методы математической физики*. М.: Мир, 1984.
16. Ignatowsky W.V. Einige allgemeine Bemerkungen über das Relativitätsprinzip. *Physikalische Zeitschrift*, 1910, 11: 972–976. (Перевод: *Игнатовский В.С.* Некоторые общие замечания к принципу относительности http://synset.com/ru/Релятивистский_мир)
17. Паули В. *Теория относительности*. М.: Наука, 1991.
18. Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 1905, 17, pp. 890–921. <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>
19. Болотовский В.М., Гинзбург В.Л. Эффект Вавилова-Черенкова и эффект Доплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме. *УФН*. 1972. Т. 106. Вып. 4. 577–592.
20. Эйнштейн А. *Собрание научных трудов*. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 53.
21. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1968.

22. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: ИЛ, 1963.
23. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.
24. Lloyd S. P. The infinitesimal group of the Navier-Stokes equations. *Acta Mechanica*, 1981, vol. 38, pp. 85–98.
25. Олвер П. *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*. М.: Мир, 1989.

References

1. Terletskiy Ya.P. Paradoxes of the theory of relativity. Moscow: Nauka Publ., 1963. 120 p. (in Russian)
2. Hoking S.W., Ellis G.F.R. *The large-scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
3. Logunov A.A., Logunov Yu.M., Mestvirishvili M.A. Relativistic theory of gravity and criticism of general relativity. *Theoretical and mathematical physics*, 1987, vol.73, no. 2, pp. 163–186. (in Russian)
4. Belevich M. Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion. *Acta Mechanica*, 2003, vol. 161, pp. 65–80.
5. Belevich M. Causal description of heat and mass transfer. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2004, vol. 37, no. 8, pp. 3053–3069.
6. Belevich M. Relationship between standard and causal fluid models. *Acta Mechanica*, 2005, vol. 180, pp. 83–106.
7. Belevich M. Non-relativistic abstract continuum mechanics and its possible physical interpretations. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2008, vol. 41, 045401. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/4/045401>
8. Belevich M. On the continuity equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2009, vol. 42, 375502. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/37/375502>
9. Belevich M. Symmetry properties of the causal heat equations. *Acta Mechanica*, 2013, vol. 224, pp. 587–596.
10. Belevich M. Thermodynamics from an observer's viewpoint (on the example of the viscous fluid). *Continuum Mech. Thermodyn*, 2014, 26:303-320. <https://doi.org/10.1007/s00161-013-0303-z>
11. *Physical Encyclopedia*, vol. IV. Big Russian Encyclopedia Publ., 1994. pp. 119–121. (in Russian)
12. Ehrenfest P. In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions? // Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. 1917, vol. 20, pp. 200–209.
13. Schwartz L. *Analyse Mathématique*. vol.1. Hermann, 1967.
14. Sedov L.I. *Mechanics of continuous media*. Vol.1. River Edge, NJ: World Scientific, 1997.
15. Schutz B. F. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
16. Ignatowsky W.V. Einige allgemeine Bemerkungen über das Relativitätsprinzip. *Physikalische Zeitschrift*, 1910, 11, pp. 972–976.
17. Pauli W. *Theory of relativity*. New York: Pergamon, 1958.
18. Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 1905, 17, pp. 890–921. <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>
19. Bolotovskiy B.M., Ginzburg V.L. The Vavilov-Cherenkov effect and the Doppler effect when sources move faster than the speed of light in vacuum. *Advances in the physical sciences*, 1972, vol. 106, issue. 4, pp. 577–592. (in Russian)
20. Einstein A. *Ann. d. Phys.*, 1907, 23, 371.
21. Kolmogorov A.N., Fomon S.V. *Introductory Real Analysis*. New York: Dover Publications, 1975.
22. Serrin J. *Mathematical principles of classical fluid mechanics*. *Handbuch der Physik, Bd VIII/1*. Springer Verlag, 1959, pp. 125–263.
23. Ovsyannikov L.V. *Group analysis of differential equations*. Moscow: Nauka Publ., 1978. (in Russian)
24. Lloyd S. P. The infinitesimal group of the Navier-Stokes equations. *Acta Mechanica*, 1981, vol. 38, pp. 85–98.
25. Olver P. J. *Applications of Lie groups to differential equations*. Springer-Verlag, 1986.

Авторы

Белевич Михаил Юрьевич, к.ф.-м.н., ведущий научн. сотр., институт океанологии им. П.П.Ширшова, РАН, г. Москва, 117997, Россия; доцент, Российский Государственный Гидрометеорологический университет, г. Санкт-Петербург, 195112, Россия
E-mail: mbelevich@ioras.nw.ru, mbelevich@yahoo.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Белевич М. Ю. Механика континуума с точки зрения наблюдателя (вариант релятивистской теории поля, свободный от ряда известных парадоксов). *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2022. № 38. С. 20—63.

Authors

Belevich Michael, PhD, Leading Research Associate, Shirshov Institute of Oceanology, RAS, Moscow, 117997, Russia; Associate Professor, Russian State Hydrometeorological University, St.Petersburg, 195112, Russia
E-mail: mbelevich@ioras.nw.ru, mbelevich@yahoo.com

Please cite this article in English as:

Belevich M. Continuum mechanics from an observer's viewpoint (a variant of relativistic field theory free from some known paradoxes). *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2022, no. 38, pp. 20–63.