

УДК 524.882

© Ишкаева В. А., Сушков С. В., 2022

ТЕНЬ КРОВОЙ НОРЫ ЭЛЛИСА–БРОННИКОВА *Ишкаева В. А.^{а,1}, Сушков С. В.^{а,2}^а Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

В работе построены тени невращающейся и медленно вращающейся кротовых нор Эллиса–Бронникова, исследованы характеристики теней в зависимости от параметров кротовых нор, проведено сравнение размеров теней черной дыры Шварцшильда и невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова и теней черной дыры Керра и медленно вращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова.

Ключевые слова: черная дыра; кротовая нора; тень кротовой норы.

THE SHADOW OF THE ELLIS–BRONNIKOV WORMHOLEIshkaeva V. A.^{а,1}, Sushkov S. V.^{а,2}^а Kazan State University, Kazan, 420008, Russia.

In this paper, the shadows of the non-rotating and slowly rotating Ellis–Bronnikov wormholes are constructed, the characteristics of the shadows are investigated depending on the parameters of the wormhole, and a comparison of the sizes of the shadows of the Schwarzschild black hole and the Ellis–Bronnikov wormhole and a comparison of the shadows of a Kerr black hole and a slowly rotating Ellis–Bronnikov wormhole are made.

Keywords: black hole; wormhole; wormhole shadow.

PACS: 04.70.-s, 04.90.+e

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2022.2.26-42

Введение

Астрофизические наблюдения последних лет говорят о том, что в центрах галактик находятся сверхмассивные компактные объекты, которые на данный момент отождествляются со сверхмассивными черными дырами. Черная дыра — область пространства–времени, гравитационное притяжение которой настолько велико, что покинуть ее не может даже свет. Изучение таких объектов представляет для современной физики огромный интерес, поскольку позволяет проверить является ли общепринятая на данный момент теория гравитации Эйнштейна верной.

Черные дыры, как решение уравнений Эйнштейна, были открыты Карлом Шварцшильдом в 1915 году и первое время считались лишь теоретическими объектами. Однако за последние десятилетия накопилось очень много наблюдательных данных, подтверждающих, что черные дыры существуют, хотя до недавнего времени никто на прямую не “видел” черную дыру. Конечно, саму черную дыру увидеть невозможно, однако она обладает настолько сильным гравитационным полем, что лучи света, проходящие мимо черной дыры, не только захватываются ею, но и очень сильно отклоняются и даже могут двигаться по циклическим орбитам. За счет этого далекий наблюдатель будет видеть черную дыру, как темное пятно на фоне источников света. Он будет

*Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030» Казанского федерального университета и частично поддержана грантом РНФ № 21-12-00130.

¹E-mail: ishkaeva.valeria@mail.ru

²E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

видеть “тень”. Ее формирование легче объяснить, если рассмотреть наоборот свет идущий от наблюдателя к черной дыре (рис. 1). Тогда лучи разделятся на 3 класса: лучи, огибающие черную дыру, лучи, падающие в нее, и лучи, которые будут бесконечно крутиться вокруг черной дыры, двигаясь по циклическим орбитам. Именно эти лучи будут формировать границу тени.

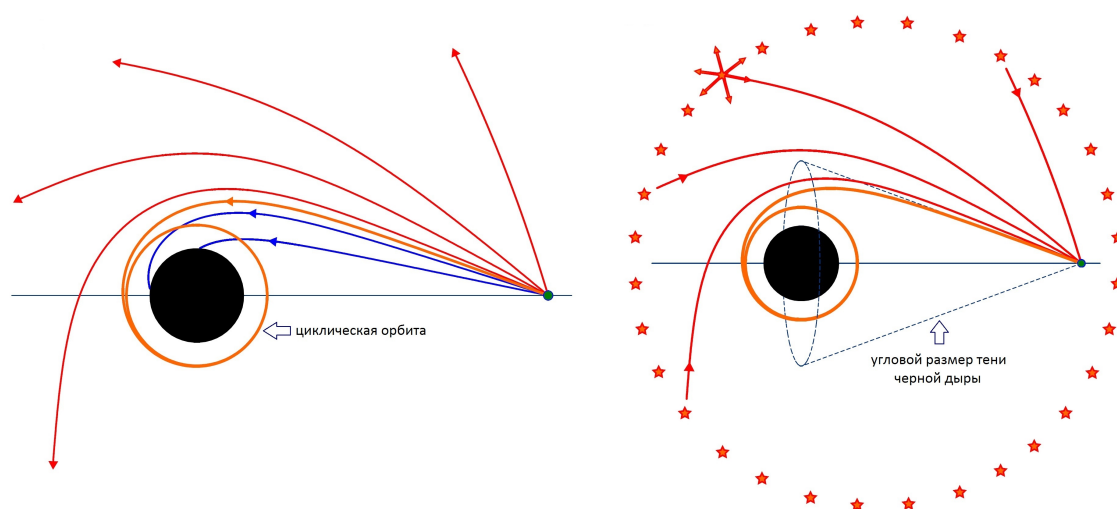


Рис. 1. Образование тени в случае сферически-симметричной черной дыры. [1]

В настоящее время разрешение телескопов достигло таких значений, что позволило получить изображения теней сверхмассивных компактных объектов в центрах галактик. В апреле 2019 года научной коллаборацией Event Horizon Telescope (Телескоп Горизонта Событий) было опубликовано изображение сверхмассивного компактного объекта в центре галактики M87 [2], а в мае 2022 года — изображение объекта в центре нашей Галактики [3]. Однако черные дыры — не единственные объекты, обладающие тенью. Так в качестве сверхмассивных компактных объектов в центрах галактик могут выступать и кротовые норы. И в зависимости от того, чем является объект, черной дырой или кротовой норой, размер и форма наблюдаемой тени будут различны.

Кротовая нора — это структура пространства–времени с нетривиальной топологией, соединяющая различные пространственные области одной и той же вселенной или две разные вселенные. Кротовая нора в каждый момент времени представляет собой тоннель, самая узкая часть которого называется горловиной.

Кротовые норы как решения уравнений гравитационного поля были впервые получены А. Эйнштейном и Н. Розеном [4] в 1935 году. Само понятие “кротовая нора” было введено Ч.В. Мизнером и Д.А. Уиллером в работе [5]. После было опубликовано всего несколько работ, посвященных кротовым норам [6–10]. Среди которых в 1973 г. Г.Дж. Эллисом [6] и, независимо, К.А. Бронниковым [7] была получена первая проходима кротовая нора (позже названная кротовой норой Эллиса–Бронникова) как решение уравнений вакуумного поля Эйнштейна, дополненного фантомным скалярным полем. Однако интерес к этим объектам резко возрос после выхода работ М.С. Морриса и К.С. Торна [11,12] в 1988 году. В данных работах обсуждались теоретические перспективы использования проходимых кротовых нор для межзвездных путешествий и было показано, что в рамках гравитации Эйнштейна для существования проходимой кротовой норы требуется «экзотическая» материя с отрицательным давлением, нарушающая т.н. светоподобное энергетическое условие и создающая сильное гравитационное отталкивание и препятствующей схлопыванию норы. На сегодняшний день есть много литературы, посвященной различным аспектам физики кротовых нор, в том числе и получению решений типа “кротовые норы” из уравнений Эйнштейна, например [13–15].

Хоть в настоящее время кротовые норы хорошо изучены теоретически, пока они остаются

гипотетическими объектами, не обнаруженными астрофизическими методами. Одним из методов обнаружения кротовых нор является использование их свойств гравитационного линзирования, поскольку с астрофизической точки зрения кротовые норы — это массивные объекты, искривляющие траектории проходящих мимо них фотонов. В результате кротовые норы могут играть роль гравитационных линз, образующих круги и дуги Эйнштейна как изображения далеких галактик. Первой работой, в которой обсуждалось гравитационное линзирование в пространстве–времени кротовой норы, была работа Л. Четуани и Г. Клемента [16]. Позднее проблемы слабого и сильного гравитационного линзирования в геометрии кротовых нор изучались в многочисленных работах [17–23].

Более наглядным методом обнаружения кротовых нор является наблюдение их тени. Поскольку в пространстве–времени кротовой норы, так же как и в пространстве–времени черной дыры, существует фотонная сфера, их можно рассматривать в качестве кандидатов на роль сверхмассивных объектов в центрах галактик. По изображениям этих объектов можно будет определять является ли объект кротовой норой и в положительном случае определять ее параметры. Тени кротовых нор изучались в работах [1, 24–27] для статических сферически–симметричных конфигураций и в [28–33] для вращающихся кротовых нор.

Целью данной работы было получение и анализ выражений для границ теней невращающейся [6, 7] и медленно вращающейся [34] кротовых нор Эллиса–Бронникова.

1. Невращающаяся кротовая нора Эллиса–Бронникова

В данной главе мы исследуем пространство–время невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова, получаем и решаем уравнения геодезических для фотонов, двигающихся в пространстве–времени данной кротовой норы. Из уравнений геодезических мы получаем положение циклической орбиты и прицельный параметр фотонов, которые по ней движутся. Далее, используя эти параметры и выражения для координат фотона на небе наблюдателя, мы получаем выражение для границы тени данной кротовой норы. В конце главы мы сравниваем размеры теней рассматриваемой кротовой норы и черной дыры Шварцшильда и делаем оценку для размера тени сверхмассивного компактного объекта в центре галактики M87.

1.1. Метрика невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова

Мы используем метрику невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова, которую можно представить в следующем виде [23]:

$$ds^2 = -e^{2u(r)} dt^2 + e^{-2u(r)} dr^2 + e^{-2u(r)} (r^2 + a^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.1)$$

где радиальная координата r меняется от $-\infty$ до ∞ , m и a — неотрицательные параметры кротовой норы и

$$u(r) = \frac{m}{a} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right). \quad (1.2)$$

Принимая во внимание следующую асимптотику:

$$e^{2u(r)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) + O(r^{-2}), \quad (1.3)$$

$$e^{2u(r)} \Big|_{r \rightarrow -\infty} = e^{-\frac{2\pi m}{a}} \left(1 + \frac{2m}{|r|} \right) + O(r^{-2}), \quad (1.4)$$

видно, что пространство–время с метрикой (1.1) обладает двумя асимптотически плоскими областями, в одной из которых асимптотическая масса кротовой норы $M|_{r \rightarrow \infty} = m$, а в другой $M|_{r \rightarrow -\infty} = -me^{-\frac{2\pi m}{a}}$. Эти области соединены горловиной, радиус которой соответствует минимуму радиуса двумерной сферы

$$R^2(r) = e^{-2u(r)} (r^2 + a^2). \quad (1.5)$$

Минимум $R(r)$ достигается при $r_{th} = m$ и равняется

$$R_{th} = \exp \left[-\frac{m}{a} \left(\arctan \frac{m}{a} - \frac{\pi}{2} \right) \right] (m^2 + a^2)^{1/2}. \quad (1.6)$$

При $m = 0$, метрика (1.1) сводится к метрике простейшей безмассовой кротовой норы

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + a^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.7)$$

Линзирующие свойства безмассовой кротовой норы Эллиса–Бронникова (1.7) были хорошо изучены, например, в работах [1, 26, 29, 35].

1.2. Уравнения геодезических для фотонов

Уравнения геодезических для фотонов могут быть получены решением уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + H = 0, \quad (1.8)$$

где действие $S = S(x^\mu, \lambda)$ есть функция координат x^μ и аффинного параметра λ , $H \equiv g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu / 2$ — Гамильтониан и $p_\mu \equiv \partial S / \partial x^\mu$ — ковариантные компоненты импульса фотона.

Поскольку рассматриваемое пространство–время сферически–симметрично, без потери общности можно исследовать движение фотонов в плоскости $\theta = \pi/2$. Тогда, учитывая цикличность координат t и ϕ , действие S записывается в виде [36]:

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L\phi + S_r(r), \quad (1.9)$$

где масса $\mu^2 \equiv -p_\mu p^\mu = 0$, полная энергия $E \equiv -p_t$ и угловой момент $L \equiv p_\phi$ фотонов — константы вдоль геодезической.

Таким образом из уравнений (1.8) и (1.9)

$$\left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 = E^2 - \frac{e^{\frac{4m}{a} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right)}}{r^2 + a^2} L^2. \quad (1.10)$$

Учитывая

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}, \quad (1.11)$$

уравнения геодезических для фотонов записываются следующим образом:

$$\frac{dt}{d\lambda} = E \cdot e^{\frac{-2m}{a} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (1.12)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm E \sqrt{1 - \frac{e^{\frac{4m}{a} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right)}}{r^2 + a^2} b^2}, \quad (1.13)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = e^{\frac{2m}{a} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right)} \frac{L}{r^2 + a^2}, \quad (1.14)$$

где $b = L/E$ — прицельный параметр.

Уравнения геодезических (1.12)–(1.14) мы решали численными методами для различных параметров кротовой норы m и a . Начальные условия выбирались так, чтобы можно было считать, что фотоны начинают двигаться с бесконечности ($r_0 \gg m$), параллельно оси x , обладая различными прицельными параметрами $b = L/E$. Поведение фотонов по разные стороны от горловины будет одинаковым только для безмассовой кротовой норы Эллиса–Бронникова. Если параметр $m \neq 0$, то траектории фотонов будут сильно отличаться. В области $r > r_{th}$ горловина кротовой норы будет выступать притягивающим центром и, в зависимости от прицельного параметра b , фотоны будут огибать кротовую нору ($b > b_{ph}$), падать в нее ($b < b_{ph}$) или двигаться по циклическим орбитам ($b = b_{ph}$). В области $r < r_{th}$ горловина будет по–прежнему "притягивать" фотоны с параметром $b < b_{ph}$, так что они будут уходить в область $r > r_{th}$, но для фотонов с $b > b_{ph}$ горловина будет выступать отталкивающим центром. Фотоны с $b = b_{ph}$ будут проходить через кротовую нору в область $r > r_{th}$ и также двигаться по циклическим орбитам. Примеры решений уравнений (1.12)–(1.14) представлены на рис. 2.

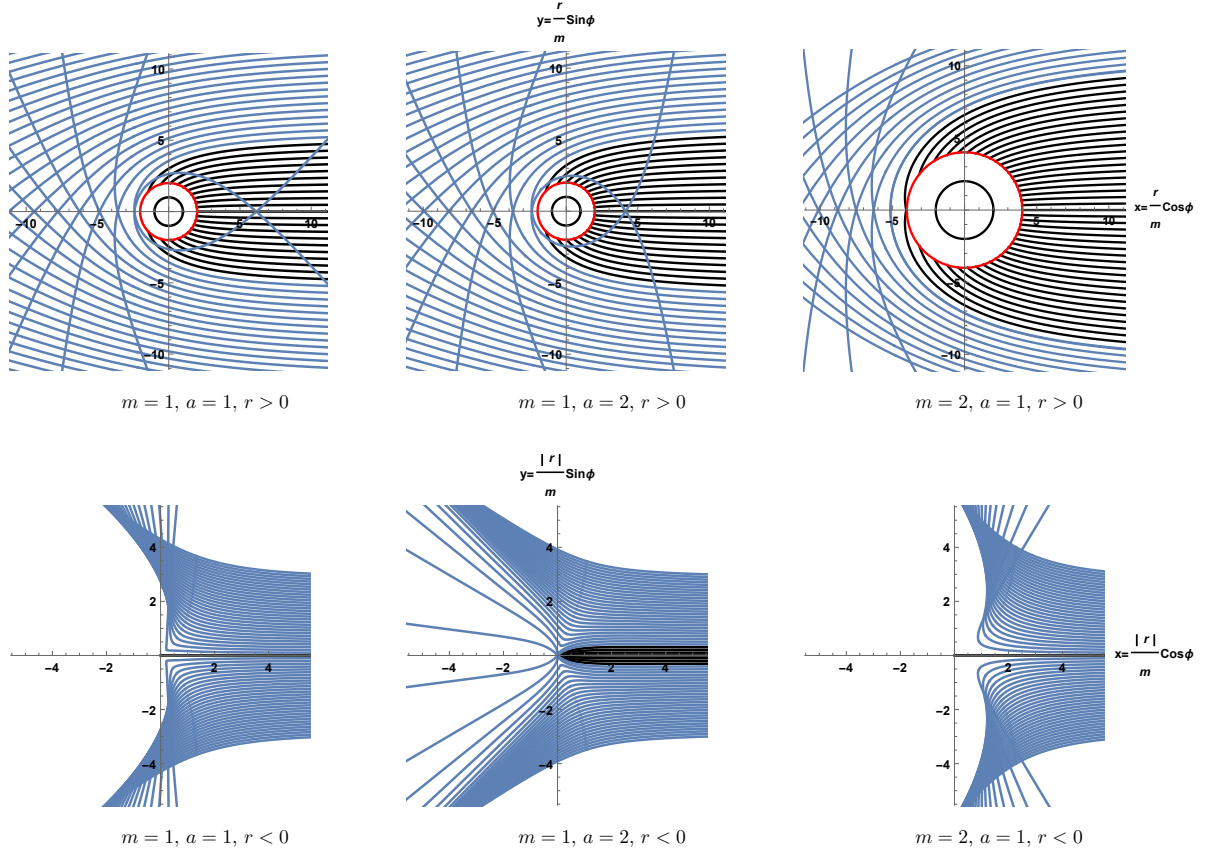


Рис. 2. Траектории фотонов $r(\phi)$ в пространстве-времени невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова. Черным цветом показаны траектории фотонов, уходящих через кротовую нору в другую область пространства, синим — огибающих ее. Красная окружность — циклическая орбита. Черная окружность — горловина.

1.3. Циклическая орбита

Поскольку граница тени кротовой норы формируется фотонами, которые движутся по циклической орбите (рис. 1), необходимо получить их прицельный параметр b_{ph} . Положение циклической орбиты r_{ph} задается следующими условиями [37]:

$$\left. \frac{dr}{d\lambda} \right|_{r=r_{ph}} = 0, \quad \left. \frac{d^2 r}{d\lambda^2} \right|_{r=r_{ph}} = 0. \quad (1.15)$$

Используя уравнение (1.13), данные условия можно переписать в виде:

$$\frac{e^{\frac{4m}{a} \left(\arctan \frac{r_{ph}}{a} - \frac{\pi}{2} \right)}}{r_{ph}^2 + a^2} b_{ph}^2 = 1, \quad (1.16)$$

$$\frac{e^{\frac{4m}{a} \left(\arctan \frac{r_{ph}}{a} - \frac{\pi}{2} \right)}}{r_{ph}^2 + a^2} b_{ph}^2 (r_{ph} - 2m) = 0. \quad (1.17)$$

Решая систему этих уравнений, получим выражения для положения циклической орбиты r_{ph} и прицельного параметра фотонов, двигающихся по данной орбите, b_{ph} через параметры кротовой норы:

$$r_{ph} = 2m, \quad |b_{ph}| = e^{\frac{-2m}{a} \left(\arctan \frac{2m}{a} - \frac{\pi}{2} \right)} \sqrt{4m^2 + a^2}. \quad (1.18)$$

Важно отметить, что для массивной кротовой норы Эллиса–Бронникова положение циклической орбиты $r_{ph} = 2m$ не совпадает с положением горловины $r_{th} = m$ (рис. 3).

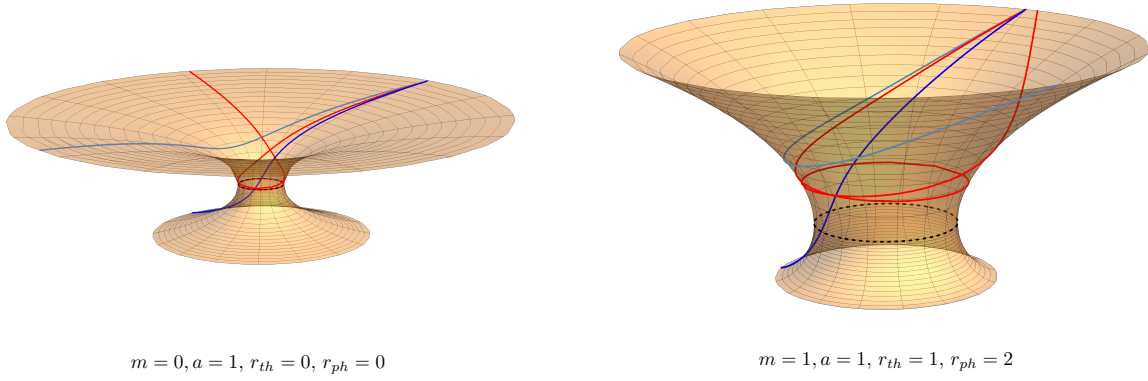


Рис. 3. Траектории фотонов в пространстве-времени кротовой норы Эллиса–Бронникова на диаграммах погружения. Красные кривые — траектории фотонов, двигающихся по циклическим орбитам; черная пунктирная окружность — горловина.

1.4. Граница тени невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова

На небесной сфере наблюдателя координаты приходящего луча света записываются следующим образом (рис. 4) [38]:

$$\alpha_i = -r_O^2 \sin \theta_O \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r_O}, \quad \beta_i = r_O^2 \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r_O}, \quad (1.19)$$

где r_O — расстояние от кротовой норы до наблюдателя, θ_O — угол между осью вращения кротовой норы и линией, соединяющей наблюдателя и кротовую нору.

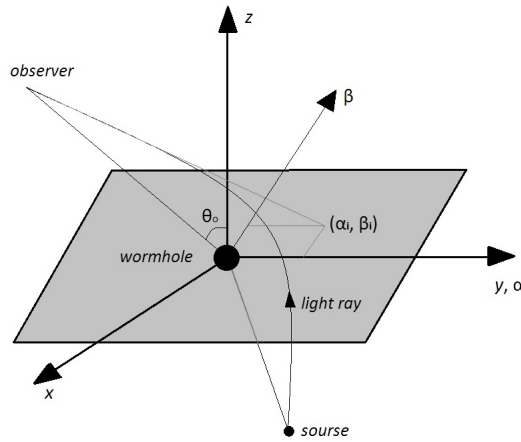


Рис. 4. Координаты приходящего луча света (α_i, β_i) на небе наблюдателя.

Граница тени кротовой норы формируется фотонами, движущимися по циклической орбите. Поскольку пространство-время невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова сферически симметрично, граница тени будет представлять собой окружность. Радиус этой окружности находится из уравнений геодезических (1.13), (1.14) и выражений (1.18). Полагая $|r_O| \gg m$ и $\theta_O = \pi/2$ и учитывая асимптотическое поведение функций $e^{2u(r)}$ (1.3), (1.4), получим для углового радиуса тени невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова:

$$\alpha|_{r \rightarrow +\infty} = \frac{|b_{ph}|}{r_O}, \quad \alpha|_{r \rightarrow -\infty} = e^{\frac{-2\pi m}{a}} \frac{|b_{ph}|}{r_O}. \quad (1.20)$$

Границы теней кротовой норы Эллиса–Бронникова для различных ее параметров m и a в области пространства $r > 0$ представлены на рис. 5. Поскольку в пространстве-времени с $r < 0$

кротовая нора Эллиса–Бронникова ведет себя как объект с отрицательной массой, которые не наблюдаются в нашей Вселенной, в дальнейшем мы будем рассматривать только пространство–время с $r > 0$.

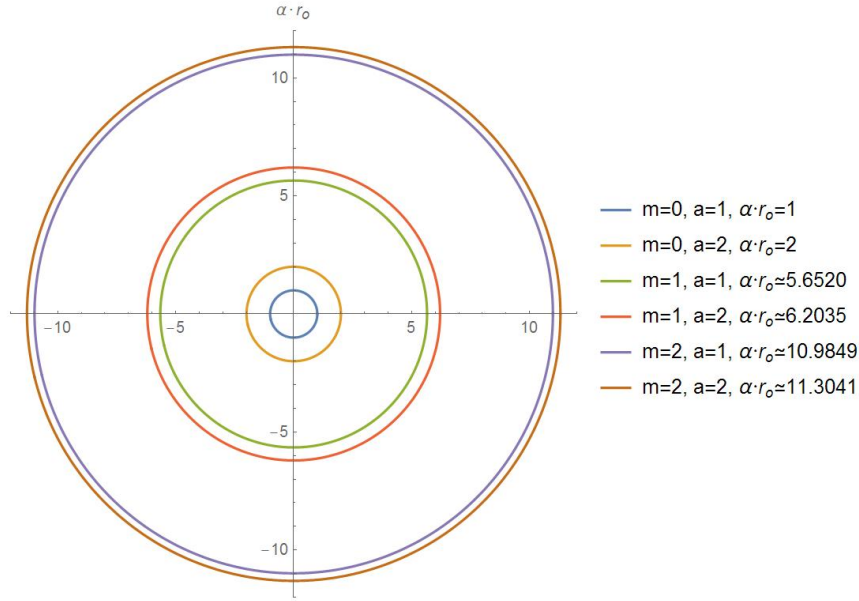


Рис. 5. Границы тени невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова для различных параметров m и a в области пространства–времени $r > 0$.

1.5. Сравнение размеров теней кротовой норы Эллиса–Бронникова и черной дыры Шварцшильда

Размер тени черной дыры Шварцшильда задается прицельным параметром [39]

$$|b_{phSchw}| = 3\sqrt{3}m_{Schw}. \quad (1.21)$$

Для получения количественных результатов мы использовали параметры сверхмассивного компактного объекта в центре галактики M87, масса которого $m \approx 6.6 \cdot 10^9 M_\odot$, а расстояние до которого $r_O \approx 50.6 \cdot 10^{19}$ км, где $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца. Тогда угловой радиус тени кротовой норы Эллиса–Бронникова при параметре $a = r_g = 2Gm/c^2$ (рис. 6, красная окружность):

$$\alpha_{EB} = \frac{|b_{phEB}|}{r_O} = \frac{2\sqrt{2}e^{\pi/2 - \arctan 1} Gm}{r_O c^2} \approx 25\mu s, \quad (1.22)$$

а угловой радиус тени черной дыры Шварцшильда (рис. 6, черная окружность)

$$\alpha_{Schw} = \frac{|b_{phSchw}|}{r_O} = \frac{3\sqrt{3} Gm}{r_O c^2} \approx 21\mu s, \quad (1.23)$$

где G — гравитационная постоянная, c — скорость света в вакууме.

Важно заметить, что при любом параметре a тень кротовой норы Эллиса–Бронникова будет больше тени черной дыры Шварцшильда той же массы m и наблюдаемой с того же расстояния $r_O \gg m$, поскольку

$$u(r) = \frac{m}{a} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right) \Big|_{a \rightarrow 0} = -\frac{m}{r}, \quad (1.24)$$

$$|b_{phEB}| = e^{-2u(r=2m)} \sqrt{4m^2 + a^2} \Big|_{a \rightarrow 0} = 2em > 3\sqrt{3}m = |b_{phSchw}|. \quad (1.25)$$

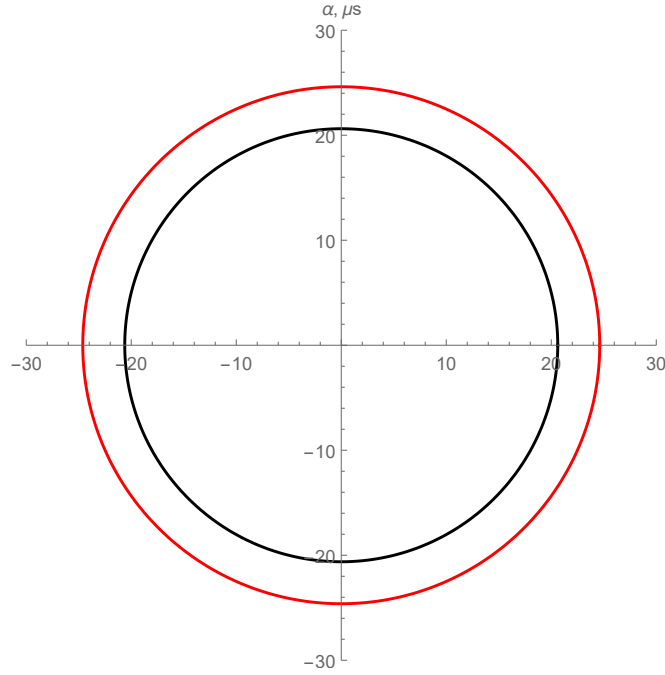


Рис. 6. Размеры теней кротовой норы Эллиса–Бронникова (красная окружность) и черной дыры Шварцшильда (черная окружность). Параметры m и r_O взяты для сверхмассивного компактного объекта в центре галактики M87.

2. Медленно вращающаяся кротовая нора Эллиса–Бронникова

Поскольку все астрофизические тела вращаются, необходимо также рассматривать модели вращающихся кротовых нор. В данной главе мы исследуем пространство–время медленно вращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова, получаем и решаем уравнения геодезических для фотонов. Из уравнений геодезических мы получаем положение фотонной сферы и прицельные параметры фотонов, которые по ней движутся. Далее мы получаем выражение для границы тени рассматриваемой кротовой норы и проводим сравнение границ теней данной кротовой норы и черной дыры Керра. Также мы делаем оценки для границы тени сверхмассивного компактного объекта в центре галактики M87.

2.1. Метрика медленно вращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова

Метрика медленно вращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова была получена С.В. Сушковым и П.Е. Кашаргиным в работе [34]:

$$ds^2 = -e^{2u(r)} dt^2 + e^{-2u(r)} (dr^2 + (r^2 + a^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi^2 - \omega dt d\phi))), \quad (2.1)$$

где радиальная координата r меняется от $-\infty$ до ∞ , m и a — неотрицательные параметры, $u(r) = \frac{m}{a} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right)$ и угловая скорость вращения

$$\omega(r) = \frac{\alpha}{a [1 - e^{-2\pi m/a} (1 + 8m^2/a^2)]} \left[1 - e^{4u} \left(1 + \frac{4m(r + 2m)}{r^2 + a^2} \right) \right], \quad (2.2)$$

где безразмерный параметр вращения $\alpha = \frac{\Omega a}{c} \ll 1$, $\Omega = \omega|_{r=r_{th}, \theta=\pi/2}$ — экваториальная угловая скорость вращения горловины, c — скорость света.

Рассмотрим асимптотическое поведение $\omega(r)$. При $r \rightarrow \infty$

$$\omega(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{8\alpha m(a^2 + 4m^2)}{3a [1 - e^{-2\pi m/a} (1 + 8m^2/a^2)]} r^{-3} \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Таким образом система координат удаленного наблюдателя не вращается и измеряемый им угловой момент кротовой норы

$$J = \frac{r^3 \omega}{2} = \frac{4\alpha m(a^2 + 4m^2)}{3a [1 - e^{-2\pi m/a} (1 + 8m^2/a^2)]}. \quad (2.4)$$

По другую стороны от горловины при $r \rightarrow -\infty$

$$\omega(r)|_{r \rightarrow -\infty} = \frac{\alpha \left(1 - e^{-\frac{4\pi m}{a}}\right)}{a \left[1 - e^{-\frac{2\pi m}{a}} \left(1 + \frac{8m^2}{a^2}\right)\right]} - \frac{8\alpha m(a^2 + 4m^2)e^{-\frac{4\pi m}{a}}}{3a \left[1 - e^{-\frac{2\pi m}{a}} \left(1 + \frac{8m^2}{a^2}\right)\right]} |r|^{-3}. \quad (2.5)$$

Видно, что в данной области пространства угловая скорость вращения стремится к постоянному значению

$$\omega_0 = \frac{\alpha \left(1 - e^{-4\pi m/a}\right)}{a \left[1 - e^{-2\pi m/a} (1 + 8m^2/a^2)\right]}. \quad (2.6)$$

Следовательно, при $r \rightarrow -\infty$ система координат вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 .

Выпишем также контравариантные компоненты метрического тензора g^{ij} , оставляя только линейные слагаемые по малому параметру вращения α :

$$g^{tt} = \frac{-e^{2u}}{e^{4u} + (r^2 + a^2)\omega^2 \sin^2 \theta} \approx -e^{-2u}, \quad (2.7)$$

$$g^{t\phi} = g^{\phi t} = \frac{-\omega e^{2u}}{e^{4u} + (r^2 + a^2)\omega^2 \sin^2 \theta} \approx -\omega e^{-2u}, \quad (2.8)$$

$$g^{rr} = e^{2u}, \quad (2.9)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{e^{2u}}{r^2 + a^2}, \quad (2.10)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{e^{6u}}{(r^2 + a^2) \sin^2 \theta (e^{4u} + (r^2 + a^2)\omega^2 \sin^2 \theta)} \approx \frac{e^{2u}}{(r^2 + a^2) \sin^2 \theta}. \quad (2.11)$$

2.2. Уравнения геодезических для фотонов

Уравнения геодезических для фотонов, двигающихся в пространстве-времени кротовой норы (2.1), будем искать, решая уравнение Гамильтона-Якоби (1.8). Поскольку рассматриваемая кротовая нора вращается, мы не можем рассматривать движение фотонов только в экваториальной плоскости. Следовательно, действие S будет зависеть не только от r , но и от θ . Аналогично (1.9) действие можно записать в виде [36]:

$$S = -Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в уравнение Гамильтона-Якоби (1.8), получим:

$$0 = g^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} = g^{tt} E^2 + g^{\phi\phi} L^2 - 2g^{t\phi} EL + g^{rr} \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2. \quad (2.13)$$

Используя явные выражения для контравариантных компонент метрического тензора (2.7)–(2.11) и оставляя только линейные слагаемые по параметру вращения α , выражение (2.13) можно записать в виде

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} = e^{-4u(r)}(r^2 + a^2) \left[E^2 - 2\omega(r)EL - e^{4u(r)} \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 \right]. \quad (2.14)$$

Поскольку левая часть уравнения (2.14) зависит только от θ , а правая только от r , то обе его части равны константе K . Тогда для искомого производных действия получим:

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = K - \frac{L^2}{\sin^2 \theta}, \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = \frac{E^2 - 2\omega(r)EL}{e^{4u(r)}} - \frac{K}{r^2 + a^2}. \quad (2.16)$$

Используя (1.11) и вводя прицельные параметры фотона $\xi = L/E$ и $\eta = K/E^2$, получим уравнения геодезических для фотонов:

$$E \frac{dt}{d\lambda} = e^{-2u(r)} (1 - \xi\omega(r)), \quad (2.17)$$

$$E \frac{dr}{d\lambda} = \pm \sqrt{1 - 2\xi\omega(r) - \eta \frac{e^{4u(r)}}{r^2 + a^2}}, \quad (2.18)$$

$$E \frac{d\theta}{d\lambda} = \pm \frac{e^{2u(r)}}{r^2 + a^2} \sqrt{\eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}}, \quad (2.19)$$

$$E \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\xi e^{2u(r)}}{(r^2 + a^2) \sin^2 \theta} + e^{-2u(r)} \omega(r). \quad (2.20)$$

Численное решение этих уравнений при параметрах кротовой норы $m = 1$, $a = 1$, $\alpha = 0.001$ представлено на рис. 7.

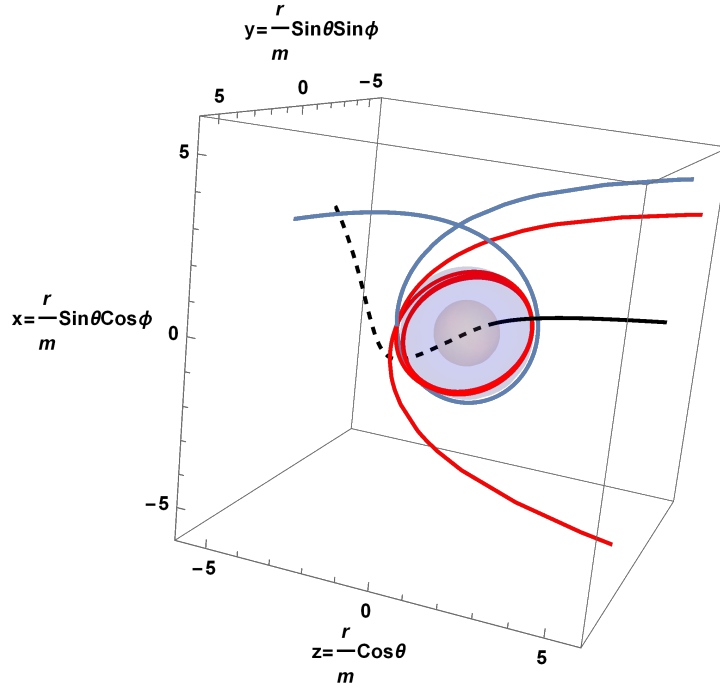


Рис. 7. Траектории фотонов в пространстве-времени кротовой норы (2.1) с параметрами $m = 1$, $a = 1$, $\alpha = 0.001$. Голубая кривая — траектория фотона с параметрами $\xi = -0.1$, $\eta = 32$, красная кривая — $\xi \approx -0.39$, $\eta \approx 31.95$, черная кривая — $\xi = 0$, $\eta = 1$. Синяя сфера — фотонная сфера $r_{ph} \approx 2$, оранжевая — горловина $r_{th} = 1$.

2.3. Фотонная сфера

Положение фотонной сферы r_{ph} в пространстве-времени кротовой норы (2.1) и прицельные параметры фотонов, которые по ней движутся, задаются теми же уравнениями (1.15), что и циклическая орбита в пространстве-времени невращающейся кротовой норы (1.1). Используя урав-

нение (2.18), эти условия можно переписать в виде:

$$0 = 1 - 2\xi\omega(r_{ph}) - \eta \frac{e^{4u(r_{ph})}}{r_{ph}^2 + a^2}, \quad (2.21)$$

$$0 = \frac{2e^{4u(r_{ph})}}{(r_{ph}^2 + a^2)^2} \left[\frac{8\alpha\xi m(a^2 + 4m^2)}{a[1 - e^{-2\pi m/a}(1 + 8m^2/a^2)]} - \eta(2m - r_{ph}) \right]. \quad (2.22)$$

Решая эту систему, получаем прицельные параметры фотонов, которые движутся по фотонной сфере, как функции ее положения r_{ph} :

$$\xi(r_{ph}) = \left(\frac{8m\alpha e^{4u(r_{ph})}(a^2 + 4m^2)}{a(2m - r_{ph})(r_{ph}^2 + a^2)[1 - e^{-2\pi m/a}(1 + 8m^2/a^2)]} + 2\omega(r_{ph}) \right)^{-1}, \quad (2.23)$$

$$\eta(r_{ph}) = \frac{8m(a^2 + 4m^2)\alpha}{a(2m - r_{ph})[1 - e^{-2\pi m/a}(1 + 8m^2/a^2)]} \xi(r_{ph}). \quad (2.24)$$

Все допустимые положения фотонной сферы r_{ph} определяются из условия неотрицательности подкоренного выражения в уравнении (2.19) при $\sin^2 \theta = 1$:

$$\eta(r_{ph}) - \xi^2(r_{ph}) \geq 0. \quad (2.25)$$

2.4. Выражение для границы тени медленно вращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова

На небе наблюдателя координаты приходящего луча света задаются выражениями (1.19). Используя уравнения (2.18)–(2.20), координаты фотонов, приходящих к удаленному наблюдателю $r_O \gg m$, можно выразить через прицельные параметры этих фотонов:

$$\alpha_i = -\frac{\xi}{\sin \theta_O}, \quad \beta_i = \pm \sqrt{\eta - \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta_O}}. \quad (2.26)$$

Подставляя в эти выражения параметры фотонов, которые движутся по фотонным сферам, (2.23), (2.24) и отображая полученные точки на плоскости (α_i, β_i) , получим изображение границы тени кротовой норы (2.1) (рис. 8).

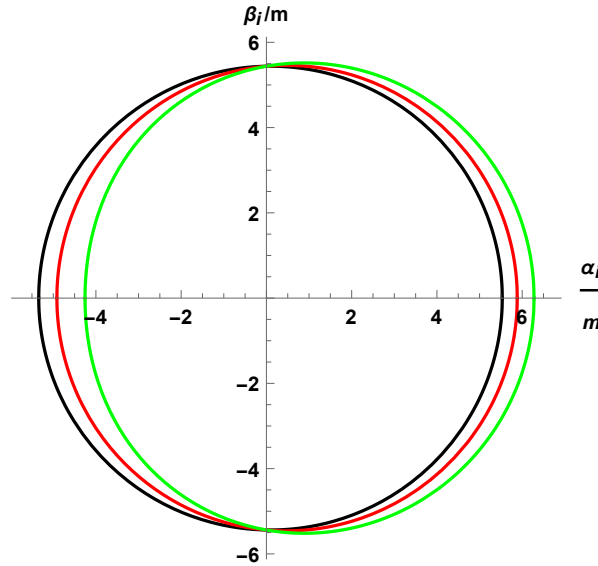


Рис. 8. Изображения границ теней кротовой норы (2.1) с параметрами $m = 1, a = 0.1$, наблюдаемых при $\theta_O = \pi/2$. Черная кривая — $\alpha = 0.001$, красная — $\alpha = 0.005$, зеленая — $\alpha = 0.01$.

2.5. Сравнение теней черной дыры Керра и медленно вращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова

Для черной дыры Керра прицельные параметры фотонов [39]:

$$\xi_K(r_{ph}) = \frac{4mr_{ph}^2 - (r_{ph} + m)(r_{ph}^2 + A^2)}{A(r_{ph} - m)}, \quad (2.27)$$

$$\eta_K(r_{ph}) = \frac{r_{ph}^3 [4A^2M - r_{ph}(r_{ph} - 3M)^2]}{A^2(r_{ph} - m)^2}, \quad (2.28)$$

где $A = J/m$ — параметр вращения, J — угловой момент, m — масса черной дыры, r_{ph} определяется из неравенства

$$4A^2M - r_{ph}(r_{ph} - 3M)^2 \geq 0. \quad (2.29)$$

Координаты приходящего луча света для удаленного наблюдателя $r_O \gg m$ [40]:

$$\alpha_{iK} = -\frac{\xi_K}{\sin(\theta_O)}, \quad (2.30)$$

$$\beta_{iK} = \pm \sqrt{\eta_K + (A - \xi_K)^2 - \left(A \sin(\theta_O) - \frac{\xi_K}{\sin(\theta_O)} \right)^2}. \quad (2.31)$$

Поскольку мы наблюдаем одно и то же астрофизическое тело, обладающее определенной массой и угловым моментом, мы должны так подобрать параметры вращения черной Керра и кротовой норы Эллиса–Бронникова, чтобы их наблюдаемые угловые моменты совпадали. Из выражения (2.4) и определения параметра вращения черной дыры получаем:

$$\frac{4\alpha m(a^2 + 4m^2)}{3a[1 - e^{-2\pi m/a}(1 + 8m^2/a^2)]} = m^2 \tilde{A}, \quad (2.32)$$

где $\tilde{A} = A/m$ — безразмерный параметр вращения. Для кротовой норы с параметром $a = 2m$ безразмерный параметр вращения черной дыры Керра $\tilde{A}$ должен быть равен:

$$\tilde{A} = \frac{16\alpha}{3(1 - 3e^{-\pi})}. \quad (2.33)$$

Для получения количественных результатов мы взяли параметры сверхмассивного компактного объекта в центре галактики M87: $m \approx 6.6 \cdot 10^9 M_\odot$, $r_o \approx 50.6 \cdot 10^{19}$ км. Тогда при параметрах кротовой норы $a = 2m$, $\alpha = 0.1$ угловые размеры ее тени составят

$$D_{EB}^\alpha = \frac{|\min \alpha_i| + \max \alpha_i}{r_O} \approx 48.6 \mu s, \quad D_{EB}^\beta = \frac{2 \max \beta_i}{r_O} \approx 49.6 \mu s. \quad (2.34)$$

Взятому значению $\alpha = 0.1$ соответствует безразмерный параметр вращения черной дыры Керра $\tilde{A} = \frac{16\alpha}{3(1 - 3e^{-\pi})} \approx 0.6$. Для данного параметра $\tilde{A}$ угловые размеры тени черной дыры Керра равны:

$$D_{Kerr}^\alpha = \frac{|\min \alpha_{iK}| + \max \alpha_{iK}}{r_O} \approx 40.2 \mu s, \quad D_{Kerr}^\beta = \frac{2 \max \beta_{iK}}{r_O} \approx 41.2 \mu s. \quad (2.35)$$

Изображение границ теней медленно вращающихся кротовой норы Эллиса–Бронникова и черной дыры Керра представлены на рис. 9.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели движение фотонов в пространстве–времени невращающейся и медленно вращающейся кротовых нор Эллиса–Бронникова, получили и решили уравнения

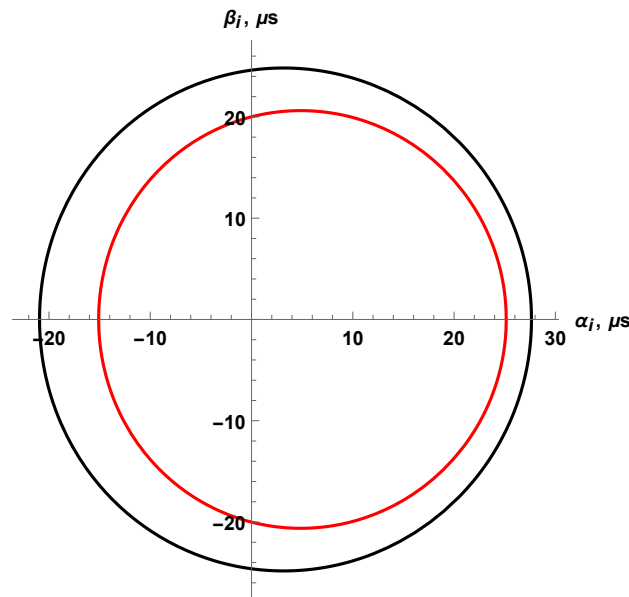


Рис. 9. Изображения границ теней медленно вращающихся кротовой норы Эллиса–Бронникова (черный) и черной дыры Керра (красный) при безразмерных параметрах вращения $\alpha = 0.1$, $\tilde{A} \approx 0.6$.

геодезических, получили параметры фотонов, которые движутся по фотонным сферам (циклическим орбитам в случае невращающейся кротовой норы) и вывели выражения для границ теней рассматриваемых кротовых нор. Также мы сравнили тени кротовых нор Эллиса–Бронникова с тенями черных дыр Шварцшильда и Керра и сделали оценки размера тени сверхмассивного компактного объекта в центре галактики M87.

По результатам работы были сделаны следующие выводы:

1. Граница тени невращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова представляет собой окружность с радиусом, зависящим от параметров кротовой норы m и a .
2. Граница тени медленно вращающейся кротовой норы Эллиса–Бронникова представляет собой деформированную окружность, причем чем больше вращение кротовой норы, тем более тень деформируется.
3. При любом параметре a тень кротовой норы Эллиса–Бронникова будет больше тени черной дыры Шварцшильда (Керра) той же массы m и момента вращения J и наблюдаемой с того же расстояния $r_O \gg m$.

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030» Казанского федерального университета и частично поддержана грантом РНФ № 21-12-00130.

Список литературы

1. Perlick V., Tsupko O.Y. Calculating black hole shadows: review of analytical studies. *Physics Reports*, 2022, vol. 947, pp. 1–39. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.10.004>
2. Akiyama K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 2019, vol. 875, no. 1, p. L1.
3. Akiyama K. et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. III. Imaging of the Galactic Center Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 2022, vol. 930, no. 2, p. L14. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac6429>

4. Einstein A., Rosen N. The particle problem in the general theory of relativity. *Physical Review*, 1935, vol. 48, no. 1, p. 73. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.73>
5. Misner C.W., Wheeler J.A. Classical physics as geometry. *Annals of physics*, 1957, vol. 2, no. 6, pp. 525–603. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(57\)90049-0](https://doi.org/10.1016/0003-4916(57)90049-0)
6. Ellis H.G. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 1973, vol. 14, no. 1, pp. 104–118. <https://doi.org/10.1063/1.1666161>
7. Bronnikov K.A. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Physica Polonica*, 1973, p. B4.
8. Ellis H.G. The evolving, flowless drainhole: A nongravitating-particle model in general relativity theory. *General Relativity and Gravitation*, 1979, vol. 10, no. 2, pp. 105–123. <https://doi.org/10.1007/BF00756794>
9. Clement G. A class of wormhole solutions to higher-dimensional general relativity. *General relativity and gravitation*, 1984, vol. 16, no. 2, pp. 131–138. <https://doi.org/10.1007/BF00762442>
10. Clement G. Axisymmetric regular multiwormhole solutions in five-dimensional general relativity. *General relativity and gravitation*, 1984, vol. 16, no. 5, pp. 477–489. <https://doi.org/10.1007/BF00762340>
11. Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 1988, vol. 56, no. 5, pp. 395–412. <https://doi.org/10.1119/1.15620>
12. Morris M.S., Thorne K.S., Yurtsever U. Wormholes, time machines, and the weak energy condition. *Physical Review Letters*, 1988, vol. 61, no. 13, p. 1446. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.1446>
13. Visser M. *Lorentzian Wormholes. From Einstein to Hawking*, Woodbury, N.Y.: American Institute of Physics, 1995, 437 p.
14. Lobo F.S. N. Exotic solutions in General Relativity: Traversable wormholes and 'warp drive' spacetimes, 2007, arXiv:0710.4474[gr-qc].
15. Chervon S.V., Fabris J.C., Fomin I.V. Black holes and wormholes in $f(R)$ gravity with a kinetic curvature scalar. *Classical and Quantum Gravity*, 2021, vol. 38, no. 11, p. 115005. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/abebf0>
16. Chetouani L., Clement G. Geometrical optics in the Ellis geometry. *General relativity and gravitation*, 1984, vol. 16, no. 2, pp. 111–119. <https://doi.org/10.1007/BF00762440>
17. Perlick V. Exact gravitational lens equation in spherically symmetric and static spacetimes. *Physical Review D*, 2004, vol. 69, no. 6, p. 064017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.064017>
18. Nandi K.K., Zhang Y.Z., Zakharov A.V. Gravitational lensing by wormholes. *Physical Review D*, 2006, vol. 74, no. 2, p. 024020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.024020>
19. Müller T. Exact geometric optics in a Morris-Thorne wormhole spacetime. *Physical Review D*, 2008, vol. 77, no. 4, p. 044043. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.044043>
20. Nakajima K., Asada H. Deflection angle of light in an Ellis wormhole geometry. *Physical Review D*, 2012, vol. 85, no. 10, p. 107501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.107501>
21. Tsukamoto N. Strong deflection limit analysis and gravitational lensing of an Ellis wormhole. *Physical Review D*, 2016, vol. 94, no. 12, p. 124001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.124001>
22. Tsukamoto N., Harada T. Light curves of light rays passing through a wormhole. *Physical Review D*, 2017, vol. 95, no. 2, p. 024030. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.024030>
23. Bronnikov K.A., Baleevskikh K.A. On gravitational lensing by symmetric and asymmetric wormholes. *Gravitation and Cosmology*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 44–49. <https://doi.org/10.1134/S020228931901002X>
24. Shaikh R. et al. A novel gravitational lensing feature by wormholes. *Physics Letters B*, 2019, vol. 789, pp. 270–275. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.12.030>
25. Wang X. et al. Novel shadows from the asymmetric thin-shell wormhole. *Physics Letters B*, 2020, vol. 811, p. 135930. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135930>
26. Bugaev M.A. et al. Gravitational lensing and wormhole shadows. *Astronomy Reports*, 2021, vol. 65, no. 12, pp. 1185–1193. <https://doi.org/10.1134/S1063772921120027>
27. Jusufi K. et al. Constraining Wormhole Geometries using the Orbit of S2 Star and the Event Horizon Telescope, 2021. arXiv:2106.08070 [gr-qc].
28. Nedkova P.G., Tinchev V.K., Yazadjiev S.S. Shadow of a rotating traversable wormhole. *Physical Review D*, 2013, vol. 88, no. 12, p. 124019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.124019>

29. Ohgami T., Sakai N. Wormhole shadows in rotating dust. *Physical Review D*, 2016, vol. 94, no. 6, p. 064071. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.064071>
30. Shaikh R. Shadows of rotating wormholes. *Physical Review D*, 2018, vol. 98, no. 2, p. 024044. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.024044>
31. Amir M. et al. Shadow images of Kerr-like wormholes. *Classical and Quantum Gravity*, 2019, vol. 36, no. 21, p. 215007. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab42be>
32. Kasuya S., Kobayashi M. Throat effects on shadows of Kerr-like wormholes. *Physical Review D*, 2021, vol. 103, no. 10, p. 104050. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.104050>
33. Rahaman F. et al. Shadows of Lorentzian traversable wormholes. *Classical and Quantum Gravity*, 2021, vol. 38, no. 21, p. 215007. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac213b>
34. Kashargin P.E., Sushkov S.V. Slowly rotating wormholes: the first-order approximation. *Gravitation and Cosmology*, 2008, vol. 14, no. 1, pp. 80–85. <https://doi.org/10.1134/S0202289308010106>
35. Tsukamoto N., Harada T., Yajima K. Can we distinguish between black holes and wormholes by their Einstein-ring systems? *Physical Review D*, 2012, vol. 86, no. 10, p. 104062. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.104062>
36. Carter B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, 1968, vol. 174, no. 5, p. 1559. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1559>
37. Bardeen J.M., Press W.H., Teukolsky S.A. Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *The Astrophysical Journal*, 1972, vol. 178, p. 347. <https://doi.org/10.1086/151796>
38. Vazquez S.E., Esteban E.P. Strong field gravitational lensing by a Kerr black hole. *Nuovo Cimento B*, 2004, vol. 119, no. 5, pp. 489–519.
39. Chandrasekhar S. *The mathematical theory of black holes*. N.Y.: Oxford university press, 1998. 672 p.
40. Bardeen J.M. Timelike and Null Geodesics in the Kerr Metric. *Black Holes (Les Astres Occlus)*, edited by C. Dewitt and B.S. Dewitt, New York, 1973, pp. 215–239.

References

1. Perlick V., Tsupko O.Y. Calculating black hole shadows: review of analytical studies. *Physics Reports*, 2022, vol. 947, pp. 1–39. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.10.004>
2. Akiyama K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 2019, vol. 875, no. 1, p. L1.
3. Akiyama K. et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. III. Imaging of the Galactic Center Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 2022, vol. 930, no. 2, p. L14. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac6429>
4. Einstein A., Rosen N. The particle problem in the general theory of relativity. *Physical Review*, 1935, vol. 48, no. 1, p. 73. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.73>
5. Misner C.W., Wheeler J.A. Classical physics as geometry. *Annals of physics*, 1957, vol. 2, no. 6, pp. 525–603. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(57\)90049-0](https://doi.org/10.1016/0003-4916(57)90049-0)
6. Ellis H.G. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 1973, vol. 14, no. 1, pp. 104–118. <https://doi.org/10.1063/1.1666161>
7. Bronnikov K.A. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Physica Polonica*, 1973, p. B4.
8. Ellis H.G. The evolving, flowless drainhole: A nongravitating-particle model in general relativity theory. *General Relativity and Gravitation*, 1979, vol. 10, no. 2, pp. 105–123. <https://doi.org/10.1007/BF00756794>
9. Clement G. A class of wormhole solutions to higher-dimensional general relativity. *General relativity and gravitation*, 1984, vol. 16, no. 2, pp. 131–138. <https://doi.org/10.1007/BF00762442>
10. Clement G. Axisymmetric regular multiwormhole solutions in five-dimensional general relativity. *General relativity and gravitation*, 1984, vol. 16, no. 5, pp. 477–489. <https://doi.org/10.1007/BF00762340>
11. Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 1988, vol. 56, no. 5, pp. 395–412. <https://doi.org/10.1119/1.15620>

12. Morris M.S., Thorne K.S., Yurtsever U. Wormholes, time machines, and the weak energy condition. *Physical Review Letters*, 1988, vol. 61, no. 13, p. 1446. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.1446>
13. Visser M. *Lorentzian Wormholes. From Einstein to Hawking*. Woodbury, N.Y.: American Institute of Physics, 1995. 437 p.
14. Lobo F.S. N. Exotic solutions in General Relativity: Traversable wormholes and 'warp drive' spacetimes, 2007. arXiv:0710.4474[gr-qc].
15. Chervon S.V., Fabris J.C., Fomin I.V. Black holes and wormholes in $f(R)$ gravity with a kinetic curvature scalar. *Classical and Quantum Gravity*, 2021, vol. 38, no. 11, p.115005. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/abebf0>
16. Chetouani L., Clement G. Geometrical optics in the Ellis geometry. *General relativity and gravitation*, 1984, vol. 16, no. 2, pp. 111–119. <https://doi.org/10.1007/BF00762440>
17. Perlick V. Exact gravitational lens equation in spherically symmetric and static spacetimes. *Physical Review D*, 2004, vol. 69, no. 6, p. 064017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.064017>
18. Nandi K.K., Zhang Y.Z., Zakharov A.V. Gravitational lensing by wormholes. *Physical Review D*, 2006, vol. 74, no. 2, p. 024020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.024020>
19. Müller T. Exact geometric optics in a Morris-Thorne wormhole spacetime. *Physical Review D*, 2008, vol. 77, no. 4, p. 044043. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.044043>
20. Nakajima K., Asada H. Deflection angle of light in an Ellis wormhole geometry. *Physical Review D*, 2012, vol. 85, no. 10, p. 107501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.107501>
21. Tsukamoto N. Strong deflection limit analysis and gravitational lensing of an Ellis wormhole. *Physical Review D*, 2016, vol. 94, no. 12, p. 124001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.124001>
22. Tsukamoto N., Harada T. Light curves of light rays passing through a wormhole. *Physical Review D*, 2017, vol. 95, no. 2, p. 024030. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.024030>
23. Bronnikov K.A., Baleevskikh K.A. On gravitational lensing by symmetric and asymmetric wormholes. *Gravitation and Cosmology*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 44–49. <https://doi.org/10.1134/S020228931901002X>
24. Shaikh R. et al. A novel gravitational lensing feature by wormholes. *Physics Letters B*, 2019, vol. 789, pp. 270–275. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.12.030>
25. Wang X. et al. Novel shadows from the asymmetric thin-shell wormhole. *Physics Letters B*, 2020, vol. 811, p. 135930. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135930>
26. Bugaev M.A. et al. Gravitational lensing and wormhole shadows. *Astronomy Reports*, 2021, vol. 65, no. 12, pp. 1185–1193. <https://doi.org/10.1134/S1063772921120027>
27. Jusufi K. et al. Constraining Wormhole Geometries using the Orbit of S2 Star and the Event Horizon Telescope, 2021. arXiv:2106.08070 [gr-qc].
28. Nedkova P.G., Tinchev V.K., Yazadjiev S.S. Shadow of a rotating traversable wormhole. *Physical Review D*, 2013, vol. 88, no. 12, p. 124019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.124019>
29. Ohgami T., Sakai N. Wormhole shadows in rotating dust. *Physical Review D*, 2016, vol. 94, no. 6, p. 064071. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.064071>
30. Shaikh R. Shadows of rotating wormholes. *Physical Review D*, 2018, vol. 98, no. 2, p. 024044. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.024044>
31. Amir M. et al. Shadow images of Kerr-like wormholes. *Classical and Quantum Gravity*, 2019, vol. 36, no. 21, p. 215007. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab42be>
32. Kasuya S., Kobayashi M. Throat effects on shadows of Kerr-like wormholes. *Physical Review D*, 2021, vol. 103, no. 10, p. 104050. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.104050>
33. Rahaman F. et al. Shadows of Lorentzian traversable wormholes. *Classical and Quantum Gravity*, 2021, vol. 38, no. 21, p. 215007. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac213b>
34. Kashargin P.E., Sushkov S.V. Slowly rotating wormholes: the first-order approximation. *Gravitation and Cosmology*, 2008, vol. 14, no. 1, pp. 80–85. <https://doi.org/10.1134/S0202289308010106>
35. Tsukamoto N., Harada T., Yajima K. Can we distinguish between black holes and wormholes by their Einstein-ring systems? *Physical Review D*, 2012, vol. 86, no. 10, p. 104062. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.104062>
36. Carter B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, 1968, vol. 174, no. 5, p. 1559. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1559>

37. Bardeen J.M., Press W.H., Teukolsky S.A. Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *The Astrophysical Journal*, 1972, vol. 178, p. 347. <https://doi.org/10.1086/151796>
38. Vazquez S.E., Esteban E.P. Strong field gravitational lensing by a Kerr black hole. *Nuovo Cimento B*, 2004, vol. 119, no. 5, pp. 489–519.
39. Chandrasekhar S. *The mathematical theory of black holes*. N.Y.: Oxford university press, 1998. 672 p.
40. Bardeen J.M. Timelike and Null Geodesics in the Kerr Metric. *Black Holes (Les Astres Occlus)*, edited by C. Dewitt and B.S. Dewitt, New York, 1973, pp. 215–239.

Авторы

Ишкаева Валерия Артуровна, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: ishkaeva.valeria@mail.ru

Сушков Сергей Владимирович, д-р. физ.-мат. наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Ишкаева В. А., Сушков С. В. Тень кротовой норы Эллиса–Бронникова. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2022. № 39. С. 26–42.

Authors

Ishkaeva Valeria Arturovna, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: ishkaeva.valeria@mail.ru

Sushkov Sergey Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Docent, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Please cite this article in English as:

Ishkaeva V. A., Sushkov S. V. The shadow of the Ellis–Bronnikov wormhole. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2022, no. 39, pp. 26–42.