УДК 530.12, 531.51

КИРАЛЬНЫЕ САМО-ГРАВИТИРУЮЩИЕ МОДЕЛИ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Червон С. В.[a,b,c,1]

[a] Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, пл. Ленина, 4/5, Ульяновск, 432071, Россия.

[b] МГТУ им. Н.Э. Баумана,, г. Москва, 105005, Россия.

[c] Институт физики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия.

В представленной лекции рассматриваются киральные само-гравитирующие модели; их включение в полевые теории и построение на основе нелинейной сигма модели с потенциалом взаимодействия. Рассматриваются терминологические аспекты нелинейной сигма модели, её связь с гармоническими отображениями и успехи двухмерных моделей как физической теории элементарных частиц. Затрагивается проблема построения четырехмерной киральной модели, которая была решена за счет включения гравитационного взаимодействия бозонов. Кратко (со ссылкой на соответствующую литературу) упоминаются методы построения точных решений в киральных само-гравитирующих моделях.

Отмечается значительный интерес к модифицированным теориям гравитации и в качестве примера такой теории рассматривается теория гравитации с высшими производными второго порядка по скалярной кривизне. Подробно описывается процедура перехода от теории гравитации вида $f(R,(\nabla R)^2,\Box R)$ к теории гравитации с неминимальным взаимодействием (без высших производных). Также представлен детальный анализ перехода от упрощенной модели $f(R,(\nabla R)^2)$ к эйнштейновской гравитации со скалярными полями и, затем, к её представлению в форме киральной само-гравитирующей модели.

Отмечается проблема сопоставления предсказаний теории с наблюдательными данными в случае нескольких скалярных полей в инфляционной модели. В качестве примера разрешить эту проблему предлагается построить однополевую модель, используя линейную связь между полями. Представлено построение такой однополевой модели и описан метод Иванова – Салопека – Бонда построения точных решений уравнений космологической динамики. Описан алгоритм вычисления космологических параметров на примере массивного скалярного поля. Отмечается возникшая возможность использовать связи между полями для согласования по массам конкретных элементарных частиц.

Ключевые слова: Киральные поля, киральная само-гравитирующая модель, модифицированные теории гравитации.

CHIRAL SELF-GRAVITATIONAL MODELS: EXACT SOLUTIONS AND CALCULATION OF COSMOLOGICAL PARAMETERS

Chervon S. V.[a,b,c,1]

[a] Ulyanovsk State Pedagogical University after I.N.Ulyanov, 4/5 Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russia.

[b] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia.

[c] Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlevskaya ul. 18, Kazan, 420008, Russia.

In the presented lecture the chiral self-gravitational models are considered; their inclusion into field theories and construction on the basis of the nonlinear sigma model with the interaction potential. Terminological aspects of the nonlinear sigma model, its connection with harmonic mappings and successes of two-dimensional models as a physical theory of elementary particles are considered. The problem of constructing a four-dimensional chiral

[1]E-mail: chervon.sergey@gmail.com

model, which has been solved by including the gravitational interaction of bosons, is touched upon. Methods for constructing exact solutions in chiral self-gravitational models are briefly mentioned (with reference to the relevant literature).

Considerable interest in modified theories of gravitation is noted, and as an example of such a theory, the theory of gravitation with second order higher derivatives of scalar curvature is considered. The procedure of transition from the theory of gravitation of the form $f(R,(\nabla R)^2,\Box R)$ to the theory of gravitation with non-minimal interaction (without higher derivatives). A detailed analysis of the transition from the simplified model $f(R,(\nabla R)^2)$ to Einstein gravity with scalar fields and then to its representation in the form of a chiral self-gravitational model is also presented.

The problem of comparing the predictions of the theory with observational data in the case of several scalar fields in the inflationary model is noted. As an example to solve this problem, it is proposed to construct a single-field model using a linear relation between the fields. The construction of such a one-field model is presented and the Ivanov-Salopek-Bond method for constructing exact solutions of the equations of cosmological dynamics is described. An algorithm for computing cosmological parameters on the example of a massive scalar field is described. It is noted that it is possible to use connections between fields for matching by masses of particular elementary particles.

Keywords: Chiral fields, chiral self-gravity model, modified theories of gravity.

PACS: 04.50.+h
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2022.3.30-49

1. Введение

Материал данного обзора основан на лекции, представленной на 3-ей Международной школе по гравитации, космологии и астрофизики, посвященной памяти академика РАН В.И. Пустовойта, прочитанной 5 июля 2022 года в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

При подготовке лекции я ориентировался на молодежную аудиторию, которая, как правило, хорошо знакома с современными работами в той области, в которой они ведут научные исследования, однако истоки теории изучаются скорее по свежим обзорам, чем по базовым оригинальным работам. Именно поэтому я постарался сформировать лекцию таким образом, чтобы отразить историю создания теории, пояснить как формировалась терминология и какие современные достижения получены на основе этой теории. Речь идет о "Киральной само-гравитирующей модели" , которая имеет ясную геометрическую структуру, находится на стыке физики элементарных частиц с теорией гравитации и успешно применяется в современной космологии.

В предлагаемой лекции рассматриваются следующие вопросы:

- Киральная само-гравитирующая модель (КГСМ)
- Нелинейная сигма модель (НСМ) и терминология
- Бозонные нелинейные сигма модели и гармоническое отображение
- Точные решения в двухмерных киральных моделях
- Четырехмерное обобщение киральной модели
- Методы исследования и точные решения КСГМ
- Модифицированные теории гравитации общего вида
- КГСМ $f(R,(\nabla R)^2,\Box R)$ гравитации
- Уравнения модели $f(R,(\nabla R)^2)$ гравитации
- Построение однополевой модели

- Метод Иванова-Салопека-Бонда
- Алгоритм вычисления космологических параметров
- Космологические параметры для массивной инфляции

2. Киральная самогравитирующая модель

Рассмотрим киральную само-гравитирующую модель (КСГМ) как она понимается в настоящее время. Действие КСГМ имеет вид

$$S_{CSGM} = \int \sqrt{-g} d^4 x \left(\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi^A_{,\mu} \varphi^B_{,\nu} g^{\mu\nu} - W(\varphi) \right), \tag{2.1}$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ метрика пространства-времени, g – ее определитель, R – скалярная кривизна, κ – эйнштейновская гравитационная постоянная, h_{AB} – метрика кирального пространства (пространства целей или пространства полей), $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^N)$ – мультиплет киральных полей, $\varphi^A_{,\mu} = \partial_\mu \varphi^A = \frac{\partial \varphi^A}{\partial x^\mu}$ – сокращенная запись частных производных. КСГМ представляет собой нелинейную само-гравитирующую сигма модель с потенциалом взаимодействия. Обратимся теперь к истокам построения нелинейной сигма модели (НСМ) и обратим внимание на происхождение соответствующей терминологии.

2.1. Нелинейные сигма модели и терминология в историческом аспекте

Зададимся вопросом о происхождении термина "Нелинейная сигма модель".

Термин σ-поле и σ-частица впервые встречается в работе Ю. Швингера [2] 1957 года "Теория фундаментальных взаимодействий". Эта работа, посвященная развитию теории фундаментальных взаимодействий, содержит попытку описать известный в то время набор элементарных частиц в рамках теории квантованных полей. Для описания массивных, сильно-взаимодействующих частиц использовались поля с наименьшими значениями спина – 0 и $1/2$, соответствующими статистикам Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака. При этом полагалось, что источник разнообразия наблюдаемых частиц связан со внутренними степенями свободы, которые могут быть представлены соответствующей свободой преобразований в пространстве внутренних симметрий (изотопическом пространстве). При рассмотрении 4-мерного пространства симметрий заряженный триплет π-мезонов, по мнению Ю. Швингера, должен дополняться неизвестным σ-синглетом, который должен быть в значительной степени нестабильным и быстро распадаться на два π-мезона. Различные следствия существования такого гипотетического σ-поля, включая возможность установить динамическое соответствие между лептонами и сильно-взаимодействующими частицами, также обсуждаются в работе [2].

Аналогичная идея введения дополнительного поля ϕ_4 (то есть, фактически σ-поля, которое обозначено как ϕ_4) присутствует в работе Т. Скирме [3] "Нелинейная теория сильных взаимодействий"[1]. Это мезонное поле ϕ_4, как полагает Т. Скирме, не является независимым, а формирует вместе с остальными тремя мезонными полями $\phi_i (i = 1, 2, 3)$ вектор постоянной длины в четырехмерном евклидовом (изоспиновом) пространстве. То есть во всех точках x пространства-времени выполняется ограничение (конструкция):

$$\sum_{\rho=1}^{4} \phi_\rho^2(x) = Q^2, \ Q = \mathrm{const}\,. \tag{2.2}$$

Такое ограничение немедленно приводит к проблеме массы мезонного поля, которая может решаться предположением о генерировании массы мезона из взаимодействия с нуклонным полем.

[1] В цитируемой работе Т. Скирме нет ссылки на работу Ю. Швингера [2], что косвенно подтверждает независимость построенной им модели.

Однако Т. Скирме выбирает другую возможность и лагранжиан, на котором строится нелинейная теория мезон-нуклонных взаимодействий, представлен в виде

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{4}(\partial_\mu\phi_\rho)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2\sum_{\rho=1}^{4}\phi_\rho^4 - \mathrm{L}_{int}, \tag{2.3}$$

где $(\partial_\mu\phi_\rho)^2 = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_\rho\partial_\nu\phi_\rho$, а также

$$\mathrm{L}_{int} = \bar{\Phi}\left\{i\gamma_\mu\partial^\mu + g(\phi_4 + i\vec{\pi}\vec{\tau}\gamma_5)\right\}\Phi. \tag{2.4}$$

В формулах (2.3) и (2.4) γ^2 и g – константы, остальные обозначения – стандартные для квантовой теории поля [1]. Кроме того следует помнить, что на мезонное поле накладывается ограничение (2.2).

Статья М. Гелл-Манна и М. Леви [4] "Аксиальный векторный ток в бета распаде" часто цитируется как работа, в которой впервые введен термин линейная и нелинейная σ-модель (см., например, [1], с.207).

Лагранжиан линейной сигма модели может быть представлен в виде [1]

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{int} + \frac{1}{2}\{(\partial\vec{\pi})^2 + (\partial\sigma)^2\} - \frac{(\mu)^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \tag{2.5}$$

$$-\frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + c\sigma = \mathrm{L}_s + c\sigma,$$

причем для L_{int} в (2.5) следует заменить ϕ_4 на σ в (2.4). μ, λ, c – константы. Несложно заметить, что отличие от лагранжиана Т. Скирме (2.3) заключается в отсутствии конструкции (2.2), но при наличии перекрестного взаимодействия $\sigma^2\vec{\pi}^2$ и, главное, слагаемого $c\sigma$, нарушающего киральную симметрию.

Напомним, что в физике элементарных частиц киральной группой симметрии называют группы, являющиеся прямым произведением групп $SU(2)$ и $SU(3)$: $SU_L(2)\times SU_R(2)$ и $SU_L(3)\times SU_R(3)$. Причем возможна как линейная так и нелинейная реализация киральной группы симметрий [5]. Рассмотренный нами пример (2.5) представляет собой линейную реализацию киральной симметрии, которая осуществляется построением лагранжиана из мультиплетов киральной группы в виде полиномиальной функции операторов поля и их производных. При нелинейной реализации киральной симметрии лагранжиан строится из функций полей в виде неполиномиальной функции, причем масса у частиц в кирально-инвариантных теориях появляется в результате нарушения симметрии.

Нелинейная сигма модель формируется при наложении на "свободный" лагранжиан ограничения (2.2), из которого σ-поле можно выразить через π-поле. Термин "нелинейная" связан с нелинейной реализацией киральной группы на многообразии, определяемом соотношением

$$\sigma^2(x) + \vec{\pi}^2(x) = f_\pi^2, \quad f_\pi = \mathrm{const}, \tag{2.6}$$

эквивалентным (2.2).

Чтобы перейти к анализу геометрического способа введения нелинейности, реализующей киральную симметрию, рассмотрим чисто бозонную НСМ, оставляя в стороне спинорную (нуклонную) составляющую киральной σ-модели Швингера–Скирме–Гелл-Манна–Леви. В дальнейшем метод кирально-инвариантной сигма модели получил существенное развитие в физике элементарных частиц, как альтернативный алгебре токов, но несколько проще его в вычислительных аспектах (см. [6], [7]).

Отметим важные особенности сложившийся терминологии. Несмотря на то, что при отсутствии фермионной составляющей лагранжиана, в которой заложена киральная симметрия, для бозонной НСМ по-прежнему в ходу термин "киральная" сигма модель. Это вызвано, по видимому, тем фактом, что киральная симметрия $SU_L(2)\times SU_R(2)$ эквивалентна O(5)-симметрии. Более того, в обзорах А. Переломова [10, 11] под киральными моделями подразумеваются такие модели теории поля в которых взаимодействие вводится не путем добавления к лагранжиану свободного поля лагранжиана взаимодействия, а чисто геометрическим способом. То есть на поля накладываются связи так, что скалярные поля принимают значения на некотором нелинейном многообразии. Таким образом киральные модели отождествляются именно с нелинейными сигма моделями. В случае наличия геометрического взаимодействия и взаимодействия, вводимого за счет лагранжиана взаимодействия L_{int}, термин "киральная модель" сохраняется [12].

2.2. Бозонные нелинейные сигма модели и гармоническое отображение

Киральные НСМ первоначально были определены в четырехмерном пространстве-времени Минковского [2, 3], но оказались не перенормируемые как квантово-полевые модели. Кроме того, огромный успех неабелевых калибровочных теорий в описании элементарных частиц отодвинул исследования киральной сигма модели на второй план. Только после работ 1975 года А. Полякова [8] и Белавина – Полякова [9], в которых найдены инстантонные решения в двухмерной чисто бозонной НСМ, интерес к исследованию киральных моделей значительно возрос, причем как с физических так и с математических позиций (см.обзоры [10, 11, 13]).

Интеграл действия классической бозонной нелинейной сигма модели в четырех измерениях имеет вид

$$S_B = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{1}{2} h_{AB} \varphi^A_{,\mu} \varphi^B_{,\nu} g^{\mu\nu} \right\}. \tag{2.7}$$

То есть, представляет собой кинетическое взаимодействие мультиплета скалярных полей, что соответствует второму слагаемому действия (2.1). Это же действие соответствует определению гармонического отображения, в котором действие определяется как энергия отображения. Одномерный случай соответствует гармонической функции.

Гармонические отображения впервые были определены и так названы Ф. Фуллером в 1954 году [14]. Теория гармонических отображений получила дальнейшее развитие в работах [15, 16]. Возможность приложения теории гармонических отображений в физических теориях отмечается в работе Ч. Мизнера [17]. Отметим тот факт, что инстантонные решения Белавина – Полякова [9] были известны в теории гармонических отображений значительно раньше [15]. Взаимодействие гармонических отображений с гравитацией анализируется в работе [18].

Для того, чтобы перейти к КСГМ общего вида (2.1) от действия бозонной НСМ (2.7) следует добавить гравитационную составляющую и потенциал взаимодействия $W(\varphi)$. Тогда тензор энергии-импульса принимает вид

$$T_{\mu\nu} = h_{AB}(\varphi) \varphi^A_{,\mu} \varphi^B_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} h_{AB} \varphi^A_{,\rho} \varphi^B_{,\sigma} g^{\rho\sigma} + W(\varphi) \right]. \tag{2.8}$$

Зная ТЭИ источника гравитации (2.8) можно записать уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \tag{2.9}$$

где

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -h_{AB}(\varphi) \varphi^A_{,\mu} \varphi^B_{,\nu} g^{\mu\nu} - 4W(\varphi).$$

В результате получаем:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left\{ h_{AB} \varphi^A_{,\mu} \varphi^B_{,\nu} + g_{\mu\nu} W(\varphi) \right\}. \tag{2.10}$$

Киральные поля $\varphi^C(x)$ задают отображение пространства-времени $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ в пространство полей (пространство целей или киральное пространство) $(\mathcal{N}, \mathbf{h})$. Если функции $\varphi^C(x)$ удовлетворяют уравнениям движения для бозонной НСМ (2.7)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} h_{AB} \varphi^B_{,\nu}) - \left\{ h_{CD} \Gamma^D_{AB} \varphi^B_{,\mu} \varphi^C_{,\nu} g^{\mu\nu} \right\} = 0, \tag{2.11}$$

следующих из принципа минимального действия варьированием по полям, то такие отображения называют гармоническими. В уравнении (2.11) Γ^D_{AB} означает символы Кристоффеля второго рода в пространстве целей.

Для КСГМ (2.1) динамические уравнения киральных полей можно представить следующим образом

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}h_{AB}g^{\mu\nu}\varphi^A_{,\nu}) - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{BC}}{\partial\varphi^A}\varphi^C_{,\mu}\varphi^B_{,\nu}g^{\mu\nu} - W_{,A} = 0, \tag{2.12}$$

где $W_{,A} = \frac{\partial W}{\partial \varphi^A}$. Такое представление второго слагаемого позволяет не вычислять символы Кристоффеля второго рода пространства целей.

2.3. Точные решения в двухмерных киральных моделях

Интерес к двумерным моделям связан с тем фактом, что именно они во многом схожи с четырехмерными неабелевыми калибровочными теориями поля. Решения солитонного характера для киральных моделей, определенных на двумерном пространстве лоренцевой сигнатуры, были исследованы в работах [19,20]. Для $SO(3)$-инвариантной НСМ инстантонные решения были найдены в работе [9], меронные решения – в работе [21], эллиптические решения – в работе [22], решения типа "кинк" – в работе [23]. Примеры точных решений получены в работах [24, 25].

С помощью инвариантно-группового метода в работах [26,27] найдено новое семейство точных решений, связанных с изометрическими и гомотетическими симметриями евклидового двумерного базового пространства R^2. Более того в работе [27] показано, что решения инстантонного, меронного и эллиптического типов, являются частным случаем полученного семейства решений.

2.4. Четырехмерные обобщения киральной модели

Непротиворечивое построение четырехмерной киральной модели стало возможным благодаря введению взаимодействия скалярных полей с гравитационным полем при поиске инстантонных решений [28]. В более ранних работах [29, 31] были предприняты попытки обобщения НСМ на случай четырехмерия, которые оказались бесперспективными.

2.5. Методы исследования и точные решения в КСГМ

При увеличении размерности пространства ($n > 2$), на котором определяется НСМ, теряется аналогия с четырехмерными неабелевыми калибровочными теориями, так как теория на квантовом уровне становиться неперенормируемой. Более того даже на классическом уровне теряется конформная инвариантность и модель уже не является точно интегрируемой (в смысле метода обратной задачи рассеяния). После некоторых неудачных попыток (см., например, [31], [29]) в работе [28] была найдена вполне удовлетворительная теория, которая допускает инстантонные и меронные решения, сохраняет конформную инвариантность. Для сохранения желаемых свойств из двухмерной версии НСМ, в четырехмерной модели вводится гравитационное взаимодействие нелинейной сигма модели с метрическим полем $g_{ik}(x)$ [28], которое удовлетворяет уравнениям Эйнштейна. В работах [28, 30, 35] найдены точные решения $SO(N)$-инвариантной σ-модели на 4-мерных римановых пространствах евклидовой сигнатуры: решения инстантонного и меронного типов. Изучены общие свойства моделей и топологические характеристики решений. Однако в эйнштейновской трактовке НСМ, которая описывает материальный источник гравитационного поля и определена на базовом пространстве-времени именно лоренцевой сигнатуры, введена в рассмотрение в работах Г. Иванова [26, 32, 33].

Геометрические методы поиска точных решений и их приложения для $SO(N)$-инвариантных самогравитирующих НСМ рассматривались в работах [26, 36]. Приложение НСМ в теории космологической инфляции было предложено в работах [37, 38].

Чтобы перейти к приложениям КСГМ в космологии рассмотрим направления исследований в актуальных теориях гравитации.

3. Модифицированные теории гравитации общего вида

Наиболее общее действие для модифицированной теории гравитации можно представить в виде

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{Pl}^2}{2}F(\phi)R+\omega(\phi)X-V(\phi)-\xi(\phi)\mathcal{G}-G(\phi,X)\Box\phi\right], \qquad (3.1)$$

где g – детерминант пространственно-временной метрики $g_{\mu\nu}(x)$, M_{Pl}^2 – масса Планка ($M_{Pl}^{-2}=\kappa$), R – скалярная кривизна, $X=-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$ –кинетический член скалярного поля ϕ, $\{F(\phi),\ \omega(\phi),\ \xi(\phi)\}$ – дифференцируемые функции поля ϕ, $G(\phi,X)$ – функция от ϕ и X, $\mathcal{G}=R^2-4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}+R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ – инвариант Гаусса-Бонне, $V(\phi)$ – потенциальная энергия (потенциал) скалярного поля ϕ, $\Box\phi=g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi$ – действие оператора Д'Аламбера на функцию ϕ.

Интеграл действия (3.1) включает скалярно-тензорную теорию гравитации с неминимальным взаимодействием, 4-мерную гравитацию Гаусса-Бонне и галилееву компоненту $G(\phi,X)\Box\phi$.

В работе [52] представлены фоновые уравнения для модифицированной теории гравитации общего вида (3.1), параметры медленного скатывания и параметры космологических возмущений, включая спектры мощности и спектральные параметры скалярных и тензорных возмущений. В этом случае процедура верификации конкретной модели становится чисто техническим делом. Возникает вопрос об аналогичном подходе для КСГМ, то есть, как сформировать алгоритм вычисления космологических параметров, которые могут верифицированы по наблюдательным данным.

Отметим, что действие для КСГМ с неминимальным взаимодействием киральных полей с гравитационным полем

$$S_J=\int d^4x\sqrt{-g_J}\left[f(\phi^C)R_J-\frac{1}{2}h^J_{AB}\phi^A_{,\mu}\phi^B_{,\nu}g^{\mu\nu}_J-V_J(\phi^c)\right] \qquad (3.2)$$

конформным преобразованием $g^J_{\mu\nu}=\Omega^2(x)g^E_{\mu\nu}$ где $\Omega^2(x)=\frac{2}{M_{pl}^2}f(\phi^C)$ приводится к действию эйнштейновского вида уже с минимальным взаимодействием [53]

$$S_E=\int d^4x\sqrt{-g_E}\left[\frac{M_{pl}^2}{2}R_E-\frac{1}{2}h^E_{AB}\phi^A_{,\mu}\phi^B_{,\nu}g^{\mu\nu}_J-V_E(\phi^c)\right], \qquad (3.3)$$

где

$$h^E_{AB}=\frac{M_{pl}^2}{2f}\left[h^J_{AB}+3f_{,A}f_{,B}/f\right],\quad V_E=\frac{M_{pl}^4}{4f^2}V_J.$$

Здесь обозначения соответствуют тем, которые используются в статье [53].

Общий алгоритм вычисления космологических параметров для ККМ (КСГМ, исследуемую в рамках космологии, принято называть "киральная космологическая модель") не найден. Поэтому в качестве успешного примера вычисления космологических параметров в дальнейшем рассмотрим двухкомпонентную ККМ связанную с модифицированной гравитацией с высшими производными. Сейчас остановимся на процедуре перехода от $f(R,(\nabla R)^2,\Box R)$ гравитации к трехкомпонентной КСГМ с использованием метода лагранжевых множителей и конформного преобразования метрики.

4. КСГМ $f(R,(\nabla R)^2,\Box R)$ гравитации

В работе [39] был предложен метод сведения модели $f(R,(\nabla R)^2,\Box R)$ к ОТО с несколькими скалярными полями. Эквивалентная ККМ была предложена в работе [43] где также рассматривался специальный случай $f(R,(\nabla R)^2)=f_1(R)+X(R)R_{,\mu}R^{,\mu}$.

В данном разделе мы рассматриваем модель, действие которой имеет вид

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[f(R,(\nabla R)^2,\Box R)\right]. \tag{4.1}$$

Следуя методу, представленного в статье [39], можно привести модель (4.1) к эйнштейновской гравитации со скалярными полями и представить ее в форме ККМ [43]. С этой целью мы вводим в действие (4.1) совокупность лагранжевых множителей $\tilde{\lambda},\tilde{\Lambda}_1,\tilde{\Lambda}_2$ с соответствующими дополнительными полями ϕ, X, B:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[f(\phi,X,B)-\tilde{\lambda}(\phi-R)-\tilde{\Lambda}_1(X-(\nabla R)^2)-\tilde{\Lambda}_2(B-\Box R)\Big]. \tag{4.2}$$

Вариация действия (4.2) по полям приводит к следующим уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial\phi}-\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\phi}(\phi-R)-\tilde{\lambda}-\frac{\partial\tilde{\Lambda}_1}{\partial\phi}(X-(\nabla R)^2)-\frac{\partial\tilde{\Lambda}_2}{\partial\phi}(B-\Box R) = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial X}-\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial X}(\phi-R)-\frac{\partial\tilde{\Lambda}_1}{\partial X}(X-(\nabla R)^2)-\tilde{\Lambda}_1-\frac{\partial\tilde{\Lambda}_2}{\partial X}(B-\Box R) = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial B}-\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial B}(\phi-R)-\frac{\partial\tilde{\Lambda}_1}{\partial B}(X-(\nabla R)^2)-\frac{\partial\tilde{\Lambda}_2}{\partial B}(B-\Box R)-\tilde{\Lambda}_2 = 0. \tag{4.5}$$

Понятно, что лагранжевы множители определяются динамическим образом как решения полученной системы уравнений.

Задача заключается в том, чтобы перейти от "старых" динамических лагранжевых множителей $(\tilde{\lambda},\tilde{\Lambda}_1,\tilde{\Lambda}_2)$ к новым $(\lambda,\Lambda_1,\Lambda_2)$, которые приведут к конструктивным (ограничивающим) выражениям для них. Такое преобразование, предложенное в работе [39], имеет вид

$$\lambda = \tilde{\lambda}-\nabla^\mu\left[\tilde{\Lambda}_1\nabla_\mu(\phi+R)\right]-\Box\tilde{\Lambda}_2, \quad \Lambda_1=\tilde{\Lambda}_1 \quad \Lambda_2=\tilde{\Lambda}_2. \tag{4.6}$$

Подставляем вместо $(\tilde{\lambda},\tilde{\Lambda}_1,\tilde{\Lambda}_2)$ их выражения из (4.6) через $(\lambda,\Lambda_1,\Lambda_2)$. В результате получаем

$$\begin{aligned} S = \int d^4x\sqrt{-g}\,&[f(\phi,X,B)-\lambda(\phi-R)-\nabla^\mu\left[\Lambda_1\nabla_\mu(\phi+R)\right](\phi-R)\\ &-\Box\Lambda_2(\phi-R)-\Lambda_1(X-(\nabla R)^2)-\Lambda_2(B-\Box R)]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Третье слагаемое в лагранжиане

$$\nabla^\mu\left[\Lambda_1\nabla_\mu(\phi+R)\right](\phi-R)$$

можно преобразовать следующим образом. Рассматривая 4-дивергенцию

$$\nabla^\mu\left[\left[\Lambda_1\nabla_\mu(\phi+R)\right](\phi-R)\right] = \nabla^\mu\left[\Lambda_1\nabla_\mu(\phi+R)\right](\phi-R)+\Lambda_1[(\nabla\phi)^2-(\nabla R)^2]$$

мы можем заменить в лагранжиане слагаемое $(\nabla^\mu\left[\Lambda_1\nabla_\mu(\phi+R)\right](\phi-R))$ на $\left(-\Lambda_1[(\nabla\phi)^2-(\nabla R)^2]\right)$ учитывая исчезновение 4-дивергенции на граничной гиперповерхности по теореме Гаусса-Стокса. Таким образом Λ_1-часть лагранжиана преобразуется е виду

$$-\Lambda_1(X-(\nabla R)^2)+\Lambda_1[(\nabla\phi)^2-(\nabla R)^2] = -\Lambda_1(X-(\nabla\phi)^2).$$

Аналогично Λ_2-часть

$$\Box\tilde{\Lambda}_2(\phi-R)$$

может быть представлена как

$$\Box\Lambda_2(\phi-R) = \nabla^\mu M_\mu-\Lambda_2\left(\Box\phi-\Box R\right),$$

где

$$M_\mu = \nabla_\mu \left[\Lambda_2(\phi - R)\right].$$

Таким образом Λ_2-часть лагранжиана преобразуется к виду

$$\Lambda_2\left(\Box\phi - \Box R\right) - \Lambda_2\left(B - \Box R\right) = -\Lambda_2\left(B - \Box\phi\right).$$

Окончательно мы переходим к действию

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[f(\phi, X, B) - \lambda(\phi - R) - \Lambda_1(X - (\nabla\phi)^2) - \Lambda_2(B - \Box\phi)\right]. \tag{4.8}$$

Для полученного действия (4.8) вариация по (Λ_1, Λ_2) приводит к уравнениям ограничения

$$\begin{aligned} X &= (\nabla\phi)^2, \\ B &= \Box\phi. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Эти ограничения могут быть подставлены вновь в действие (4.8) без изменения самой теории. В результате действие (4.8) принимает следующий вид

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[f(\phi, (\nabla\phi)^2), \Box\phi) - \lambda(\phi - R)\right]. \tag{4.10}$$

Таким образом, мы можем заменить все производные от R соответствующими производными от ϕ, заменяя формально R на ϕ и ввести лагранжевый множитель λ. Учитывая наличие производных от поля ϕ, экстремизация действия по ϕ приводит к динамике поля ϕ, а не к конструкции оганичения. Следовательно, мы не можем подставить ϕ обратно в действие вместо R. Поэтому следует трактовать λ как одно из динамических полей. Это существенным образом отличается от случая $f(R)$ гравитации, где λ может быть определена через функцию f как $\lambda = df(\phi)/d\phi$.

Отметим, что теперь в теории все слагаемые с высшими производными за исключением λR возникают за счет $\Box\phi$. Чтобы снизить порядок производных, вновь введем лагранжев множитель Λ и соответствующее вспомогательное поле B:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[f(\phi, (\nabla\phi)^2, B) - \lambda(\phi - R) - \Lambda(B - \Box\phi)\right]. \tag{4.11}$$

Вариация действия по полю B приводит к уравнению органичения

$$\Lambda = \frac{df}{dB} \equiv f_B. \tag{4.12}$$

Это ограничение позволяет устранить Λ в действии за счет обратного включения его в действие при условии, что

$$f_{BB} \neq 0.$$

Только при выполнении этого условия, подставляя (4.12) в действие и, затем, варьируя получившееся действие по B, получаем нужное соотношение $B = \Box\phi$.

Важно отметить, что $\Lambda \neq const.$ (в противном случае соотношение $B = \Box\phi$ может не выполняться, так как Λ не варьируется), следовательно $f_{BB} \neq 0$. В этом случае мы можем ввести новое поле

$$\varphi = f_B \tag{4.13}$$

и рассматривать совокупность объектов $(g_{\mu\nu}, \lambda, \phi, \varphi)$ как базисную систему. Это утверждение подтверждается, так как преобразование от $(g_{\mu\nu}, \lambda, \phi, B)$ к $(g_{\mu\nu}, \lambda, \phi, \varphi)$ локально обратимо при условии $f_{BB} \neq 0$.

Вновь обратимся к действию (4.11). Чтобы сформировать 4-дивергенцию

$$\nabla^\mu(\Lambda\nabla_\mu\phi) = (\nabla^\mu\Lambda)\nabla_\mu\phi + \Lambda\Box\phi \tag{4.14}$$

вычтем и прибавим слагаемое $(\nabla^\mu \Lambda)\nabla_\mu \phi$ в действии (4.11). Тогда, устраняя 4-дивергенцию и используя (4.12), получаем действие

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\lambda R - (\nabla^\mu f_B)\nabla_\mu \phi + f(\phi, (\nabla\phi)^2, \Box\phi) - f_B B - \lambda\phi\right]. \tag{4.15}$$

Учитывая (4.13) получаем

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\lambda R - (\nabla^\mu \varphi)\nabla_\mu \phi + f(\phi, (\nabla\phi)^2, \Box\phi) - \varphi B - \lambda\phi\right]. \tag{4.16}$$

Полученное действие можно преобразовать к эйнштейновской картине путем конформного преобразования. Такую процедуру мы рассмотрим в следующем разделе для модели гравитации с кинетическим членом скалярной кривизны (или просто модели гравитации с кинетическим скаляром кривизны).

5. Уравнения модели $f(R, (\nabla R)^2)$ гравитации

В качестве примера вычисления космологических параметров в модели с высшими производными рассмотрим усеченную модель, действие которой

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\, f\left(R, (\nabla R)^2\right) \tag{5.1}$$

не содержит зависимости от производной второго порядка по скалярной кривизне R.

Выбираем функцию $f(R, (\nabla R)^2)$ в достаточно простом виде [43], своего рода линейной зависимости от кинетической кривизны,

$$f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R \nabla^\mu R. \tag{5.2}$$

Применяя метод, описанный в предыдущем разделе, переходим от действия (5.1)-(5.2) к модели с действием в картине Йордана (J-картине)

$$S = \int d^4x\sqrt{-g_J}\left[f_1(\phi) + X(\phi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g_J^{\mu\nu} - \lambda(\phi - R_J)\right]. \tag{5.3}$$

Выполним переход от J-картины для неминимального взаимодействия скалярного поля λ с гравитацией в виде

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{(F(\lambda)R}{2}\right]$$

к картине Эйнштейна (E-картине), используя процедуру конформного преобразования, описанного в [41].

С этой целью уединяем член неминимального взаимодействия в (5.3)

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{(2\lambda)R}{2} + f_1(\phi) + X(\phi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g_J^{\mu\nu} - \lambda\phi\right].$$

Очевидно, что $F(\lambda) = 2\lambda$. Следуя стандартной методике перехода к эйнштейновской гравитации [41], имеем

$$g^E_{\mu\nu} = \Omega^2 g^J_{\mu\nu},\ g^J_{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^E_{\mu\nu},\ \sqrt{-g_J} = \Omega^{-4}\sqrt{-g_E}.$$

Здесь и далее индексы J и E означают принадлежность объекта к J-картине и E-картине соответственно.

Воспользуемся вышеприведенными соотношениями в конформном преобразовании скаляра Риччи

$$R_J = \Omega^2(R_E + 6\Box_E\omega - 6g_E^{\mu\nu}\omega_{,\mu}\omega_{,\nu}), \tag{5.4}$$

где $\omega = \ln\Omega,\ \omega_{,\mu} = \partial_\mu\omega$.

Часть с λR в действии преобразуется следующим образом

$$\int d^4x\sqrt{-g_J}\frac{1}{2}(2\lambda)R^J = \int d^4x\sqrt{-g_E}\Omega^{-4}(2\lambda)\Omega^2\frac{1}{2}\left(R_E + 6\Box_E\omega - 6g_E^{\mu\nu}\omega_{,\mu}\omega_{,\nu}\right). \tag{5.5}$$

Чтобы перейти к эйнштейновской гравитации, мы можем потребовать, чтобы $2\lambda\Omega^2\Omega^{-4} = 1$, то есть $\Omega^2 = 2\lambda$. Заметим, что мы рассматриваем случай $\lambda > 0$. Учитывая что $\omega = \ln\sqrt{2\lambda}$, $\omega_{,\mu} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda_{,\mu}}{\lambda}$, действие (5.3) преобразуется к следующему виду

$$S = \int d^4x\sqrt{-g_E}\left(\frac{R_E}{2} + 3\Box_E f - 3g_E^{\mu\nu}\omega_{,\mu}\omega_{,\nu} + \Omega^{-4}f_1(\phi) + X(\phi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g_J^{\mu\nu}\Omega^{-4} - \Omega^{-4}\lambda\phi\right). \tag{5.6}$$

Затем, устраняя 4-дивергенцию $3\Box_E f$, записываем действие (5.6) в E-картине и, представляя конформную функцию Ω в терминах λ, получаем

$$S = \int d^4x\sqrt{-g_E}\left(\frac{R_E}{2} - \frac{3}{4\lambda^2}g_E^{\mu\nu}\lambda_{,\mu}\lambda_{,\nu} + \frac{f_1(\phi)}{4\lambda^2} + \frac{X(\phi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g_E^{\mu\nu}}{2\lambda} - \frac{\phi}{4\lambda}\right). \tag{5.7}$$

Введем новое скалярное поле соотношением $\lambda = \exp\left(\sqrt{2/3}\chi\right) > 0$, для записи скалярного поля χ в канонической форме в действии (5.7). Перегруппировывая кинетические слагаемые на первое место, окончательно действие (5.7) принимает вид

$$S = \int d^4x\sqrt{-g_E}\left(\frac{R_E}{2} - \frac{1}{2}g_E^{\mu\nu}\chi_{,\mu}\chi_{,\nu} + \frac{1}{2}Xe^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}g_E^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{4}f_1(\phi)e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} - \frac{1}{4}\phi e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\right). \tag{5.8}$$

Полученное действие (5.8) представляет собой киральную самогравитирующую модель (КГСМ) с двумя киральными полями $\varphi^1 = \chi$, $\varphi^2 = \phi$, двумерная метрика пространства целей которой

$$ds^2 = d\chi^2 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\phi)d\phi^2. \tag{5.9}$$

То есть, компоненты метрики пространства целей таковы: $h_{11} = 1$, $h_{22} = -e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\phi)$, $h_{12} = h_{21} = 0$. Соответственно потенциальная энергия (в космологии говорят просто "потенциал") имеет вид:

$$W = \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\left(\phi - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}f_1(\phi)\right). \tag{5.10}$$

Такое представление модели позволяет записать уравнения модели в метрике Фридмана-Робертсона-Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{5.11}$$

(тем самым перейти от КСГМ к ККМ) с использованием динамических уравнений двухкомпонентных ККМ [54]. В результате получаем

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot\chi^2 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\phi)\dot\phi^2 + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\left(-\phi + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}f_1(\phi)\right), \tag{5.12}$$

$$\dot H = -\frac{1}{2}\dot\chi^2 + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\phi)\dot\phi^2, \tag{5.13}$$

$$\ddot\chi + 3H\dot\chi - \frac{1}{2}\dot\phi^2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\phi) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\left(\phi - 2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}f_1(\phi)\right) = 0, \tag{5.14}$$

$$X(\phi)\left(-3H\dot\phi - \ddot\phi + \sqrt{\frac{2}{3}}\dot\chi\dot\phi\right) - \frac{1}{2}\dot\phi^2X'(\phi) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}f_1'(\phi) = 0. \tag{5.15}$$

Вышеприведенная система уравнений рассматривалась в работах [43, 55], где были получены примеры космологических решений и решений с дополнительным материальным полем. Мы остановимся на переходе к однокомпонентной модели с целью вычисления космологических параметров и их сопоставления наблюдательным данным.

6. Построение однополевой модели

Чтобы применить стандартный метод вычислений космологических параметров, таких как спектр мощности, спектральные индексы скалярных и тензорных возмущений, тензорно-скалярного отношение, как вариант, мы можем редуцировать двух-скалярную модель к однополевому варианту инфляционной модели, предполагая линейную зависимость между полями:

$$\phi(t) = k\chi(t), \quad k = const. \tag{6.1}$$

Очевидные соотношения между производными по космологическому времени

$$\dot{\phi}(t) = k\dot{\chi}(t), \quad \ddot{\phi}(t) = k\ddot{\chi}(t) \tag{6.2}$$

и производными по полю ϕ

$$\frac{dX}{d\phi} = k^{-1}\frac{dX}{d\chi}, \quad \frac{df_1}{d\phi} = k^{-1}\frac{df_1}{d\chi} \tag{6.3}$$

следует учесть при подстановке в действие (5.8). В результате получаем действие для однополевой модели

$$S = \int d^4x\sqrt{-g_E}\left(\frac{R_E}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - k^2X(\chi)e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\right]g_E^{\mu\nu}\chi_{,\mu}\chi_{,\nu} + \frac{1}{4}f_1(\chi)e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} - \frac{1}{4}k\chi e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\right). \tag{6.4}$$

Соответствующие уравнения космологической динамики:

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - \frac{1}{2}k^2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\chi)\dot{\chi}^2 + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\left(-k\chi + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}f_1(\chi)\right), \tag{6.5}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\chi}^2\left(1 - k^2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\chi)\right), \tag{6.6}$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{1}{2}k^2\dot{\chi}^2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}X + \frac{dX}{d\chi}\right] + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\left[e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}f_1(\chi) - \frac{df_1}{d\chi}\right) - \sqrt{\frac{2}{3}}k\chi + k\right] = 0. \tag{6.7}$$

Используя уравнение (6.5) и (6.6) можно найти, как в случае стандартной фридмановской космологии, важное следствие

$$V(\chi, k\chi) = 3H^2 + \dot{H} = \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\left(-k\chi + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}f_1(\chi)\right). \tag{6.8}$$

Для того, чтобы применить метод Иванова-Салопека-Бонда (ИСБ) [12] мы используем уравнения (6.5)-(6.6) и свободу выбора кинетической функции $X(\chi)$. Переходя к зависимости параметра Хаббла от поля χ уравнение (6.6) приобретает вид

$$H' = -\frac{1}{2}\dot{\chi}\left(1 - k^2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\chi)\right), \quad H' = \frac{dH}{d\chi}. \tag{6.9}$$

Понятно, что выбор функции $X(\chi)$ может приводить к увеличению или уменьшению скорости изменения параметра Хаббла при изменении поля χ. Мы перейдем к случаю, который позволяет нам применить алгоритм ИСБ без существенной модификации. С этой целью мы выбираем функцию $X(\chi)$ следующим образом:

$$X(\chi) = \pm e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}. \tag{6.10}$$

Такой выбор позволяет привести уравнение (6.8) к следующему виду

$$3H^2 - \frac{2(H')^2}{1 \pm k^2} = \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\left(-k\chi + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}f_1(\chi)\right). \tag{6.11}$$

Если положить $k = 0$, то мы воспроизведем уравнение ИСБ для стандартной фридмановской космологии с потенциалом (6.8).

6.1. Метод Иванова – Салопека – Бонда

Уравнения скалярной космологии в метрике Фридмана-Робертсона-Уокера могут быть представлены в следующем виде

$$H^2 + \frac{\epsilon}{a^2} = \frac{\kappa}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \tag{6.12}$$

$$\dot{H} - \frac{\epsilon}{a^2} = -\frac{\kappa}{2}\dot{\phi}^2, \tag{6.13}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \tag{6.14}$$

Другая запись уравнений скалярной космологии была представлена Г. Ивановым в 1981 году [34]. Предполагая зависимость параметра Хаббла H от скалярного поля ϕ, уравнения (6.12)-(6.13) для пространственно-плоской Вселенной ($\epsilon = 0$) преобразуются следующим образом.

Учитывая, что $\dot{H} = H'\dot{\phi}$, уравнение (6.13) преобразуется к виду

$$H' = -\frac{\kappa}{2}\dot{\phi}. \tag{6.15}$$

Возводя приведенное выше уравнение в квадрат, делая замену $\dot{\phi}^2/2$, выраженное через H'^2, и подставляя в (6.12), получаем

$$\frac{2}{3\kappa}\left[\frac{dH}{d\phi}\right]^2 - H^2 = -\frac{\kappa}{3}V(\phi). \tag{6.16}$$

Независимо от работы Г. Иванова [34] в 1991 году в рамках детального исследования длинноволновых флуктуаций метрики в инфляционных моделях Д. Салопек и Дж. Бонд [56] получили «разделенное уравнение Гамильтона-Якоби, которое также определяет квазиклассическую фазу волнового функционала». Такого рода уравнения в литературе стали называть "уравнение типа Гамильтона-Якоби". Отметим, что уравнение, полученное в работе [56], было записано для нескольких скалярных полей, однако, очевидна его применимость и для одного поля. Учитывая вклад авторов, уравнение (6.16) в космологическом контексте называют *уравнением Иванова-Салопека-Бонда* [34, 48, 57].

Структура уравнения (6.16) предлагает нам найти вид потенциала, который может дать точное решение. Действительно, пусть потенциал $V(\phi)$ имеет вид

$$V(\phi) = -\frac{2}{3\kappa}F'^2 + \left(F(\phi) + F_*\right)^2, \tag{6.17}$$

где $F = F(\phi)$ является C^1 функцией от ϕ и $F_* = const$.

Будем называть функцию $F(\phi)$ *генерирующей функцией*. Сравнивая уравнение (6.16) с (6.17), легко найти решение (6.16)

$$H(\phi) = \sqrt{\frac{\kappa}{3}}(F(\phi) + F_*). \tag{6.18}$$

Таким образом, можно непосредственно из (6.16) найти потенциал, если задан параметр Хаббла. И наоборот, если задать потенциал в виде (6.17), то решение уравнения (6.16) будет определяться уравнением (6.18) при произвольном выборе генерирующей функции $F(\phi)$.

7. Алгоритм вычисления космологических параметров

Рассмотрим алгоритм вычисления космологических параметров (скалярного спектрального индекса n_s , тензорно-скалярного отношения r и спектра мощности $\mathcal{P}_S$) на примере точного решения для массивного скалярного поля [12].

Действие для однополевой модели скалярного поля таково

$$S_{sf} = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}g^{\mu\nu} - V(\varphi)\right\}. \tag{7.1}$$

Точное решение для массивного скалярного поля определяется потенциалом

$$V(\varphi) = \frac{m^2\varphi^2}{2} - \frac{m^2}{3} \tag{7.2}$$

и параметром Хаббла

$$H(\varphi) = m\sqrt{\frac{1}{6}}\varphi. \tag{7.3}$$

При этом эволюция скалярного поля такова

$$\varphi(t) = -m\sqrt{\frac{2}{3\kappa}}t + \varphi_s = -m\sqrt{\frac{2}{3\kappa}}(t - t_*), \quad \varphi_s = m\sqrt{\frac{2}{3\kappa}}t_*. \tag{7.4}$$

Расширение Вселенной означает, что $H > 0$, $t - t_* < 0$. Поэтому t_* – время окончания расширения Вселенной.

Зная эволюцию скалярного поля находим масштабный фактор

$$a = a_s \exp\left(-\frac{m^2}{6}(t - t_*)^2\right). \tag{7.5}$$

Отметим, что ускоренное расширение Вселенной заканчивается раньше. Действительно, вычисляя относительное ускорение по формуле

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H},$$

получаем

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{m^4}{9}(t - t_*)^2 - \frac{m^2}{3}.$$

Требуя положительность ускорения находим

$$t < t_* - \frac{m}{\sqrt{3}}.$$

Рассматривая инфляционную стадию эволюции Вселенной, мы предполагаем, что время достаточно близко к нулю, и для простоты полагаем $(t - t_*) = \tilde{t} < 0$.

Соответствие с моделью (6.4) достигается за счет выбора кинетической функции $X(\chi)$ (6.10) и функции $f_1(\varphi)$, определяемой из сопоставления потенциала (7.2) с (5.10). В результате имеем:

$$f_1(\varphi) = 4\exp\left(\frac{k2\sqrt{2}\varphi}{\sqrt{3(1 \mp k^2)}}\right)\left(\frac{m^2\varphi^2}{2} - \frac{m^2}{3}\right) + \exp\left(\frac{k\sqrt{2}\varphi}{\sqrt{3(1 \mp k^2)}}\right)\frac{k^2\varphi}{\sqrt{1 \mp k^2}}. \tag{7.6}$$

Отметим, что соотношения между полями выглядят следующим образом:

$$\phi = k\chi; \quad \varphi = \sqrt{1 \mp k^2}\chi; \quad \phi = \frac{k\varphi}{\sqrt{1 \mp k^2}}. \tag{7.7}$$

Вспоминая о формальном соответствии $\phi = k\chi$ скалярной кривизне R, отметим, что $f_1(R)$ является частью стандартного представления f(R)-гравитации следующего вида $Ae^{c_1 R}R^2 + Be^{c_1 R/2}R - Ce^{c_1 R}$. Такие теории встречаются в теории струн [49, 50].

Теперь сосредоточим наше внимание на вычислении *точных инфляционных (exact inflationary)* параметров, определение которым дано в [12].

Первый параметр определяется из соотношения

$$\epsilon = 2\left(\frac{H'_\varphi}{H}\right)^2 = -\frac{\dot{H}}{H^2}. \tag{7.8}$$

Для модели (7.2)-(7.4) находим

$$\epsilon = \frac{3}{m^2 t^2}. \tag{7.9}$$

Следующим шагом найдем зависимость параметра Хаббла от числа е-увеличений

$$N(t) = -\int H(t)dt = \frac{m^2t^2}{6}.$$

Представим параметр (7.8) в терминах зависимости $H = H(N)$

$$\epsilon = -\frac{dH}{dN}\frac{\dot{N}}{H^2} = -\frac{dH}{dN}\frac{1}{H}. \tag{7.10}$$

Тогда $\frac{dH}{dN} = -\epsilon H$. С учетом (7.8) и, зная зависимость $H(t) = \frac{m^2}{2}t$, находим

$$\frac{dH}{dN} = \frac{1}{t}. \tag{7.11}$$

Учитывая зависимость параметра Хаббла от времени $H(t) = \frac{m^2}{2}t$ находим обратную зависимость $t(N) = \frac{\sqrt{6N}}{m}$. Таким образом найдена зависимость $\epsilon = \epsilon(N)$ в следующем виде $\epsilon = \frac{1}{2N}$. Если считать $N = 60$, тогда $\epsilon = 0.0083$. Это достаточно малая величина.

Вычисление второго точного инфляционного параметра $\delta = 2\frac{H''}{H} = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}$ дает нам $\delta = 0$.

Чтобы определить спектральный параметр скалярных возмущений n_S будем использовать уточненную формулу [12, 51]

$$n_S - 1 = 2\left(\frac{\delta - 2\epsilon}{1-\epsilon}\right). \tag{7.12}$$

В результате получаем $n_S \simeq 0.9664$. Таким образом, мы видим, что результат с хорошей точностью соответствует наблюдательным данным космической миссии «Planck».

Спектральный параметр тензорных возмущений для этой модели определяется из соотношения

$$n_T = -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon} \tag{7.13}$$

и равно $n_T = -0.0167$.

Тензорно-скалярное отношение определяется по формуле

$$r = 4s\epsilon, \tag{7.14}$$

где $s = 1$ или $s = 4$ (в литературе встречаются и другие значения величины s) представляет собой величину нормировки тензорных возмущений. Если $s = 1$, то мы получаем $r = 0.0332 < 0.036$, что соответствует наблюдательным данным. При $s = 4$, $r = 0.1328$, что не согласуется с наблюдениями.

Для согласования модели по спектру мощности скалярных возмущений воспользуемся уточненной формулой [12, 51]

$$\mathcal{P}_S(k) = \frac{1}{2\epsilon}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \tag{7.15}$$

и экспериментальным значением $\mathcal{P}_S(k) = 2.14 \times 10^{-9}$, где k – модуль волнового вектора возмущений. В результате получаем, что масса скалярного поля φ определяется из соотношения $m^2 = 6.25 \times 10^{-11}$. Принимая во внимание (6.10), из сравнения с действием (6.4) можно определить соотношение между массами полей φ и χ : $m_\varphi = m_\chi/\sqrt{1 \mp k^2}$. То есть, если необходимо согласовать результат с массой конкретной частицы, то массу m_φ можно уменьшить или увеличить. Этот факт подчеркивает различие между однополевой и многополевой моделями, то есть за счет наличия других полей возможно эффективное изменение массы для однополевой модели.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 20-0200280-а и за счет средств Программы академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автор благодарен своим соавторам по данному направлению исследований: И.В. Фомину, Т.И. Чаадаевой (Майоровой), А.В. Хапаевой, а также участникам семинара лаборатории гравитации, космологии, астрофизики УлГПУ, принимавших участие в обсуждении данного обзора: В.М. Журавлеву, Н.А. Кошелеву, А.А. Чаадаеву, К.А. Большаковой.

Список литературы

1. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. *Квантовая теория поля*, т.2, М.: Мир, 1984.

2. Schwinger J., A theory of fundamental interactions. *Ann.Phys.*, 1957, **2** 407.

3. Skyrme T.H.R., A nonlinear theory of strong inderactions. *Proc.Roy.Soc.*, 1958, **A247** No. 1249, 260.

4. Gell-Mann M, Levy M, The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cim.*, 1960, **26** No. 4, 705.

5. Нелипа Н.Ф., *Физика элементарных частиц* М.: Высш.школа, 1977.

6. Weinberg S., Dynamical approach to current algebra. *Phys.Rev.Lett.*, 1967, **18** No. 5 188.

7. Адлер С., Дашен Р., Алгебры токов и их применение в физике частиц *М.: Мир*, 1970.

8. Polyakov A.M., *Phys.Lett.* **B 59** 79 (1975)

9. Белавин А.А., Поляков А.М., Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетка. *Письма в ЖЭТФ*, 1975, **22** No. 10, p. 503.

10. Переломов А.М., Решения типа инстантонов в киральных моделях. *УФН*, 1981, **134** №4 577.

11. Perelomov A.M., Chiral models: geometrical aspects. *Phys.Reports*, 1987, **146** No 3 136.

12. Червон С.В., О киральной модели космологической инфляции. *Izvestia vuzov. Physics*, 1995, №5 114.

13. Forger M., Instations in nonlinear sigma-models gauge theories and general relativity. *Lect.Not.Phys.*, 1981, **139** 110.

14. Fuller F.B., *Proc.Natl.Acad.Sci.*, 1954, **40** 987.

15. Eells J., Sampson J.H., Harmonic mappings of riemannian manifolds. *American Journal of Mathematics*, 1964, **86** No. 1, 109.

16. Eels J., Lemaire L., *Bull. London Math. Soc.*, 1968, **10** 1.

17. Misner C.W., *Phys.Rev.*, 1978, **D 18** 4510.

18. Schimming R., Hirschmann T., *Astron.Nachr.*, 1988, **309** No. 5, 311.

19. Pohlmeyer K., Integrable hamiltonian systems and interactions constraints. *Comm.Math.Phys.*, 1976, **46** 207.

20. Захаров В.Е., Михайлов А.В., Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи. *ЖЭТФ*, 1978, **74** 1953.

21. Gross D.J., Meron congigurations in the two-dimentional O(3) sigma-model. *Nucl.Phys.*, 1978, **B132** 439.

22. Ghika G., Visinescu M., Meron solution of the sigma model and singular harmonic maps. *Z.Physik*, 1982, **C11** 353.

23. Honerkamp J., Patani A., Schlindwein M., Shafi Q., On kink solutions in two space dimension. *Lett.Nuovo Cim.*, 1976, **15** No. 4, 97.

24. Вигман П.Б., Точное решение O(3) нелинейной сигма-модели в 2х измерениях. *Письма в ЖЭТФ*, 1985, **41** No. 2, 79.

25. Wiegmann P.B., Exact solution of the O(3) nonlinear sigma-model. *Phys.Lett.*, 1985, **B 152** No. 3, 4, 209.

26. Иванов Г.Г., Симметрии, законы сохранения и точные решения в нелинейной сигма-модели. *ТМФ*, 1983, **57** No. 1, 45.

27. Иванов Г.Г., Червон С.В., Точные решения в $SO(3)$-инвариантной нелинейной сигма модели, связанные с изометрическими и гомотетическими симметриями. в *Гравитация и теория относительности*, вып **24**, (Под ред. Кайгородова В.Р.) Казань, КГУ, 1987, с.37.

28. De'Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Gauge theories and strong gravity. *Nuovo Cim.*, 1979, **A 50** No. 4, 523.

29. Gava E., Jengo R., A four-dimensional nonlinear sigma-model. *Nucl.Phys.*, 1978, **140** No. 3, 510.

30. Tataru-Mihai P., Classical solutions for the 4-dimensional sigma-nonlinear model. *Nuovo.Cim.*, 1979, **A 51** No. 2, 169.

31. De'Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Nonlinear sigma models and classical solutions. *Preprint ICTP-Trieste* (Trieste, 1978).

32. Иванов Г.Г., Симметрии и классические решения в гравитационной SO(3)-инвариантной сигма-модели. в *Гравитация и теория относительности* вып. **21** (Под ред Кайгородова В Р) Казань, КГУ, 1984, вып. **21** с.97.

33. Иванов Г.Г., Полиномиальные законы сохранения и точные решения, связанные с изометрическими и гомотетическими симметриями в нелинейной сигма-модели. *ТМФ*, 1985, **62** No. 1, 144.

34. Иванов Г.Г., Изометрические симметрии взаимодействующих скалярных гравитирующих полей. в *Гравитация и теория относительности* вып. **18** (Под ред Кайгородова В Р) Казань, КГУ, 1981, с.48

35. Ghika G., Visinescu M., Four dimensional sigma model coupled to the metric tensor field. *Nuovo Cim.*, 1980, **B 59** No. 1, 59.

36. Червон С.В., Плоско-симметричные решения в $SO(4)$-инвариантной самогравитирующей σ-модели. *Izvestia vuzov. Physics*, 1983, No. 8, 89.

37. Червон С.В., О киральной модели нелинейных скалярных полей. *Гравитация и теория относительности*, вып. **29** (Под ред Кайгородова В Р) Казань, КГУ, 1992, с.85.

38. Chervon S.V., Nonlinear sigma models for inflation scenarios. *IUCAA*, Preprint IUCAA - 15/92 (Pune, IUCAA, October 1992).

39. Naruko A., Yoshida D., Mukohyama S. Gravitational scalar-tensor theory. *Class. Quant. Grav.*, 2016, **33**, No. 9., p. 09LT01.

40. Saridakis E. N., Tsoukalas M., Cosmology in new gravitational scalar-tensor theories. *Physical Review D.*, 2016, **93**, No. 12, p. 124032.

41. Fujii Y., Maeda K., *The Scalar–Tensor Theory of Gravitation.* Cambridge: Cambridge University Press, 2004. p. 257.

42. Chervon S.V., Chiral Cosmological models: Dark Sector Fields Description. *Quantum Matter.*, 2013, **2**, No. 2, p. 71.

43. Chervon S.V. and Fomin I.V. and Mayorova T.I., Chiral Cosmological Model of $f(R)$ Gravity with a Kinetic Curvature Scalar, *Grav. Cosmol.*, 2019, **25**, No. 3, 205.

44. Chervon S., Nikolaev A., Mayorova T., *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2017, **1** 30.

45. Chervon S., Nikolaev A., Mayorova T., Odintsov S., Oikonomou V. *Nucl. Phys.B*, 2019, **936** 597.

46. Ade P et al. [PLANCK Collaboration] 2016 *Astron. Astrophys.* **594** A13.

47. Chervon S., Fomin I., Yurov V. and Yurov A. 2019 *Scalar field cosmology* (Singapore: World Scientific) p. 288.

48. Иванов Г.Г., Червон С.В., Хапаева А.В., Космологическая модель Фридмана с нелинейным скалярным полем. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2020, No. 3, 66.

49. Nojiri S., Odintsov S. *Phys. Rep.*, 2010, **505** 59.

50. Sotiriou T., Faraoni V. *Rev. Mod. Phys.*, 2010, **82** 451.

51. Fomin I., Chervon S., *Phys. Rev. D*, 2019, **100** 023511.

52. De Felice A., Tsujikawa S., Elliston J. and Tavakol R., Chaotic inflation in modified gravitational theories. *JCAP*, 2011, **08**, 021.

53. Chervon, S.V. and Fomin, I.V. and Pozdeeva, E.O. and Sami, M. and Vernov, S.Yu., Superpotential method for chiral cosmological models connected with modified gravity. *Phys. Rev. D*, 2019, **100**, No. 6, 063522.

54. Червон С.В., Фомин И.В., Кубасов А.С. *Скалярные и киральные поля в космологии*, Ульяновск: УлГПУ., 2015., с.216.

55. Червон С.В., Кубасов А.С., Большакова К.А. Космологическая инфляция в тензорно-мультискалярной теории гравитации. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2018, No. 1. pp. 50-66. Chervon S.V., Kubasov A.S., Bolshakova K.A. Cosmological inflation in tensor-multi-scalar theory of gravitation. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, No. 1, pp. 67–81.

56. Salopek D.S. and J.R. Bond, Stochastic inflation and nonlinear gravity. *Phys. Rev. D*, 1991, **43**, 1005-1031.

57. Chervon S.V., Fomin I.V. and Beesham A., The method of generating functions in exact scalar field inflationary cosmology. *Eur. Phys. J. C.*, 2018, **78** No. 4, 301.

References

1. Iciksjun K., Zjuber Zh.-B. *Quantum field theory*, vol.2, Moscow, Mir, 1984.

2. Schwinger J., A theory of fundamental interactions. *Ann.Phys.*, 1957, **2** 407.

3. Skyrme T.H.R., A nonlinear theory of strong inderactions. *Proc.Roy.Soc.*, 1958, **A247** No 1249, 260.

4. Gell-Mann M, Levy M, The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cim.*, 1960, **26** No 4, 705.

5. Nelipa N.F., *Physics of elementary particles* Moscow.: H.sch., 1977.

6. Weinberg S., Dynamical approach to current algebra. *Phys.Rev.Lett.*, 1967, **18** No 5 188.

7. Adler S., Dashen R., *Current algebras and their applications in particle physics*, Moscow, Mir, 1970.

8. Polyakov A.M., *Phys.Lett.*, **B 59** 79 (1975)

9. Belavin A.A., Poljakozh A.M., Metastable states of a two-dimensional isotropic ferromagnet. *Let. Jo. Exp. Theor. Phys.*, 1975,

10. Perelomov A.M., Instanton-type solutions in chiral models *UFN*, 1981.

11. Perelomov A.M., Chiral models: geometrical aspects. *Phys.Reports*, 1987, **146** No 3 136.

12. Chervon S.V., On the Chiral Model of Cosmological Inflation. *Izvestia vuzov. Physics*, 1995, №5 114.

13. Forger M., Instations in nonlinear sigma-models gauge theories and general relativity. *Lect.Not.Phys.*, 1981, **139** 110.

14. Fuller F.B., *Proc.Natl.Acad.Sci.*, 1954, **40** 987.

15. Eells J., Sampson J.H., Harmonic mappings of riemannian manifolds. *American Journal of Mathematics*, 1964, **86** No. 1, 109.

16. Eels J., Lemaire L., *Bull. London Math. Soc.*, 1968, **10** 1.

17. Misner C.W., *Phys.Rev.*, 1978, **D 18** 4510.

18. Schimming R., Hirschmann T., *Astron.Nachr.*, 1988, **309** No. 5, 311.

19. Pohlmeyer K., Integrable hamiltonian systems and interactions constraints. *Comm.Math.Phys.*, 1976, **46** 207.

20. Zaharozh V.E., Mihajlov A.V., Relativistically invariant two-dimensional field theory models, integrable by the inverse problem method. *Jo. Exp. Theor. Phys.*, 1978

21. Gross D.J., Meron congigurations in the two-dimentional O(3) sigma-model. *Nucl.Phys.*, 1978, **B132** 439.

22. Ghika G., Visinescu M., Meron solution of the sigma model and singular harmonic maps. *Z.Physik*, 1982, **C11** 353.

23. Honerkamp J., Patani A., Schlindwein M., Shafi Q., On kink solutions in two space dimension. *Lett.Nuovo Cim.*, 1976, **15** No. 4, 97.

24. Vigman P.B., Exact solution of O(3) nonlinear sigma model in 2 dimensions. *Let. Jo. Exp. Theor. Phys.*, 1985, vol. 41, no. 2, p. 79.

25. Wiegmann P.B., Exact solution of the O(3) nonlinear sigma-model. *Phys.Lett.*, 1985, **B 152** No. 3, 4, 209.

26. Ivanov G.G., Symmetries, conservation laws and exact solutions in the nonlinear sigma model. *Theor. Math. Phys.*, 1983, vol. 57, no. 1, p. 45.

27. Ivanov G.G., Chervon S.V., Exact solutions in the $SO(3)$invariant nonlinear sigma model, associated with isometric and homothetic symmetries. *Grav. GR*, vol. 24, (Edited by V.R. Kaigorodov). Kazan, KSU, 1987, p. 37.

28. De'Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Gauge theories and strong gravity. *Nuovo Cim.*, 1979, **A 50** No. 4, 523.

29. Gava E., Jengo R., A four-dimensional nonlinear sigma-model. *Nucl.Phys.*, 1978, **140** No. 3, 510.

30. Tataru-Mihai P., Classical solutions for the 4-dimensional sigma-nonlinear model. *Nuovo.Cim.*, 1979, **A 51** No. 2, 169.

31. De'Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Nonlinear sigma models and classical solutions. *Preprint ICTP-Trieste* (Trieste, 1978).

32. Ivanov G.G., Symmetries and classical solutions in the gravitational SO(3)-invariant sigma model. *Grav Rel. Theor.*, vol. 21 (Edited by V.R. Kaigorodov), Kazan, KSU, 1984, vol. 21, p.97.

33. Ivanov G.G., Polynomial conservation laws and exact solutions associated with isometric and homothetic symmetries in a nonlinear sigma model. *Th. Math. Phys.*, 1985, vol. 62, no. 1, 144.

34. Ivanov G.G., Isometric symmetries of interacting scalar gravitational fields. *Grav. Rel. Theor.*, vol. 18, (Edited by V.R. Kaigorodov), Kazan, KSU, 1981, p.48

35. Ghika G., Visinescu M., Four dimensional sigma model coupled to the metric tensor field. *Nuovo Cim.*, 1980, **B 59** No. 1, 59.

36. Chervon S.V., Flat-symmetric solutions in the $SO(4)$invariant self-gravitational σ-model. *Izvestia vuzov. Physics*, 1983, no. 8,p 89.

37. Chervon S.V., On the chiral model of nonlinear scalar fields. *Grav. Rel. Theor.*, vol. 29 (Edited by V.R. Kaigorodov) Kazan, KSU 1992, p.85.

38. Chervon S.V., Nonlinear sigma models for inflation scenarios. *IUCAA*, Preprint IUCAA - 15/92 (Pune, IUCAA, October 1992).

39. Naruko A., Yoshida D., Mukohyama S. Gravitational scalar-tensor theory. *Class. Quant. Grav.*, 2016, **33**, No. 9., p. 09LT01.

40. Saridakis E. N., Tsoukalas M., Cosmology in new gravitational scalar-tensor theories. *Physical Review D.*, 2016, **93**, No. 12, p. 124032.

41. Fujii Y., Maeda K., *The Scalar–Tensor Theory of Gravitation.* Cambridge: Cambridge University Press, 2004. p. 257.

42. Chervon S.V. Chiral Cosmological models: Dark Sector Fields Description. *Quantum Matter.*, 2013, **2**, No. 2, p. 71.

43. Chervon S.V. and Fomin I.V. and Mayorova T.I., Chiral Cosmological Model of $f(R)$ Gravity with a Kinetic Curvature Scalar, *Grav. Cosmol.*,2019, **25**, No. 3, 205.

44. Chervon S., Nikolaev A., Mayorova T., *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2017, **1** 30.

45. Chervon S., Nikolaev A., Mayorova T., Odintsov S., Oikonomou V. *Nucl. Phys.B*, 2019, **936** 597.

46. Ade P. et al. [PLANCK Collaboration], 2016, *Astron. Astrophys.* **594** A13.

47. Chervon S., Fomin I., Yurov V. and Yurov A. 2019 *Scalar field cosmology*, (Singapore: World Scientific), p. 288.

48. Ivanov G.G., Chervon S.V., Khapaeva A.V., Friedman cosmological model with a nonlinear scalar field. *STFI*, 2020, No. 3, 66.

49. Nojiri S., Odintsov S. *Phys. Rep.*, 2010, **505** 59.

50. Sotiriou T., Faraoni V. *Rev. Mod. Phys.*, 2010, **82** 451.

51. Fomin I., Chervon S., *Phys. Rev. D*, 2019, **100** 023511.

52. De Felice A., Tsujikawa S., Elliston J. and Tavakol R., Chaotic inflation in modified gravitational theories. *JCAP*, 2011, **08**, 021.

53. Chervon, S.V. and Fomin, I.V. and Pozdeeva, E.O. and Sami, M. and Vernov, S.Yu., Superpotential method for chiral cosmological models connected with modified gravity. *Phys. Rev. D*, 2019, **100**, No. 6, 063522.

54. Chervon S.V., Fomin I.V., Kubasov A.S. *Scalar and Chiral Fields in Cosmology*, Ulyanovsk: USPU. 2015. p.216.

55. Chervon S.V., Kubasov A.S., Bolshakova K.A. Cosmological inflation in tensor-multi-scalar theory of gravitation. *STFI*, 2018, No. 1, pp. 67–81.

56. Salopek D.S. and J.R. Bond, Stochastic inflation and nonlinear gravity. *Phys. Rev. D*, 1991, **43**, 1005-1031.

57. Chervon S.V., Fomin I.V. and Beesham A., The method of generating functions in exact scalar field inflationary cosmology. *Eur. Phys. J. C.*, 2018, **78** No. 4, 301.

Авторы

Червон Сергей Викторович, д.ф.-м.н, профессор, Лаборатория гравитации, космологии, астрофизики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, пл. Ленина, 4/5, Ульяновск, 432071, Россия, Кафедра физики, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Москва, 105005, Россия, Институт физики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия

E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Червон С. В. Киральные само-гравитирующие модели: точные решения и вычисление космологических параметров. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2022. № 40. С. 30–49.

Authors

Chervon Sergei Vicktorovich, PhD, professor, Laboratory of gravitation, cosmology, astrophysics, Ulyanovsk State Pedagogical University after I.N.Ulyanov, 4/5 Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russia, Department of Physics, N.E. Bauman Moscow State Technical University, 5, 2nd Baumanskaya str. 1, Moscow, 105005, Russia, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlevskaya ul. 18, Kazan, 420008, Russia
E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Please cite this article in English as:

Chervon S. V. Chiral self-gravitational models: exact solutions and calculation of cosmological parameters. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2022, no. 40, pp. 30–49.