УДК 530.12, 531.51

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ И ВЕРИФИКАЦИИ ИНФЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ*

Фомин И. В.[a,b,1]

[a] Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, Россия.

[b] Ульяновский государственный педагогический университет, г. Ульяновск, 432071, Россия

В работе рассматриваются методы построения точных решений уравнений космологической динамики для инфляционных моделей ранней вселенной со скалярными полями на основе гравитации Эйнштейна и ее модификаций. Даны определения основных фоновых параметров моделей космологической инфляции и параметров космологических возмущений. Рассматриваются методы построения инфляционных моделей ранней вселенной, которые удовлетворяют современным наблюдательным ограничениям на значения параметров космологических возмущений.

Ключевые слова: скалярные поля, космологические возмущения, модифицированные теории гравитации.

METHODS FOR CONSTRUCTING AND VERIFYING INFLATIONARY MODELS OF THE EARLY UNIVERSE

Fomin I. V.[a,b,1]

[a] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia.

[b] Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, 432071, Russia.

The paper considers methods for analyzing inflationary models of the early universe with scalar fields based on Einstein gravity and its modifications. Definitions of the main background parameters of cosmological inflationary models and parameters of cosmological perturbations are given. Methods for constructing inflationary models of the early universe that satisfy modern observational constraints on the values of the parameters of cosmological perturbations are considered.

Keywords: scalar fields, cosmological perturbations, modified gravity theories.

PACS: 04.50.-h
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2022.3.50-63

Введение

Несмотря на то, что стандартные инфляционные сценарии, основанные на теории гравитации Эйнштейна и постулировании существования некоторого канонического скалярного поля (инфлатона), являющегося источником ускоренного расширения Вселенной на ранней стадии ее эволюции, успешно объясняют происхождение крупномасштабной структуры, анизотропию реликтового излучения и механизмы образования элементарных частиц [1–3], то есть дают последовательный метод объяснения происхождения Вселенной и ее дальнейшей эволюции, в настоящее время рассматриваются космологические модели на основе различных модификаций общей теории относительности [4–10].

*Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22–22–00248.

[1] E-mail: ingvor@inbox.ru

Обычным методом анализа космологических моделей с модифицированными теориями гравитации являются конформные преобразования метрики, которые приводят действие, определяющее модель с модифицированной гравитацией, к действию Эйнштейна-Гильберта с соответствующим преобразованием геометрических и материальных компонент в действии, что соответствует переходу от представления Йордана к представлению Эйнштейна для произвольного вида метрики пространства-времени [4–6].

Тем не менее, актуальным представляется подход, в котором определяются функциональные и параметрические связи между модифицированными теориями гравитации и ОТО на фоне пространства Фридмана-Робертсона-Уокера непосредственно из уравнений динамики, что позволяет производить оценку расхождений в предсказаниях этих теорий при построении актуальных космологических моделей [9, 10].

Также, при построении моделей ранней Вселенной важное значение имеет их верификация, то есть сопоставление предсказаний теории с имеющимися на данный момент наблюдениями, связанными с анизотропией и поляризацией реликтового излучения, барионными акустическими осцилляциями и оценкой значения параметра Хаббла на современной стадии повторного ускоренного расширения [11, 12].

В рамках теории космологических возмущений, квантовые флуктуации скалярного поля порождают соответствующие возмущения метрики пространства-времени. В линейном порядке теории космологических возмущений учитываются три типа возмущений, которые развиваются независимо. Скалярные возмущения являются источником крупномасштабной структуры, тензорные возмущения представляют собой реликтовые гравитационные волны, а векторные возмущения быстро угасают в процессе ускоренного расширения вселенной.

Таким образом, скалярные и тензорные возмущения оказывают влияние на реликтовое излучение по наблюдением которого можно определить ограничения на значения характеристик скалярных и тензорных возмущений [2, 3].

Поскольку характеристики космологических возмущений зависят от модели космологической инфляции, сопоставление предсказываемых в модели значений параметров космологических возмущений современным наблюдательным ограничениям является важным критерием проверки корректности космологических моделей.

В данной работе рассматриваются различные методы преобразования исходных космологических моделей, не соответствующих наблюдательным ограничениям, к новым верифицируемым по наблюдательным данным моделям. Также рассматривается влияние различных модификаций общей теории относительности на параметры космологических моделей.

1. Космологические модели со скалярным полем

Модели инфляционного ускоренного расширения Вселенной на раннем этапе ее эволюции, то есть на временах близких ко времени Планка, в настоящее время, становятся все более убедительными как необходимый этап, модифицирующий стандартную теорию Большого Взрыва, которая основана на фридмановских решениях уравнений гравитационного поля для Вселенной, заполненной обычным барионным веществом с положительной плотностью энергии $\rho_m > 0$ и давлением $p_m > 0$, $\rho_m + p_m > 0$. Однако, экстраполяция фридмановских решений на ранние времена приводит ко многим неразрешимым проблемам при построении на их основе сценариев эволюции Вселенной [1].

Экспоненциальное (де Ситтеровское) расширение, предполагающее $p = -\rho$, или близкое к нему расширение ранней Вселенной на основе эволюции некоторого вещества с уравнением состояния $p \simeq -\rho$, то есть с отрицательным давлением, является особенностью инфляционных моделей, которые позволяют решить проблемы стандартной модели теории Большого Взрыва, именно, проблемы горизонта, плоскостности, однородности, изотропности, малой концентрации экзотических состояний материи (доменных стенок, релитовых монополей и др.), анизотропии реликтового излучения, начальной сингулярности и некоторые другие проблемы [1].

В качестве источника ускоренного расширения ранней Вселенной с уравнением состояния $p \simeq -\rho$ можно рассматривать некоторое скалярное (бозонное) поле. Статистика Бозе-Эйнштейна для ансамбля бозонов, в отличие от ансамбля фермионов, подчиняющихся принципу запрета Паули, подразумевает, что в одном квантовом состоянии могут находиться несколько частиц, что приводит к образованию бозонного конденсата, в котором увеличение концентрации бозонов связано с уменьшением эффективного давления до соответствующего уравнению состояния вида $p \simeq -\rho$.

Изначальное (квази) экспоненциальное расширение, связанное с отрицательным давлением, в силу экзотического уравнения состояния, является неустойчивым, что приводит к фазовому переходу, прекращению ускоренного расширения и распаду первоначального объема на множество областей, в которых дальнейшая эволюция соответствует решениям Фридмана.

Также наличие скалярного поля нарушает симметрию системы, что приводит к появлению массы у изначально безмассовых частиц, например, в поле Хиггса [1]. Таким образом, введение в космологические модели скалярного поля делает возможным переход от решений (квази) де Ситтера к решениям Фридмана.

Чтобы предотвратить быстрый распад состояния $p \simeq -\rho$, необходимо допустить существование некоторого потенциального барьера $V(\phi)$, то есть минимума потенциальной энергии скалярного поля. Следовательно, в реалистичных моделях инфляции скалярное поле эволюционирует из состояния «фальшивого вакуума» с ненулевой потенциальной энергией в состояние «истинного вакуума», соответствующее минимуму потенциала $V_{min}(\phi) = 0$. Иначе говоря, скалярное поле скатывается (или туннелирует) из некоторого начального состояния к минимуму $V(\phi)$, и характер этого процесса определяется формой потенциала.

На данный момент существует множество моделей космологической инфляции с различными потенциалами скалярного поля и различной спецификой реализации инфляционной стадии эволюции вселенной. Большое число актуальных моделей ранней Вселенной на основе инфляционной парадигмы рассмотрено в обзоре [13].

В большинстве космологических моделей геометрическое описание Вселенной основано на модели однородного изотропного пространства (пространства-времени) Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) с пространственно плоской метрикой, исходя из современных наблюдательных данных [11, 12].

Пространственно плоская метрика пространства Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) в системе единиц $8\pi G = c = 1$ записывается следующим образом [1–3]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{1.1}$$

где $a = a(t)$ – масштабный фактор, δ_{ij} – символ Кронекера.

Также отметим два важных частных случая пространства ФРУ:

1. Случай $a(t) = \exp(\lambda t)$, где λ – некоторая постоянная, то есть экспоненциальное расширение пространства соответствует метрике де Ситтера
$$(ds^2)_{dS} = -dt^2 + \exp(2\lambda t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right); \tag{1.2}$$

2. Случай $a(t) = const$, то есть некоторая локальная малая окрестность пространства ФРУ соответствует пространству Минковского
$$(ds^2)_{Mink} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.3}$$

В контексте построения и анализа моделей ранней Вселенной большое значение имеют динамические свойства пространства де Ситтера как частного случая пространства ФРУ при условии экспоненциального ускоренного расширения, поскольку инфляционная стадия подразумевает режим ускоренного расширения близкий к экспоненциальному.

Для анализа динамики расширения вселенной также рассматривается параметр Хаббла

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \tag{1.4}$$

где точка означает производную по космическому времени t.

Другим параметром, характеризующим космологическую динамику, является число e-фолдов или число возрастаний масштабного фактора в e-раз, которое обычно записывается как натуральный логарифм отношения масштабного фактора в конце инфляции к масштабному фактору в начале [2, 3]

$$N = \ln \frac{a(t_e)}{a(t_i)} = \int_{t_i}^{t_e} H dt \simeq 60, \tag{1.5}$$

где t_i и t_e – время начала и завершения стадии инфляции.

Также определим первые два параметра медленного скатывания [2, 3]

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{1.6}$$

$$\delta \equiv -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}} = \epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon}, \tag{1.7}$$

значения которых для квазиэкспоненциального режима ускоренного расширения вселенной (при $H \simeq const$) оцениваются как $\epsilon \ll 1$, $\delta \ll 1$.

Ускоренному расширению вселенной соответствует $\epsilon < 1$ и условие $\epsilon = 1$ определяет завершение инфляционной стадии.

Отметим, что параметры медленного скатывания связаны как с динамикой расширения вселенной, так и со спектральными параметрами космологических возмущений, и применение параметров медленного скатывания для анализа моделей космологической инфляции является достаточно удобным.

2. Модели космологической инфляции на основе гравитации Эйнштейна

Теперь, в системе единиц $8\pi G = c = 1$, запишем действие, определяющее динамику скалярного поля ϕ (инфлатона) в моделях космологической инфляции на основе теории гравитации Эйнштейна [2, 3]

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right], \tag{2.1}$$

где g – определитель метрического тензора, R – скалярная кривизна, $X = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ – кинетическая энергия скалярного поля и $V(\phi)$ – потенциал скалярного поля.

Скалярное поле ϕ будем рассматривать как некоторую идеальную жидкость с баротропным уравнением состояния ($p = w\rho$).

Вид потенциала скалярного поля определяется из физики элементарных частиц, теорий объединения фундаментальных взаимодействий, таких как суперсимметричные теории и теории струн в контексте инфляционной парадигмы [13].

Из вариации действия (2.1) по метрике и полю, для случая пространственно плоской Вселенной Фридмана

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{2.2}$$

получим уравнения, определяющие динамику инфлатона [2, 3]

$$E_1 \equiv 3H^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \tag{2.3}$$

$$E_2 \equiv 3H^2 + 2\dot{H} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \tag{2.4}$$

$$E_3 \equiv \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'_\phi = 0, \tag{2.5}$$

где $V'_\phi = dV/d\phi$, также $V'_\phi = \frac{dV}{dt}\frac{dt}{d\phi}$.

Также отметим, что из трех уравнений (2.3)–(2.5) только два являются независимыми, поскольку в данном случае выполняется следующее соотношение

$$\dot{\phi}E_3 + \dot{E}_1 + 3H\left(E_1 - E_3\right) = 0, \tag{2.6}$$

что можно проверить непосредственной подстановкой уравнений (2.3)–(2.5) в выражение (2.6).

По этой причине, два независимых уравнения системы (2.3)–(2.5) полностью определяют параметры инфляционных моделей ранней вселенной на основе гравитации Эйнштейна.

Существуют различные способы построения точных решений уравнений (2.3)–(2.5), одним из которых является априорное определение динамики ускоренного расширения ранней вселенной на основе задания параметра Хаббла как функции космического времени $H = H(t)$ и определения остальных параметров модели для данного параметра Хаббла [3].

Теперь определим плотность энергии скалярного поля

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) = X + V, \tag{2.7}$$

давление

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = X - V, \tag{2.8}$$

и соответствующий параметр состояния

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{X - V}{X + V} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2} = -1 + \frac{2}{3}\epsilon, \tag{2.9}$$

что следует из уравнений (2.3)–(2.4) и (1.6).

2.1. Режим медленного скатывания

Для экспоненциального расширения $a(t) \propto \exp(\lambda t)$, $H = \lambda = const$ и $\epsilon = 0$, что соответствует случаю вакуума с параметром состояния $w = -1$, также из уравнений (2.3)–(2.5) и (2.9) получим $X = 0$ и $V = 3\lambda^2 = const$.

Для режима ускоренного расширения близкого к экспоненциальному $H \simeq const$ параметр медленного скатывания $\epsilon \ll 1$, параметр состояния $w \simeq -1$, что соответствует преобладанию потенциальной энергии скалярного поля над кинетической энергией $X \ll V$ и, как следствие, медленное скатывание поля к минимуму потенциала.

Также запишем уравнения космологической динамики (2.3)–(2.4) в следующем виде

$$V(\phi(t)) = 3H^2 + \dot{H}, \tag{2.10}$$

$$X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H}. \tag{2.11}$$

Разделив оба уравнения на H^2, получим

$$\tilde{V} = \frac{V}{H^2} = 3 - \epsilon, \tag{2.12}$$

$$\tilde{X} = \frac{X}{H^2} = \epsilon, \tag{2.13}$$

что для $\epsilon \ll 1$ также соответствует условию медленного скатывания $X \ll V$.

2.2. Параметры космологических возмущений

При выполнении условий медленного скатывания $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$ параметры космологических возмущений в инфляционных моделях на основе гравитации Эйнштейна на характерном масштабе (пересечении радиуса Хаббла) определяются следующим образом [2, 3]

$$\mathcal{P}_S = -\frac{H^4}{8\pi^2 \dot{H}}, \qquad \mathcal{P}_T = \frac{2H^2}{\pi^2}, \tag{2.14}$$

$$n_S - 1 = -4\epsilon + 2\delta, \tag{2.15}$$

$$r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_S} = 16\epsilon, \tag{2.16}$$

где $\mathcal{P}_S$ и $\mathcal{P}_T$ – спектры мощности скалярных и тензорных возмущений, n_S – спектральный индекс скалярных возмущений, r – тензорно-скалярное отношение, пересечению радиуса Хаббла соответствует условие $k = aH$, где k – волновое число.

Современные наблюдательные ограничения на значения параметров космологических возмущений, согласно наблюдениям анизотропии и поляризации реликтового излучения [11, 12]

$$P_S = 2.1 \times 10^{-9}, \tag{2.17}$$

$$n_S = 0.9663 \pm 0.0041, \tag{2.18}$$

$$r < 0.032. \tag{2.19}$$

Также отметим, что при получении зависимости $r = r(n_S)$ в явном виде для любой инфляционной модели, условия (1.5) и (2.17) удовлетворяются за счет выбора постоянных параметров модели и времени пересечения радиуса Хаббла.

Таким образом, для верификации инфляционных моделей по наблюдательным ограничениям на значения параметров космологических возмущений будем рассматривать (2.18)–(2.19).

3. Верификация инфляционных моделей на основе преобразования параметра Хаббла

В случае гравитации Эйнштейна наблюдательным ограничениям на значения параметров космологических возмущений удовлетворяют только некоторые модели космологической инфляции.

В качестве примера рассмотрим степенную инфляцию с параметром Хаббла и масштабным фактором вида [3]

$$H(t) = \frac{m}{t}, \qquad a(t) \propto t^m, \tag{3.1}$$

где $m > 1$ – некоторая постоянная.

Точные решения уравнений (2.10)–(2.11) записываются следующим образом

$$\phi(t) = \pm\sqrt{2m}\ln t, \tag{3.2}$$

$$V(\phi) = m(3m-1)\exp\left(\mp\sqrt{\frac{2}{m}}\phi\right), \tag{3.3}$$

и параметры медленного скатывания

$$\epsilon = \delta = \frac{1}{m}. \tag{3.4}$$

Таким образом, условия медленного скатывания $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$ выполняются для $m \gg 1$.

На основе выражений (2.15)–(2.16) для параметра Хаббла (3.1) получим следующую зависимость тензорно-скалярного отношения от спектрального индекса скалярных возмущений

$$r = 8(1 - n_S). \tag{3.5}$$

Для верификации данной модели по наблюдательным ограничениям на значения параметров космологических возмущений рассмотрим максимальное значение спектрального индекса скалярных возмущений $n_S^{(max)} = 0.97$, соответствующее минимальному значению тензорно-скалярного отношения $r_{(min)} = 0.237$, что не соответствует наблюдательному ограничению (2.19).

Таким образом, в данном случае, необходимо преобразование исходной модели инфляции, которая не удовлетворяет наблюдательным ограничениям (2.17)–(2.19), в новую модель, удовлетворяющую данным ограничениям.

В качестве примера данного подхода в работе [14] рассматривались преобразования исходных точных решений уравнений космологической динамики $\{H, V, \phi\}$ в новые точные решения $\{\bar{H}, \bar{V}, \varphi\}$ следующего вида

$$\bar{H} = nH + \lambda, \tag{3.6}$$

$$\bar{a}(t) = Ca^n(t)e^{\lambda t}, \tag{3.7}$$

$$\bar{V}(t) = 3n^2H^2 + 6\lambda nH + n\dot{H} + 3\lambda^2, \tag{3.8}$$

$$\varphi = \sqrt{n}\phi, \tag{3.9}$$

где C, n и λ – некоторые положительные постоянные.

После преобразования исходных решений для степенной инфляции, при условии $n = 1$, получим точные решения для экспоненциально-степенной инфляции

$$\bar{H}(t) = \frac{m}{t} + \lambda, \qquad a(t) \propto t^m \exp(\lambda t), \tag{3.10}$$

$$\varphi(t) = \pm\sqrt{2m}\ln t, \tag{3.11}$$

$$\bar{V}(\varphi) = 3\lambda^2 + 6\lambda m \exp\left(\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{m}}\varphi\right) + 3m(m-1)\exp\left(\mp\sqrt{\frac{2}{m}}\varphi\right). \tag{3.12}$$

Параметры медленного скатывания для новой модели

$$\epsilon = \frac{m}{(\lambda t + m)^2}, \qquad \delta = \frac{1}{\lambda t + m}, \qquad \epsilon = m\delta^2, \tag{3.13}$$

и условия медленного скатывания $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$ удовлетворяются для $(\lambda t + m) \gg 1$.

Рассматривая значения $m \sim 1$, из уравнений (2.15)–(2.16) получим

$$n_S - 1 = -4\epsilon + 2\delta = -4m\delta^2 + 2\delta \simeq 2\delta, \tag{3.14}$$

$$(1 - n_S)^2 \simeq 4\delta^2, \qquad r = 16m\delta^2. \tag{3.15}$$

Таким образом, для модели экспоненциально-степенной инфляции получим следующую зависимость тензорно-скалярного отношения от спектрального индекса скалярных возмущений

$$r = 4m(1 - n_S)^2 \simeq 4(1 - n_S)^2. \tag{3.16}$$

Для максимального значения спектрального индекса скалярных возмущений $n_S^{(max)} = 0.97$ получим $r_{(min)} \simeq 0.0035$, что соответствует наблюдательному ограничению (2.19) на вклад тензорных возмущений в анизотропию и поляризацию реликтового излучения.

4. Модели космологической инфляции с неминимальной связью скалярного поля и кривизны

Скалярно-тензорные теории гравитации являются известным расширением общей теории относительности, и действие для моделей космологической инфляции в системе единиц $8\pi G = c = 1$ на основе скалярно-тензорных теорий гравитации записывается следующим образом [15]

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}F(\phi)R - \frac{\omega(\phi)}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right]. \tag{4.1}$$

В случае когда поле является геометрическим, гравитационная постоянная является функцией поля $G = G(\phi)$, что не соответствует выбранной системе единиц $8\pi G = c = 1$, однако трактовка скалярного поля как геометрического или материального является неоднозначной, исходя из возможных конформных преобразований метрики [15].

В данном случае скалярное поле ϕ является материальным, а не геометрическим, и функция $F = F(\phi)$ определяет тип неминимальной связи скалярного поля и скаляра кривизны, а кинетическая функция $\omega = \omega(\phi)$ определяет взаимодействие поля и его кинетической энергии.

Для случая пространственно плоской Вселенной Фридмана действию (4.1) соответствуют следующие уравнения космологической динамики [10]

$$E_1 \equiv 3FH^2 + 3H\dot{F} - \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \tag{4.2}$$

$$E_2 \equiv 3FH^2 + 2H\dot{F} + 2F\dot{H} + \ddot{F} + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \tag{4.3}$$

$$E_3 \equiv \omega\ddot{\phi} + 3\omega H\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\omega' + V' - 6H^2F' - 3\dot{H}F' = 0, \tag{4.4}$$

причем условие (2.6) соблюдается и в данном случае.

Рассматривая квадратичную связь параметра Хаббла и функции неминимального взаимодействия скалярного поля и кривизны [10]

$$H = \lambda\sqrt{F}, \tag{4.5}$$

уравнения космологической динамики (4.2)–(4.3) приводятся к следующему виду

$$\tilde{F}(\phi) \equiv \lambda^2 F(\phi) = H^2, \tag{4.6}$$

$$\tilde{V}(\phi) \equiv \lambda^2 V(\phi) = 3H^4 + 6H^2\dot{H} + \dot{H}^2 + H\ddot{H}, \tag{4.7}$$

$$\tilde{X}(\phi, \dot{\phi}) \equiv \lambda^2 X(\phi, \dot{\phi}) = \dot{H}^2 + H\ddot{H}, \tag{4.8}$$

где кинетическая функция

$$\tilde{X}(\phi, \dot{\phi}) \equiv -\frac{1}{2}\tilde{\omega}(\phi)\dot{\phi}^2, \quad \tilde{\omega}(\phi) \equiv \lambda^2\omega(\phi), \tag{4.9}$$

и постоянная λ^2 является параметром энергетического масштаба инфляции [10].

Рассматривая на основе уравнений (4.6)–(4.9) приведенный потенциал и кинетическую энергию скалярного поля

$$v \equiv \frac{\tilde{V}}{\tilde{F}^2} = 3 - 6\epsilon + 2\epsilon\delta + \epsilon^2, \tag{4.10}$$

$$u \equiv \frac{\tilde{X}}{\tilde{F}^2} = 2\epsilon\delta + \epsilon^2, \tag{4.11}$$

можно заключить, что условиям $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$ соответствует режим медленного скатывания $X \ll V$.

Для параметра Хаббла

$$H(t) = [(2k-1)(\alpha t - \lambda)]^{1/(1-2k)}, \tag{4.12}$$

где α – некоторая постоянная, а k – постоянный параметр, который определяет темп ускоренного расширения ранней вселенной, из уравнений (4.6)–(4.9) следуют соотношения

$$V(\phi) \simeq 3\lambda^2 F^2(\phi), \tag{4.13}$$

$$\omega(\phi) = -\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{F'^2}{F}, \quad k < 1, \tag{4.14}$$

$$F(\phi) = \lambda^{-2}\left[(2k-1)(\alpha t - \lambda)\right]^{2/(1-2k)}, \tag{4.15}$$

первые два из которых определяют связь между физическими потенциалами скалярного поля и известными типами скалярно-тензорных теорий гравитации, а третье определяет эволюцию скалярного поля для рассматриваемого типа неимнимального взаимодействия.

Также, для данных моделей вне зависимости от вида потенциала скалярного поля и типа скалярно-тензорной гравитации зависимость тензорно-скалярного отношения от спектрального индекса скалярных возмущений выглядит следующим образом [10]

$$r = \frac{2}{1-k}(1-n_S)^2, \tag{4.16}$$

что соответствует возможности верификации данных космологических моделей по наблюдательным ограничениям на значения параметров космологических возмущений как и в предыдущем случае, но уже для произвольного потенциала скалярного поля $V(\phi)$, то есть для любой возможной реализации инфляционного сценария эволюции ранней вселенной на основе известных скалярно-тензорных теорий гравитации.

Таким образом, верифицируемые по наблюдательным данным модели космологической инфляции с неминимальной связью скалярного поля и кривизны можно построить на основе определения соотношений между параметрами моделей, которые, в общем случае, могут отличатся от рассмотренного соотношения (4.5).

5. Модели космологической инфляции на основе телепараллельной гравитации

Одной из модификаций гравитации Эйнштейна является телепараллельная гравитация, в которой вместо кривизны R рассматривается кручение T. Телепараллельная гравитация является калибровочной теорией для группы трансляций, а в качестве динамических переменных рассматриваются тетрадные поля $e^A_{\ \mu}$, которые используются вместо метрики пространства-времени [7,8].

Пространственно плоской метрике Фридмана-Робертсона-Уокера (1.1) соответствует диагональное тетрадное поле [7,8]

$$e^A_{\ \mu} = \mathrm{diag}(1, a, a, a). \tag{5.1}$$

Рассмотрим действие для моделей космологической инфляции на основе телепараллельной гравитации с неминимальной связью скалярного поля и кручения

$$S = \int d^4x\, e \left[-\frac{1}{2}F(\phi)T - \frac{1}{2}\omega(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right], \tag{5.2}$$

где $e = \det\left(e^A_{\ \mu}\right) = \sqrt{-g}$.

Уравнения фоновой динамики для тетрадного поля (5.1) записываются следующим образом [7,8]

$$E_1 \equiv 3H^2F - \frac{1}{2}\omega\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \tag{5.3}$$

$$E_2 \equiv 3H^2F + \frac{1}{2}\omega\dot{\phi}^2 - V(\phi) + 2H\dot{F} + 2F\dot{H} = 0, \tag{5.4}$$

$$E_3 \equiv \omega\ddot{\phi} + 3\omega H\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\omega' + 3H^2F' + V' = 0, \tag{5.5}$$

где кручение связано с параметром Хаббла как $T = 6H^2$.

Отметим, что соотношение (2.6) соблюдается в данном случае и, таким образом, только два из трех уравнений космологической динамики являются независимыми.

Частным случаем являются модели инфляции на основе телепараллельной гравитации, эквивалентной общей теории относительности (TEGR) для минимальной связи поля и кручения $F = 1$ и $\omega = 1$ [16,17].

В данном случае, уравнения космологической динамики сводятся к случаю гравитации Эйнштейна (2.3)–(2.5), и анализ космологических моделей полностью аналогичен рассмотренному ранее для случая ОТО.

В общем случае, уравнения космологической динамики (5.3)–(5.4) запишем в следующем виде

$$V(\phi) = 3H^2F + \frac{d}{dt}(FH), \tag{5.6}$$

$$\frac{1}{2}\omega(\phi)\dot{\phi}^2 = -\frac{d}{dt}(FH), \tag{5.7}$$

на основе решений которых рассматриваются модели космологической инфляции на основе телепараллельной гравитации с немининальной связью скалярного поля и кручения.

5.1. Соотношение между параметром Хаббла и функцией неминимальной связи

Для построения и анализа моделей космологической инфляции рассмотрим следующее соотношение между функцией неминимальной связи и параметром Хаббла

$$F(\phi(t)) = \left(\frac{H(t)}{\lambda}\right)^n, \tag{5.8}$$

где λ и n – некоторые постоянные.

После подстановки соотношения (5.8) в уравнения динамики (5.6)–(5.7) получим

$$V(\phi) = \frac{H^n}{\lambda^n}\left[3H^2 + (n+1)\dot{H}\right], \tag{5.9}$$

$$X(\phi,\dot{\phi}) \equiv \frac{1}{2}\omega(\phi)\dot{\phi}^2 = -\frac{H^n}{\lambda^n}(n+1)\dot{H}. \tag{5.10}$$

Рассматривая приведенный потенциал и кинетическую энергию скалярного поля

$$\tilde{V} = \frac{\lambda^n}{H^{n+2}}V = 3-(n+1)\epsilon, \tag{5.11}$$

$$\tilde{X} = \frac{\lambda^n}{H^{n+2}}X = (n+1)\epsilon, \tag{5.12}$$

можно утверждать, что условия медленного скатывания $X \ll V$ выполняются для $|n+1|\epsilon \ll 1$.

Также отметим, что для $n=0$ данные модели сводятся к случаю TEGR.

5.2. Параметры космологических возмущений

Эволюция космологических возмущений для моделей инфляции на основе телепараллельной гравитации рассматривалась раннее в работах [7,8]. На основе результатов, полученных в данных работах, запишем параметры космологических возмущений на пересечении радиуса Хаббла для космологических моделей на основе действия (5.1) следующим образом

$$\mathcal{P}_S = \frac{H^2}{8\pi^2 Q_S} = \frac{H^4}{8\pi^2\dot{G}}, \tag{5.13}$$

$$\mathcal{P}_T = \frac{H^2}{2\pi^2 Q_T} = \frac{2H^2}{\pi^2 F}, \tag{5.14}$$

$$n_S - 1 = -2\epsilon - \frac{\dot{Q}_S}{HQ_S} = -4\epsilon - \frac{\ddot{G}}{H\dot{G}} = -4\epsilon + 2\delta_{ST}, \tag{5.15}$$

$$r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_S} = 4\frac{Q_S}{Q_T} = 16\left(\epsilon - \frac{\dot{F}}{HF}\right) = -16\left(\frac{\dot{G}}{HG}\right) = 16\epsilon_{ST}, \tag{5.16}$$

где

$$G = -FH, \qquad Q_S = \frac{\omega X}{H^2} = -\frac{1}{H^2}\frac{d}{dt}(FH) = \frac{\dot{G}}{H^2}, \qquad Q_T = \frac{1}{4}F, \tag{5.17}$$

$$\epsilon_{ST} = -\frac{\dot{G}}{HG}, \qquad \delta_{ST} = -\frac{\ddot{G}}{2H\dot{G}}. \tag{5.18}$$

Таким образом, условия медленного скатывания для данных инфляционных моделей можно определить следующим образом

$$\epsilon \ll 1, \qquad \epsilon_{ST} \ll 1, \qquad \delta_{ST} \ll 1. \tag{5.19}$$

Для минимальной связи (TEGR) $F = 1$ выражения (5.13)–(5.16) приводятся к ранее рассмотренным (2.14)–(2.16) для случая гравитации Эйнштейна.

Для моделей космологической инфляции с соотношением (5.8) между параметром Хаббла и функцией неминимальной связи функция

$$G(t) = -\frac{H^{n+1}(t)}{\lambda^n}, \tag{5.20}$$

и параметры медленного скатывания записываются следующим образом

$$\epsilon_{ST} = -(n+1)\frac{\dot{H}}{H^2} = (n+1)\epsilon, \tag{5.21}$$

$$\delta_{ST} = -\frac{n}{2}\frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}} = \frac{n}{2}\epsilon + \delta. \tag{5.22}$$

Подставляя данные параметры медленного скатывания и функцию (5.20) в выражения (5.13)–(5.16), получим следующие выражения для параметров космологичсеких возмущений

$$\mathcal{P}_S = \frac{\lambda^n}{2(n+1)\epsilon}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \tag{5.23}$$

$$n_S - 1 = (n-4)\epsilon + 2\delta, \tag{5.24}$$

$$r = 16(n+1)\epsilon, \tag{5.25}$$

которые сводятся к выражениям (2.14)–(2.16) для моделей космологической инфляции на основе гравитации Эйнштейна и аналогичной ей по космологическим эффектам TEGR для $n = 0$.

6. Верифицируемая модель степенной инфляции

Теперь рассмотрим модель степенной инфляции с параметром Хаббла и масштабным фактором (3.1) для случая телепараллельной гравитации с неминимальной связью скалярного поля и кручения.

Для получения параметрически зависимого обобщения космологических решений для степенной инфляции рассмотрим следующую кинетическую функцию

$$\omega(\phi) = \frac{H^n}{\lambda^n}(n+1) = (n+1)F(\phi). \tag{6.1}$$

Таким образом, уравнения космологической динамики (5.9)–(5.9) приводятся к виду

$$V(\phi) = \frac{H^n}{\lambda^n}\left[3H^2 + (n+1)\dot{H}\right], \tag{6.2}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H}, \tag{6.3}$$

то есть неминимальная связь скалярного поля и кручения в данном случае оказывает влияние только на потенциал, а параметр Хаббла и эволюция скалярного поля аналогичны случаю TEGR и ОТО (минимальной связи).

Таким образом, для степенной инфляции на основе параметра Хаббла (3.1) получим следующие точные решения уравнений космологической динамики

$$\phi(t) = \pm\sqrt{2m}\ln t, \tag{6.4}$$

$$V(\phi) = \frac{m^{n+1}}{\lambda^n}(3m-n-1)\exp\left(\mp\frac{(n+2)}{2}\sqrt{\frac{2}{m}}\phi\right), \tag{6.5}$$

$$F(\phi) = \left(\frac{m}{\lambda}\right)^n \exp\left(\mp\frac{n}{2}\sqrt{\frac{2}{m}}\phi\right), \tag{6.6}$$

$$\omega(\phi) = (n+1)\left(\frac{m}{\lambda}\right)^n \exp\left(\mp\frac{n}{2}\sqrt{\frac{2}{m}}\phi\right), \tag{6.7}$$

которые соответсвуют случаю минимальной связи для $n = 0$.

Для параметров медленного скатывания

$$\epsilon = \delta = \frac{1}{m}, \tag{6.8}$$

соответствующих параметру Хаббла $H = m/t$ для степенной инфляции, из выражений (5.24)–(5.25) получим следующую зависимость тензорно-скалярного отношения от спектрального индекса скалярных возмущений

$$r = \frac{16(n+1)}{2-n}(1-n_S). \tag{6.9}$$

На основе данной зависимости получим, что модель степенной инфляции на основе телепараллельной гравитации с неминимальной связью скалярного поля и кручения соответствует наблюдательным ограничениям на значения параметров космологических возмущений (2.17)–(2.19) для значений параметра $-1 < n < -0.8$.

Таким образом, соответствие моделей космологической инфляции на основе телепараллельной гравитации наблюдательным ограничениям, в данном случае, основано на влиянии неминимальной связи скалярного поля и кручения на значения параметров космологических возмущений.

7. Заключение

В данной работе рассматривались методы построения и верификации моделей космологической инфляции на основе гравитации Эйнштейна и ее модификаций.

В случае гравитации Эйнштейна для верификации инфляцинных моделей по наблюдательным ограничениям рассмотрено применение линейного преобразования параметра Хаббла на примере степенной инфляции. Линейное преобразование параметра Хаббла определяет переход от степенной инфляции, которая не соответствует наблюдательным ограничениям на значения параметров космологических возмущений к модели экспоненциально-степенной инфляции, соответствующей данным ограничениям.

Для случая моделей космологической инфляции с неминимальной связью скалярного поля и кривизны рассматривалось применение априорно заданной квадратичной зависимости между параметром Хаббла и функцией, определяющей тип неминимальной связи. Такие космологические модели соответствуют наблюдательным ограничениям для любого вида потенциала скалярного поля и произвольной функции неминимальной связи.

Также были рассмотрены космологические модели на основе телепараллельной гравитации с неминимальной связью скалярного поля и кручения. В случае минимальной связи данные модели рассматриваются на основе телепараллельного эквивалента общей теории относительности и полностью соответствуют аналогичным моделям на основе гравитации Эйнштейна. Однако, учет неминимальной связи позволяет верифицировать модели, не соответствующие наблюдательным ограничениям, что было показано на примере степенной инфляции.

Таким образом, учет модификаций гравитации Эйнштейна оказывает существенное влияние на верификацию моделей космологической инфляции по наблюдательным данным, и изложенные методы могут быть использованы для построения и верификации космологических моделей, отличных от представленных в данной работе.

Список литературы/References

1. A. D. Linde, *Particle physics and inflationary cosmology,* Contemp. Concepts Phys., 1990, vol. 5, pp. 1-362.

2. D. Baumann, L. McAllister, *Inflation and String Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2015), https://doi.org/10.1017/CBO9781316105733

3. S. Chervon, I. Fomin, V. Yurov, A. Yurov, *Scalar Field Cosmology*, Series on the Foundations of Natural Science and Technology, Volume 13 (WSP, Singapur, 2019), https://doi.org/10.1142/11405

4. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Modified non-local-F(R) gravity as the key for the inflation and dark energy. *Phys. Lett. B*, 2008, vol. 659, p. 821.

5. T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, Modified Gravity and Cosmology, *Phys. Rept.*, 2012, vol. 513, p. 1.

6. H. Motohashi and A. A. Starobinsky, $f(R)$ constant-roll inflation, *Eur. Phys. J. C*, 2017, vol. 77, no.8, p. 538.

7. M. Gonzalez-Espinoza, G. Otalora, N. Videla and J. Saavedra, Slow-roll inflation in generalized scalar-torsion gravity, *JCAP*, 2019, vol. 08, p. 029

8. M. Gonzalez-Espinoza, G. Otalora, Generating primordial fluctuations from modified teleparallel gravity with local Lorentz-symmetry breaking. *Phys. Rev. B*, 2020, vol. 809, p. 135696.

9. I. Fomin, Gauss–Bonnet term corrections in scalar field cosmology, *Eur. Phys. J. C*, 2020, vol. 80, no.12, p. 1145.

10. I. V. Fomin, S. V. Chervon, A. N. Morozov and I. S. Golyak, Relic gravitational waves in verified inflationary models based on the generalized scalar–tensor gravity, *Eur. Phys. J. C*, 2022, vol. 82, no.7, p. 642.

11. N. Aghanim et. al., Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. & Astrophys.*, 2020, vol. 641, p.

12. M. Tristram et. al., Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck. *astro-ph.CO*, arXiv:2112.07961, 2022, vol. p 1-2.

13. J. Martin, C. Ringeval, V. Vennin, Encyclopædia Inflationaris. *Phys.Dark Univ.*, 2014, vol. 5-6, p. 75-95

14. I. V. Fomin and S. V. Chervon, Exact and Approximate Solutions in the Friedmann Cosmology, *Russ. Phys. J.*, 2017, vol. 60, no.3, p. 427.

15. Y. Fujii, K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2007). https://doi.org/10.1017/CBO9780511535093

16. B. Li, T. P. Sotiriou, J. D. Barrow, f(T)gravity and local Lorentz invariance. *Phys. Rev. D*, 2011, vol. 83, no. 6, p. 06435.

17. Yi-Fu Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis, E. Saridakis, f(T) teleparallel gravity and cosmology. *Rep. Prog. Phys.*, 2016, vol. 2, no. 1, p. 106901.

Авторы

Фомин Игорь Владимирович, д. ф.-м. н., профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., д. 5, г. Москва, 105005, Россия; профессор кафедры физики и технических дисциплин, Ульяновский государственный педагогический университет, пл. Ленина, д. 4/5, г. Ульяновск, 432071, Россия.
E-mail: ingvor@inbox.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Фомин И. В. Методы построения и верификации инфляционных моделей ранней вселенной. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2022. № 40. С. 50–63.

Authors

Fomin Igor Vladimirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Physics Department of Bauman Moscow State Technical University, 2-nd Baumanskaya street, 5, Moscow, 105005, Russia; Professor of Department of Physics and Technical Disciplines, Ulyanovsk State Pedagogical University, Lenin's square, Build. 4/5, Ulyanovsk, 432071, Russia.
E-mail: ingvor@inbox.ru

Please cite this article in English as:
Fomin I. V. Methods for constructing and verifying inflationary models of the early universe. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2022, no. 40, pp. 50–63.