УДК 530.12, 517.5

АЛГЕБРОДИНАМИКА: КВАТЕРНИОННЫЙ АНАЛИЗ, КОМПЛЕКСНАЯ СТРУНА И ЕДИНАЯ МИРОВАЯ ЛИНИЯ

Кассандров В. В.[a,1]

[a] Российский университет дружбы народов, Москва, 117198, Россия.

Представлена оригинальная версия некоммутативного анализа над матричными алгебрами, в частности над алгеброй бикватернионов ($\mathbb{B}$). Показано, что каждая $\mathbb{B}$-дифференцируемая функция порождает бессдвиговую изотропную конгруенцию (БИК) на векторном $\mathbb{B}$-пространстве $\mathbb{C}\mathbf{M}$ и на его подпространстве Минковского $\mathbf{M}$. Используя соответствие Керра-Пенроуза между БИК и твисторными функциями, получено общее решение уравнений $\mathbb{B}$-дифференцируемости (т.е. обобщение уравнений Коши-Римана в комплексном анализе) и показано, что источником каждой БИК, в общем случае, является комплексная струна в $\mathbb{C}\mathbf{M}$. Каждая сингулярная точка каустики БИК принадлежит комплексному световому конусу некоторой точки генерирующей струны. Описываются симметрии и ассоциированные с БИК калибровочные и спинорные поля, в том числе два вида полей электромагнитного типа. Приводятся примеры известных и новых решений полей и сингулярных локусов БИК. В заключение описана консервативная алгебраическая динамика ансамбля тождественных точечных частиц на “единой Мировой линии” и обсуждается связь этой конструкции с концепцией “одноэлектронной Вселенной” Уилера-Фейнмана.

Ключевые слова: бикватернионы, твисторы, теорема Керра-Пенроуза, “одноэлектронная Вселенная” Уилера-Фейнмана, консервативная алгебраическая динамика на “единой Мировой линии”.

THE ALGEBRODYNAMICS: QUATERNIONIC ANALYSIS, COMPLEX STRING AND THE UNIQUE WORLDLINE

Kassandrov V. V.[a,1]

[a] Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, 117198, Russia.

We present an original version of noncommutative analysis over matrix algebras, the algebra of biquaternions ($\mathbb{B}$) in particular. Any $\mathbb{B}$-differentiable function gives rise to a shear-free null congruence (SFNC) on the vector $\mathbb{B}$-space $\mathbb{C}\mathbf{M}$ and its Minkowski subspace $\mathbf{M}$. Making use of the Kerr-Penrose correspondence between SFNC and twistor functions, we obtain general solution to the equations of $\mathbb{B}$-differentiability (that is, generalization of the Cauchy-Riemann equations in complex analysis) and demonstrate that the source of any SFNC is, generically, a complex string in $\mathbb{C}\mathbf{M}$. Each singular point of the SFNC caustic belongs to the complex null cone of a corresponding point on the generating string. We describe symmetries and SFNC-associated gauge and spinor fields, the two kinds of electromagnetic-like fields among them. Examples of known and novel solutions for fields and singular loci of SFNC are presented. Finally, we describe the conservative algebraic dynamics of an ensemble of identical point particles on the “unique Worldline” and discuss the connections of the procedure with Wheeler-Feynman’s “one-electron Universe” conception.

Keywords: biquaternions, twistors, Kerr-Penrose theorem, “one-electron Universe” of Wheeler-Feynman, conservative algebraic dynamics on the “Unique Worldline”.

PACS: 02.40.-k, 03.50.-z, 02.10.De

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2022.4.31–48

[1]E-mail: vkassan@sci.pfu.edu.ru

Введение

Конгруенции светоподобных лучей, в том числе с нулевым сдвигом, играют важную роль в общей теории относительности и в твисторных аспектах геометрии плоского пространства-времени Минковского $\mathbf{M}$ (и ее расширения на искривленные пространства с метриками Керра-Шилда). Такие конгруенции тесно связаны также с условиями дифференцируемости бикватернионно-значных функций (обобщенными условиями Коши-Римана в комплексном анализе). Эти функции, с другой стороны, могут быть поставлены в соответствие с фундаментальными физическими полями (в контексте т.н. *алгебродинамического* подхода, см. ниже).

Общее решение уравнений, определяющих бессдвиговые изотропные (геодезические) конгруенции (БИК), представлено известной *теоремой Керра* и может быть описано в форме неявного алгебраического уравнения [1]

$$\Pi(\xi, iX\xi) = 0, \tag{I}$$

где $\Pi(\xi,\tau)$, $\tau = iX\xi$ – *произвольная однородная* (и почти всюду аналитическая) функция трех *проективных* компонент твистора $\{\xi,\tau\}$ на $\mathbf{M}$, т.е. пары 2-спиноров, связанных в каждой точке пространства-времени $X = X^+ = \{X^{AA'}\}$, $A = A' = 0,1$ т.н. *соотношением инцидентности* Пенроуза,

$$\tau = iX\xi \quad (\tau^A = iX^{AA'}\xi_{A'})). \tag{II}$$

(см., например, [1, глава 6]).

Для каждой из точек $X \in \mathbf{M}$, определяя из (I) отношение компонент спинора $\xi_{A'} = \xi_{A'}(X)$, можно получить изотропное 4-векторное поле $k_\mu = \xi_A \xi_{A'}$, $\mu = 0,1,2,3$, касательное к линиям конгруенции, которая автоматически оказывается бессдвиговой. В соответствие с теоремой Керра-Пенроуза, все (аналитические) БИК могут быть построены с помощью вышеописанной алгебраической процедуры.

Каустики - сингулярности БИК - определяются условием

$$\Pi'(\xi, X\xi) = 0, \tag{III}$$

т.е. отвечают точкам $\mathbf{M}$, в которых *полная производная* от Π по *отношению* спинорных компонент обращается в нуль. Определяя это отношение из (III) и подставляя результат в (I), приходим к *уравнению движения*

$$S(X) = \Pi(\xi(X), iX\xi(X)) = 0, \tag{IV}$$

которое фиксирует форму сингулярного локуса конгруенции (в фиксированный момент времени) вместе с его временной эволюцией. Легко проверить (см., например, [2, 3]), что каждая функция $S(X)$ удовлетворяет *уравнению комплексного эйконала* (УКЭ). Более того, само отношение спинорных компонент удовлетворяет не только УКЭ, но также и линейному волновому уравнению [4, 5].

В контексте т.н. *алгебродинамики* (см, например, [7–10] и ссылки в этих работах) такие сингулярности (изолированные и ограниченные в 3-пространстве) предлагается интерпретировать как *частицеподобные* образования. Известным примером этого в ОТО служит *сингулярное кольцо Керра*, представленное каустикой аксиально симметричной конгруенции Керра. Такая структура имеет квантовые числа, соответствующие элементарному фермиону (электрону Дирака) [11, 12].

Ньюмен с сотр. [13, 14] показали, что конгруенции типа керровской генерируются “виртуальным” точечным зарядом, “движущимся” вдоль комплексной мировой линии $Z_\mu = Z_\mu(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{C}$ в *комплексном расширении* $\mathbb{C}\mathbf{M}$ пространства-времени Минковского $\mathbf{M}$ и испускающем прямолинейные комплексные “светоподобные” лучи (т.е., изотропные комплексные прямые) [15, С. 382]. Ограничение такой комплексной конгруенции на вещественное $\mathbf{M}$ порождает там БИК, в частности саму конгруенцию Керра (в случае покоящегося в $\mathbb{C}\mathbf{M}$ виртуального заряда).

В секции 1 кратко представлен наш оригинальный подход к построению некоммутативного анализа, в первую очередь на алгебре бикватернионов ($\mathbb{B}$). Затем, в секции 2 описывается общее решение соответствующих условий $\mathbb{B}$-дифференцируемости и устанавливается его эквивалентность с твисторными структурами и с условием Керра-Пенроуза, определяющим произвольную БИК.

Вышеописанная конструкция Ньюмена не исчерпывает, однако, весь класс БИК. Далее, в секции 2, показано, что источником БИК общего типа служит *комплексная струна*. При этом каждая сингулярная точка БИК лежит на комплексном изотропном конусе некоторой точки на струне.

Секция 3 посвящена описанию симметрий калибровочных и спинорных полей, сопоставляемых решениям уравнений $\mathbb{B}$-дифференцируемости (или соответствующим им БИК). В частности, вводится два типа электромагнитных полей, на этих решениях удовлетворяющих вакуумным уравнениям Максвелла. В секции 4 представлены некоторые известные и новые примеры БИК и их сингулярностей.

В секции 5 кратко описаны результаты наших работ, в которых, в соответствии со старыми идеями Уилера-Фейнмана, построена консервативная алгебраическая динамика коллектива тождественных точечных частиц на “Единой Мировой линии”. Наконец, в секции 6 представлена релятивистская версия такой конструкции и сформулированы основные выводы работы. **Заключение** резюмирует основные принципы и результаты АД и определяет направления дальнейшего развития теории.

1. $\mathbb{B}$-дифференцируемость и алгебродинамика

Построение анализа на функциях кватернионного ($\mathbb{Q}$) переменного, по аналогии с комплексным ($\mathbb{C}$) анализом, имеет длинную историю и, например, по мнению М. Атья [16, С.184] или Р. Пенроуза [17, С. 186] либо еще не развито либо в принципе невозможно. Наиболее известная попытка построения $\mathbb{Q}$-аналога $\mathbb{C}$-анализа принадлежит Р. Фетеру [18], а в работах [19, 20] авторы пытались использовать соответствующие условия голоморфности в контексте киральных и калибровочных теорий поля. Такие попытки предпринимались, в частности, А. Девуром [21], А. Ю. Хренниковым [22] и другими.

Между тем, все эти подходы на самом деле во многих аспектах некорректны. Действительно, если потребовать, по аналогии с $\mathbb{C}$-случаем, чтобы $\mathbb{Q}$-функция $F(Z)$ зависела только от $\mathbb{Q}$-аргумента Z (но не от Z^* и т.п.), то возникает сильно переопределенная система ДУЧП, по существу несовместная [23].

С другой стороны, производная $\mathbb{Q}$-функции оказывается на самом деле неопределенной, поскольку ее значение зависит от направления инфинитезимального приращения $\mathbb{Q}$-аргумента, в отличие от соответствующего определяющего свойства $\mathbb{C}$-голоморфных функций. Что касается физических приложений, все известные подходы не приводят к каким-то принципиально новым предсказаниям или теориям.

Между тем, альтернативный подход к построению $\mathbb{Q}$-анализа был предложен в наших работах (см, например, [9, 10] и ссылки в этих работах). Этот подход основан на обобщении старой конструкции Г. Шефферса [24] для анализа функций на *коммутативных ассоциативных алгебрах* $\mathbb{A}$. В $\mathbb{C}$-случае такой подход редуцируется к канонической теории и, в частности, к условиям голоморфности Коши-Римана.

А именно, следуя Шефферсу, $\mathbb{A}$-дифференцируемая функция $F(Z)$, $Z \in \mathbb{A}$ должна удовлетворять условию

$$dF = G \cdot dZ, \tag{1.1}$$

где $G = G(Z) \in \mathbb{A}$ – некоторая $\mathbb{A}$-функция, которая в случае алгебры с делением $\mathbb{C}$ может рассматриваться как производная основной функции, $G = F'(Z)$. Расписывая (1.1) в компонентах,

получим
$$\partial_a F^d = C^d_{ab} G^b, \tag{1.2}$$
где $\{C^d_{ab}\},\ a,b,\dots = 1,2,\dots N = dim\mathbb{A}$ – структурные константы алгебры $\mathbb{A}$. При этом, если потребовать, как в случае $\mathbb{C}$-голоморфности, чтобы “производная” $G(Z)$ также была $\mathbb{A}$-дифференцируемой как следствие (1.2),
$$\partial_a G^d = C^d_{ab} H^b, \tag{1.3}$$
то коммутатор $\partial_{[ab]}F^d = 0$ обращается в нуль именно в силу условий коммутативности и ассоциативности для структурных констант. Тем самым, условия (1.2), (1.3) оказываются самосогласованными, и соответствующая функция $F(Z)$, будучи **A**-дифференцируемой, автоматически оказывается бесконечно дифференцируемой, т.е. $\mathbb{A}$-*аналитической*.

Понятно, что в $\mathbb{C}$-случае, после исключения компонент G из (1.2) результирующие соотношения между производными F в точности воспроизводят условия Коши-Римана.

Заметим, что конструкция Шефферса была успешно использована для построения анализа на “супералгебрах”, представляющих собой прямую сумму 4D коммутативной и грассмановой алгебр пространства-времени [25, 26].

Определение (1.1) может быть совершенно естественно обобщено на случай *некоммутативных* ассоциативных алгебр, в том числе кватернионов Гамильтона $\mathbb{Q}$. А именно, потребуем для дифференциала dF $\mathbb{Q}$-значной функции $F(Z) \in \mathbb{Q}$ [7, 27, 28],
$$dF = \Phi \cdot dZ \cdot \Psi, \tag{1.4}$$
где $\Phi = \Phi(Z),\ \Psi = \Psi(Z)$ теперь уже две вспомогательные Q-значные функции, которые могут быть названы “полупроизводными” (соответственно левой и правой). Заметим сразу, что они определены с точностью до некоторого элемента $\alpha(Z)$ из центра $\mathbb{Q}$ (т.е. произвольной вещественной функции $\mathbb{Q}$-переменного, например, нормы кватерниона Z).

Таким образом, будем рассматривать $\mathbb{Q}$-значную функцию как $\mathbb{Q}$-*дифференцируемую*, если ее дифференциал dF может быть представлен в бескомпонентной форме (1.4), т.е. только через операцию умножения в $\mathbb{Q}$. Очевидно, что в случае коммутативных ассоциативных алгебр определение (1.4) редуцируется к условию Шефферса (1.1), $dF \mapsto (\Phi \cdot \Psi) \cdot dZ \equiv G \cdot dZ$.

Как и в случае $\mathbb{C}$-голоморфных функций, всякое отображение в 4D евклидовом пространстве $\mathbf{E^4} \mapsto \mathbf{E^4}$, реализуемое $\mathbb{Q}$-дифференцируемой функцией $F(Z)$, оказывается *конформным*, поскольку из условия (1.4) имеем
$$N(dF) = N(\Phi)N(dZ)N(\Psi) = N(\Phi \cdot \Psi)N(dZ) \equiv \Lambda(Z)N(dZ), \tag{1.5}$$
где $N(Z) \in \mathbb{R}$ – положительно определенная норма кватерниона Z, так что $\Lambda(Z) \in \mathbb{R}$ – соответствующий конформный масштабный фактор отображения $Z \mapsto F(Z)$.

Однозначное соответствие между $\mathbb{Q}$-дифференцируемыми функциями и конформными отображениями выявляет еще одну аналогию между комплексным анализом и некоммутативным $\mathbb{Q}$-анализом, определяемым соотношением (1.4). Между тем, хорошо известно, что группа конформных отображений в $\mathbf{E^4}$ является конечной, 15-параметрической, в отличие от бесконечномерной конформной группы на комплексной плоскости. Обратно, нетрудно показать [7], что каждое из конформных отображений в $\mathbf{E^4}$ может быть реализовано какой-либо $\mathbb{Q}$-дифференцируемой функции $F(Z)$, удовлетворяющей (1.4). В частности, *инверсия* относительно сферы $S^3 \in \mathbf{E^4}$ может быть алгебраически представлена функцией $F(Z) = Z^{-1}$, дифференциал которой
$$dF = dZ^{-1} = -Z^{-1}dZZ^{-1}, \tag{1.6}$$
имеет форму, соответствующую (1.4).

С другой стороны, класс $\mathbb{Q}$-дифференцируемых функций (1.4) оказывается тем самым слишком узким для построения нетривиальной теории поля. Замечательным образом, однако, ситуация радикально меняется при переходе к комплексному обобщению алгебры $\mathbb{Q}$, т.е. к алгебре *бикватернионов* $\mathbb{B}$.

Действительно, в случае $\mathbb{B}$-алгебры можно рассматривать такие полупроизводные Ψ (или Φ) в соотношении (1.4), для которых (комплекснозначная) норма равна нулю, например, $N(\Psi) = 0$, так что элемент Ψ, с алгебраической точки зрения, есть *делитель нуля.* Очевидно, что в таком случае соответствующее отображение $Z \mapsto F(Z)$ в пространстве $\mathbf{C^4}$, векторном пространстве алгебры $\mathbb{B}$, уже не будет конформным. Следовательно, можно ожидать, что класс $\mathbb{B}$-дифференцируемых функций будет достаточно широким, и *соответствующие функции $F(Z)$, $Z \in \mathbb{B}$, удовлетворяющие основному соотношению (1.4), могут рассматриваться в качестве фундаментальных физических полей* [10, 29, 30].

Бикватернионы ($\mathbb{B}$) не представляют собой исключительную алгебру, именно из-за существования элементов – делителей нуля. На самом деле, алгебра $\mathbb{B}$ изоморфна полной 2×2 матричной алгебре над полем $\mathbb{C}$, $\mathbb{B} \sim Mat(2, \mathbb{C})$. Более того, ее группа автоморфизмов $SO(3, \mathbb{C})$ изоморфна $SO(3, \mathbb{C}) \sim SL(2, \mathbb{C})$, 6-параметрической спинорной группе Лоренца $SL(2, \mathbb{C})$. Поэтому алгебра $\mathbb{B}$ может рассматриваться как наиболее естественный кандидат на роль *алгебры пространства-времени*!

С другой стороны, векторное пространство $\mathbb{B}$ вещественно 8-мерно, так что имеются хорошо известные проблемы с интерпретацией 4-х дополнительных координат. Более того, пространство Минковского $\mathbf{M}$ даже не является подалгеброй $\mathbb{B}$. Тем не менее, в первой и наиболее развитой версии *алгебродинамики* предполагалось, что координатное пространство в (1.4) ограничено до подпространства *эрмитовых* матриц, $Z \mapsto X = X^+$, т.е. до пространства Минковского $\mathbf{M}$. С другой стороны, основные функции-поля $F(X), \Phi(X), \Psi(X)$ по-прежнему рассматриваются как комплекснозначные, как это часто принято для фундаментальных полей в физике.

Помимо этого, в основной версии ограничиваются наиболее простым и интересным случаем, когда одна из полупроизводных, например, $\Psi = \Psi(X)$ совпадает с основной функцией $F(X)$. Таким образом, алгебродинамика как физическая теория поля строится на основе следующей редуцированной формы условий $\mathbb{B}$-дифференцируемости (1.4):

$$dF = \Phi \cdot dX \cdot F, \tag{1.7}$$

где $X = X^+ = x^0\mathbf{1} + x^a\sigma_a$, $\{x^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ – координаты в $\mathbf{M}$, а $\mathbf{1}$ and $\{\sigma_a\}$, $a = 1, 2, 3$ – соответственно 2×2 единичная матрица и три матрицы Паули.

Поскольку в 2×2 матричном представлении $\mathbb{B}$ оба столбца $F(X)$ полностью независимы, каждое решение (1.7) может быть построено из решений следующей окончательной формы:

$$d\xi = \Phi dX\xi, \tag{1.8}$$

где $\xi = \xi(X)$ представляет собой один из столбцов матрицы $F(X)$. В дальнейшем эту редуцированную систему (1.8) будем называть *генерирующей системой уравнений* (ГСУ).

Заметим, что ГСУ (1.8) является лоренц-инвариантной. Это следует из того, что при преобразованиях координат из собственной группы Лоренца

$$X \mapsto S^+XS, \quad S \in SL(2, \mathbb{C}), \tag{1.9}$$

когда столбец $\xi(X)$ ведет себя как 2-спинор,

$$\xi \mapsto S^{-1}\xi \tag{1.10}$$

а матрица Φ преобразуется как (комплексный) 4-вектор,

$$\Phi \mapsto S^{-1}\Phi(S^+)^{-1}. \tag{1.11}$$

система ГСУ сохраняет свою форму.

Редуцированные условия $\mathbb{B}$-дифференцируемости (1.7) или, эквивалентно, (1.8) исчерпывают набор исходных уравнений *единой алгебраической теории поля*, т.н. “алгебродинамики” [7–10]. Эта теория не только является лоренц-инвариантной, но и обладает естественной калибровочной и спинорной (твисторной) структурами (см. ниже). Это позволяет определить набор фундаментальных релятивистских полей, известные свободные уравнения которых тождественно выполняются на решениях ГСУ (1.8). Заметим еще, что ГСУ является переопределенной, так что из нее возможно определение сразу обоих первичных полей, спинорного $\xi(X)$ и векторного $\Phi(X)$ (см. ниже, секция 4).

В силу переопределенности очевидно, что исходная ГСУ (1.8) является нелагранжевой. Тем не менее, полный набор законов сохранения может выполняться на ее решениях, так что соответствующая алгебраическая динамика может на самом деле быть *консервативной* (секции 5, 6). При этом частицы рассматриваются как (изолированные) сингулярности первичных полей $\xi(X), \Phi(X)$ или вторичных калибровочных полей, которые могут быть определены через первые. Вышеупомянутые и другие замечательные свойства основной системы уравнений (1.8) и ее решений будут подробнее рассмотрены ниже.

2. Твисторная структура и общее решение уравнений бикватернионной дифференцируемости

Как мы видели, в простейшем и наиболее важном случае уравнения $\mathbb{B}$-дифференцируемости редуцируются к следующей (ГСУ) форме (1.8):

$$d\xi = \Phi dX \xi. \tag{2.1}$$

Переписывая эту систему, с использованием правила Лейбница, имеем

$$d\xi = \Phi d(X\xi) - \Phi X d\xi, \rightarrow (I + \Phi X) d\xi = \Phi d\tau, \tag{2.2}$$

где 2-спинор

$$\tau = X\xi \tag{2.3}$$

совместно с исходным 2-спинором ξ образует *твистор* на пространстве Минковского $\mathbf{M}$ [1].

Соотношение (2.2) указывает, что 4 твисторные компоненты, т.е. два 2-спинора $\{\xi, \tau\}$ *функционально зависимы.* А именно, для каждого решения (2.1) существует пара независимых функций $\{\Pi^C\},\ C = 1, 2$ четырех комплексных аргументов, таких что

$$\Pi^C(\xi, \tau) = 0. \tag{2.4}$$

На самом деле, два алгебраических уравнения (2.4) представляют *общее решение* редуцированной формы (ГСУ) уравнений $\mathbb{B}$-дифференцируемости. Действительно, в каждой точке $X \in \mathbf{M}$ два уравнения (2.4), т.е.

$$\Pi^C(\xi, X\xi) = 0, \tag{2.5}$$

могут быть разрешены относительно двух неизвестных $\{\xi^A\},\ A = 0, 1$. Воспроизводя эту процедуру в каждой точке X и выделяя непрерывную ветвь корней (2.5), получаем 2-спинорное поле $\xi(X)$. При этом существует целый набор непрерывных ветвей такого *многозначного* поля.

Подставляя одну из таких ветвей решения в (2.5), получаем тождество, которое может быть продифференцировано по каждой из координат X. Ниже, однако, мы вернемся к рассмотрению комплексификации $X \rightarrow Z = \{Z^A_B\}$, отвечающей полному векторному пространству $\mathbb{C}\mathbf{M}$ алгебры $\mathbb{B}$. Тогда тождество (2.5) должно быть переписано в форме

$$\Pi^C(\xi^A, Z^A_B \xi^B) = 0, \tag{2.6}$$

[1] Мы опускаем обычно принятый фактор i в соотношении инцидентности (2.3), ср. с (II)

из которой после дифференцирования по комплексной координате Z_D^B будем иметь

$$0 = \frac{d\Pi^C}{dZ_D^B} = P_A^C(\partial_B^D \xi^A) + \frac{\partial \Pi^C}{\partial \tau^B}\xi^D, \tag{2.7}$$

где

$$P_A^C = \frac{d\Pi^C}{d\xi^A} = \frac{\partial \Pi^C}{\partial \xi^A} + \frac{\partial \Pi^C}{\partial \tau^E} Z_A^E, \tag{2.8}$$

и использованы очевидные обозначения: $\partial_B^D = \partial/\partial Z_D^B$.

В точках, где существует матрица Q_C^E, обратная к P_A^C,

$$Q_C^E P_A^C = \delta_A^E,$$

из (2.7) следует

$$\partial_B^D \xi^E = -\frac{d\Pi^C}{d\tau^B} Q_C^E \xi^D, \tag{2.9}$$

так что после умножения (2.9) на ξ_D, получаем следующее простое соотношение:

$$\xi_D \partial_B^D \xi_E = 0. \tag{2.10}$$

Последнее, после умножения на ξ^E, представляет (комплексифицированные на $\mathbb{C}\mathbf{M}$) хорошо известные уравнения, определяющие бессдвиговую изотропную конгруенцию (БИК) лучей [1, глава 7],

$$\xi^E \xi_D \partial_B^D \xi_E = 0. \tag{2.11}$$

Эти последние уравнения являются *проективно инвариантными*, так что только *отношение* двух спинорных компонент ξ^A может быть определено из них. Напротив, исходные уравнения (2.10) более жесткие и определяют *обе компоненты* спинорного поля!

Основные уравнения (2.10) следуют также (после умножения на ξ_D) из исходной ГСУ (2.1), которая в индексных обозначениях имеет вид

$$\partial_B^D \xi_E = \Phi_B^E \xi^D. \tag{2.12}$$

Для дальнейшего важно, что из этой формы следуют "соотношения ортогональности" между производными двух любых твисторных компонент,

$$\partial_D^A \xi_B \partial_A^D \xi_C = \partial_D^A \xi_B \partial_A^D \tau_C = \partial_D^A \tau_B \partial_A^D \tau_C = 0. \tag{2.13}$$

С другой стороны, на решениях (2.1) любые две твисторные компоненты всегда функционально независимы, тогда как третья компонента зависит от них в силу (проективно инвариантной) структуры общего решения (2.5), см., например, [32].

Резюмируя: *каждая $\mathbb{B}$-дифференцируемая функция (из основного ГСУ класса (2.1)) определяет некоторую БИК на пространстве Минковского* $\mathbf{M}$ *и на его комплексификации* $\mathbb{C}\mathbf{M}$.

Рассмотрим теперь точки, в которых определитель

$$\det ||P_A^C|| \equiv \det ||\frac{d\Pi^C}{d\xi^A}|| = 0 \tag{2.14}$$

обращается в нуль. Такие точки соответствуют *слиянию* некоторой пары ветвей многозначного поля $\xi(Z)$ или, эквивалентно, *кратным* корням генерирующей алгебраической системы (2.6). В этих сингулярных точках производные $\partial_B^D \xi^A$, в силу (2.8), обращаются в бесконечность. Мы увидим ниже, что калибровочные поля, ассоциируемые с решениями (2.10) или (2.11), также сингулярны в этих точках.

Далее рассмотрим само твисторное пространство $\{\xi, \tau\}$ и предположим, что непрерывная ветвь функции $\tau = \tau(\xi)$ может быть определена в соответствующей области из двух уравнений

(2.4). В этих точках матрица производных $\partial\Pi^C/\partial\tau^B$ несингулярна и, преобразуя определитель в (2.14), с учетом определения (2.8), получим условие сингулярного локуса в следующей форме:

$$\det ||\widehat{Z}_A^B - Z_A^B|| = 0, \tag{2.15}$$

где

$$\widehat{Z}_B^A = -\frac{\partial\Pi^C}{\partial\xi^A} R_C^B \tag{2.16}$$

а R_C^B – обратная матрица, $(\partial\Pi^C/\partial\tau^E) R_C^B = \delta_E^B$.

В общем случае, точки сингулярного локуса на $\mathbb{C}\mathbf{M}$ определяются одним комплексным уравнением (2.15) и, следовательно, образуют *комплексную гиперповерхность*. Однако на подпространстве Минковского $\mathbf{M}$ имеем уже две связи между четырьмя действительными координатами пространства-времени $X = \{x_\mu\}$, определяемые вещественной и мнимой частями (2.15). Поэтому *сингулярный локус БИК на* $\mathbf{M}$*, в общем случае, представляет собой струну*, "мировая поверхность" которой может быть параметризована двумя вещественными параметрами, например,

$$X = X(\rho, \sigma) \tag{2.17}$$

Из (2.15) следует также, что любая точка сингулярности $X \in \mathbf{M}$ принадлежит комплексному нулевому конусу некоторой точки на *генерирующей комплексной струне* $\widehat{Z}(\rho, \sigma)$. Эта последняя, очевидно, также может быть параметризована двумя вещественными параметрами (ρ, σ) и "движется" по пространству $\mathbb{C}\mathbf{M}$ в "вещественном времени" ρ.

3. Калибровочные симметрии и поля, ассоциируемые с решениями уравнений $\mathbb{B}$-дифференцируемости

Физические поля, определяемые условиями $\mathbb{B}$-дифференцируемости и, соответственно, БИК, были подробно описаны в ряде работ, например, в [31]. Ниже мы кратко представим этот аспект АД и дополним его описанием второго типа поля электромагнитного типа, которое может быть ассоциировано с каждой БИК.

Рассмотрим снова редуцированную форму ГСУ условий $\mathbb{B}$-дифференцируемости (2.1). Эта система переопределена и должна удовлетворять определенным *условиям совместности*, см. подробнее [31, 32]:

$$dd\xi \equiv 0 = R\xi, \quad R = (d\Phi - \Phi \cdot dX \cdot \Phi) \wedge dX, \tag{3.1}$$

где $\wedge$ обозначает внешнее произведение 1-форм.

Из (3.1), однако, вовсе не следует, что эффективная -2×2 матричная 2-форма кривизны R равна нулю (т.к. ξ не является произвольным). Вместо этого, эта форма оказывается [28, 33, 34]) *(анти)самодуальной*. В частности, если отождествить компоненты матрицы $\Phi(X) = A^\mu\sigma_\mu$, $\sigma_\mu = \{\mathbf{1}, \sigma_\mathbf{a}\}$ с 4-потенциалами $A^\mu(X)$ некоторого (комплексного) электромагнитного поля, то соответствующий им тензор напряженности

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.2}$$

удовлетворяет условиям анти-самодуальности:

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\rho\lambda}. \tag{3.3}$$

Обычным образом, из этих условий следует выполнение (комплексифицированных) свободных уравнений Максвелла. Более того, можно доказать [5, 6], что любая изолированная и ограниченная сингулярность соответствующего поля Максвелла либо электронейтральна, либо имеет эффективный электрический заряд [2], *целократный* некоторому минимальному, "элементарному" заряду, ассоциированному с кольцевой сингулярностью аксиально симметричной конгруенции Керра

[2]Этот заряд определяется как поток электрического поля через замкнутую поверхность, окружающую сингулярность

(см. ниже, секция 4). Таким образом, электрический заряд, определяемый для решений "мастер-уравнений" (2.1), с необходимостью оказывается "авто-квантованным" [5, 6].

Возможность электромагнитной интерпретации компонент поля $\Phi(X)$ связана также с калибровочной симметрией уравнений ГСУ (2.1) и ее общего решения (2.4). А именно, эти соотношения, вместе с соотношением инцидентности (2.3), форм-инвариантны при следующих преобразованиях входящего в них твисторного поля:

$$\xi \mapsto \alpha(\xi, \tau)\xi, \quad \tau \mapsto \alpha(\xi, \tau)\tau, \tag{3.4}$$

где функция $\alpha \in \mathbb{C}$ должна зависеть от координат X *только неявно*, через компоненты исходного преобразуемого твисторного поля $\xi(X), \tau(X)$. Нетрудно показать, что параллельно с (3.4), компоненты потенциалов $\Phi(X)$ должны преобразовываться градиентным образом,

$$\Phi_{AA'} \mapsto \Phi_{AA'} - \partial_{AA'}\alpha, \tag{3.5}$$

для того, чтобы ГСУ были форм-инвариантны. Симметрия, представленная совместными преобразованиями (3.4) и (3.5), получила название "слабой" или ограниченной калибровочной инвариантности. Такие преобразования образуют *собственную подгруппу* полной калибровочной группы $\mathbb{C}$ [31, 32].

На самом деле, электромагнитное поле определяется *следом* матричной формы кривизны R, в то время как ее *бесследовая* часть может рассматриваться как *комплексное* $SL(2, \mathbb{C})$ *поле Янга-Миллса*. Как следствие условий (3.3), соответствующая кривизна удовлетворяет вакуумным уравнениям Янга-Миллса [32]. Наконец, из четырех компонент матричного поля $\Phi(X)$ можно образовать две пары , каждая из которой *удовлетворяет 2-спинорному уравнению Вейля [31]*.

Что же касается основного спинорного поля $\xi(X)$, мы видели, что обе его компоненты удовлетворяют *уравнению комплексного эйконала*. В дополнение, *отношение* двух этих компонент (которое и определяет структуру соответствующей БИК) на каждом решении (2.1) удовлетворяет также и *линейному волновому уравнению* [4, 5].

Мы покажем теперь, что существует еще одна структура, которая может трактоваться в качестве второго вида поля электромагнитного типа, при этом уже вещественного. Рассмотрим две любые функционально независимые компоненты $\alpha(X), \beta(X)$ основного твистора $\{\xi, \tau\}$. Помимо уравнения комплексного эйконала

$$\partial_\mu\alpha\partial^\mu\alpha = 0, \quad \partial_\mu\beta\partial^\mu\beta = 0, \tag{3.6}$$

как следствие условий ортогональности (2.13), компоненты удовлетворяют дополнительному соотношению

$$\partial_\mu\alpha\partial^\mu\beta = 0. \tag{3.7}$$

Определим теперь антисимметричный тензор напряженности $C_{\mu\nu}$ как

$$C_{\mu\nu} = \partial_\mu a\partial_\nu b - \partial_\mu b\partial_\nu a, \tag{3.8}$$

так что дуальный ему тензор $\tilde{C}_{\mu\nu}$ имеет форму

$$\tilde{C}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\partial^\rho a\partial^\lambda b \tag{3.9}$$

и, таким образом, тождественно удовлетворяет первой паре уравнений Максвелла

$$\partial^\nu\tilde{C}_{\mu\nu} \equiv 0, \tag{3.10}$$

независимо от (не)существования генерирующих 4-потенциалов. С другой стороны, много лет назад было показано [35, С.22], что как следствие (3.6) и (3.7), компоненты α, β удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\partial(a,b)}{\partial(t,x)} = i\frac{\partial(a,b)}{\partial(y,z)}, \ \frac{\partial(a,b)}{\partial(t,y)} = i\frac{\partial(a,b)}{\partial(z,x)}, \ \frac{\partial(a,b)}{\partial(t,z)} = i\frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)}, \tag{3.11}$$

где, например, $\partial(a,b)/\partial(t,x) = (\partial_t a \partial_x b - \partial_t b \partial_x a)$ и т.д. Выписав теперь компоненты (3.8) и (3.9), приходим к выводу, что тензор $C_{\mu\nu}$ вследствие (3.11) самодуален,

$$C_{\mu\nu} = i\tilde{C}_{\mu\nu}, \tag{3.12}$$

так что выполняется и вторая пара вакуумных уравнений Максвелла. Легко видеть также, что $C_{\mu\nu}C^{\mu\nu} = C_{\mu\nu}\tilde{C}^{\mu\nu} = \tilde{C}_{\mu\nu}\tilde{C}^{\mu\nu} = 0$, поэтому введенное выше максвеллоподобное поле является изотропным. Обе твисторные компоненты α, β функционально независимы и непостоянны, поэтому это поле всегда нетривиально и сосуществует с ранее определенным полем (3.2), будучи при этом отличным от первого (см., например, пример в секции 4).

Резюмируя, отметим, что существует много фундаментальных релятивистских *безмассовых* полей, которые могут быть определены через величины, присутствующие в структуре редуцированной (ГСУ) формы условий $\mathbb{B}$-дифференцируемости или, эквивалентно, через структуру БИК. При этом на решениях (2.1) автоматически выполняются соответствующие вакуумные уравнения полей. Однако, только те из этих полей имеют прямой физический смысл, которые определяют поведение частицеподобных образований, т.е. изолированных сингулярностей-каустик. Эта важная проблема нуждается в дальнейшем изучении.

4. Решения генерирующей системы уравнений, ассоциированные поля и сингулярности

Кратко представим теперь уже известные и новые простейшие решения ГСУ (2.1) и фундаментальные поля, которые могут быть определены через них,

Все такие решения могут быть получены чисто алгебраически, за счет выбора соответствующих генерирующих функций в (2.4). Поскольку все ассоциированные поля на самом деле зависят лишь от отношения $G = G(X)$ двух спинорных компонент, можно редуцировать общее решение (2.5) к единственному алгебраическому уравнению вида

$$\Pi(G, \tau^1, \tau^2) = 0, \quad \tau_1 = wG + u, \quad \tau_2 = vG + \bar{w}, \tag{4.1}$$

где τ_1, τ_2 – две проективные твисторные компоненты, а $u, v = t \pm z$, $\bar{w}, w = x \pm iy$ – спинорные координаты на $\mathbf{M}$. В частности, единственное статическое сферически симметричное (в отношении соответствующей БИК и ассоциированных полей) решение следует из генерирующей функции:

$$\Pi = G\tau_1 - \tau_2 = wG^2 + 2zG - \bar{w}. \tag{4.2}$$

Разрешая соответствующее уравнение $\Pi = 0$ относительно G, получаем двузначное распределение

$$G = \frac{\bar{w}}{z \pm r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{4.3}$$

геометрически отвечающее *стереографической проекции* $S^2 \mapsto \mathbb{C}$.

Используя теперь (3.2) и вычисляя эффективные потенциалы и напряженности ассоциируемого электромагнитного поля, получим распределение *кулоновского типа* [7, 28] с соответствующим электрическим $\mathbf{E}$ и комплексно-дуальным магнитным $\mathbf{H}$ полями:

$$E_r = \pm\frac{q}{r}, \quad H_r = \pm\frac{iq}{r}, \quad q = 1/4, \tag{4.4}$$

причем все прочие компоненты равны нулю. Соответствующий электрический заряд фиксирован, равен по модулю (мнимому) магнитному заряду и (после перехода к размерным единицам) может быть отождествлен с *элементарным зарядом.*

Ассоциированное решение уравнений Вейля, которые для двух составляющих ψ_1, ψ_2 2-спинора в виде

$$\partial_{\bar{w}}\psi_1 = \partial_u\psi_2, \quad \partial_v\psi_1 = \partial_w\psi_2, \tag{4.5}$$

может быть представлено следующим анзатцем [5]:

$$\psi_1 = -\frac{\bar{w}}{r(z+r)}, \quad \psi_2 = \frac{1}{r}, \tag{4.6}$$

в котором 2-спинорные компоненты образованы из соответствующих компонент матрицы 4-потенциалов $\Phi(X)$.

Вычислим теперь напряженности "второго" электромагнитного поля (3.8). Для этого выберем две следующие функционально независимые компоненты проективного твистора, входящие в (4.2):

$$\alpha = G = \frac{\bar{w}}{z+r}, \ \beta = \tau_1 = t + r \tag{4.7}$$

и получим тогда следующее выражение для напряженностей $\mathbf{C} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ в сферических координатах:

$$\mathbf{C}_\theta = \frac{1}{r\cos^2\theta/2} e^{i\varphi}, \quad \mathbf{C}_\varphi = i\mathbf{C}_\theta, \quad \mathbf{C}_r = 0. \tag{4.8}$$

Видно, что такое вакуумное электромагнитное поле статично, несмотря на то, что оба инварианта $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ and $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$ тождественно равны нулю. Сингулярный локус представлен центральной точкой $r = 0$ и полуосью $-\infty < z < 0$. Для каждого r, поле касательно к соответствующей 2-сфере и "закручено", так что картина векторных линий поля идентична соответствующей картине отображения типа "4-винта" (см., например, [36, С.46]).

Некоторое число более сложных решений уравнений $\mathbb{B}$-дифференцируемости (2.1), соответствующим им БИК и локусам сингулярностей-каустик рассмотрены, в частности, в работах [5,37].

Хорошо известно также, что каждая БИК порождает эффективную риманову метрику типа Керра-Шилда

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + H(X)k_\mu k_\nu, \tag{4.9}$$

где $H(X)$ – некоторое скалярное поле ("гравитационный потенциал"). Для широкого класса БИК удается выбрать это поле так, чтобы метрика $g_{\mu\nu}$ являлась решением вакуумных уравнений Эйнштейна (или, совместно с подходящим электромагнитным полем, – электровакуумных уравнений Максвелла-Эйнштейна). При этом метрика, соответствующая фундаментальному решению (4.3), естественно оказывается метрикой Шварцшильда. При комплексном сдвиге $z \mapsto z + ia, \quad a \in \mathbb{R}$, конгруенция превращается в конгруенцию Керра, с кольцевой сингулярностью радиуса a. Ассоциированное электромагнитное поле и метрика определяют тогда известное электровакуумное решение Керра-Ньюмена.

5. Консервативная алгебраическая динамика на "единой Мировой линии"

Ниже мы кратко изложим содержание статей [38–41], посвященных *алгебраической реализации* старых идей Дж.А. Уилера и Р. Фейнмана [42, 43] по оригинальному единому описанию межчастичных взаимодействий. Они [3] предположили, что все первичные частицы во Вселенной на самом деле представляют собой *одну и ту же* точечную частицу, локализованную в различных точках *единой Мировой линии* (ЕМЛ). Такая конструкция получила неформальное название "одноэлектронной Вселенной".

Концепция ЕМЛ предоставляет массу привлекательных возможностей, связанных, в частности, с естественным объяснением *тождественности частиц* и т.п., а также с возможностью фиксации истинной формы их взаимодействий и взаимопревращений. Однако ряд фундаментальных трудностей, в том числе с выполнением законов сохранения, не позволили до сих пор концепции ЕМЛ получить общее признание и развитие.

Между тем, в работе [38] была развита нерелятивистская версия концепции Уилера-Фейнмана. Мы предположили, что ЕМЛ может быть задана *неявно*, а именно системой трех алгебраических уравнений

$$F_a(t, x, y, z) = 0, \tag{5.1}$$

[3] Аналогичные идеи ранее предлагались Е.С.Ж. Штюкельбергером [44, 45]

где $\{F_a\}$, $a = 1, 2, 3$ – три независимые функции трех декартовых координат $x_a = \{x, y, z\}$ и параметра времени t. По ряду причин [38,39] мы ограничились *полиномиальной формой* функций $\{F_a\}$.

В каждый момент времени t, корни алгебраической системы уравнений (5.1) задают пространственное расположение набора тождественных точечных частицеподобных образований, которые с течением времени t согласованно "движутся" по ЕМЛ. Таким образом, мы имеем любопытную форму коллективной алгебраической (и, соответственно, нелагранжевой) динамики, в простейшей форме реализующей идеи Уилера-Фейнмана.

Такая конструкция имеет много интересных свойств. Во первых, на самом деле в ней имеется два типа тождественных частиц, отвечающих вещественным (R) или комплексно сопряженным (C) корням полиномиальной системы уравнений (5.1).

Во-вторых, в определенные дискретные моменты времени $t = \{t_k\}$, $k = 1, 2, ...$ некоторые два вещественных корня (5.1) становятся кратными (сливаются) и преобразуются затем в пару комплексно сопряженных корней. Это преобразование может естественно представлять *процесс аннигиляции* двух R-частиц[4] с образованием пары C-частиц. Разумеется, обратный процесс *образования пары* также имеет место в другие моменты времени.

На самом деле, *траектория* движения, определяемая из (5.1) после исключения параметра времени, в общем случае состоит из *множества изолированных кривых* в 3D пространстве, либо соединяющих их кривых уже в комплексифицированном пространстве. Таким образом, как правило, две R-частицы могут аннигилировать, возникающие C-частицы перемещаются в C-пространстве и, через некоторое время, порождают новую пару R-частиц уже на другой ветви ЕМЛ [38].

Однако наиболее удивительным свойством коллективной алгебраической динамики является ее *консервативность*. А именно, для любой невырожденной полиномиально параметризованной ЕМЛ выполняются *законы сохранения полного импульса, момента импульса и (аналога) полной энергии. Замечательным образом, это свойство является прямым следствием формул Виета, связывающих корни полиномиальной системы (5.1)* (более подробно, см. [38,39]).

6. Релятивистская алгебраическая динамика на единой Мировой линии

Выше представленная схема единой алгебраической динамики может считаться нерелятивистской. При этом, вместо параметра времени, монотонно возрастающего вдоль ЕМЛ, вводятся гиперповерхности "второго времени", в каждый момент пересекающие ЕМЛ и фиксирующие тем самым мгновенные положения набора тождественных точечных "частиц". По сути, такое "внешнее время" вполне подобно абсолютному ньютоновскому.

С другой стороны, нетрудно перейти к релятивистскому обобщению концепции ЕМЛ [40,41], основанному на структуре *локального светового конуса* частиц и, в простейшей реализации, не требующего даже неявного задания ЕМЛ. Замечательным образом, такое релятивистское обобщение непосредственно следует из структуры АД и ГСУ в частности.

Рассмотрим (достаточно сложную) мировую линию частицы, параметризованную привычным образом, как $x = x^\mu(\sigma)$, с монотонно возрастающим времениподобным параметром σ. Хорошо известно [15], что конгруенция прямолинейных светоподобных лучей, испускаемых частицей, всегда является бессдвиговой.

Действительно, пусть матрица $X = X^+ = \{X^\mu\}$ представляет координаты точки наблюдения. Тогда выражение для изотропного интервала, т.е. *уравнение светового конуса* (УСК) частицы

$$\det \|X - x(\sigma)\| = 0, \tag{6.1}$$

допускает определение проективного твистора $\{\xi,\ \Pi = X\xi\}$,

$$\Pi - \pi(\sigma) = (X - x(\sigma))\xi = 0. \tag{6.2}$$

[4] Одна из которых движется "обратно во времени" и может, по аналогии с КЭД, рассматриваться в качестве античастицы

Из этой системы двух линейных (по отношению к ξ) уравнений сразу следует, что три компоненты проективного твистора $G = \xi^2/\xi^1, \Pi^1, \Pi^2$ являются функционально зависимыми. Следовательно, рассматриваемая конгруенция является бессдвиговой, и соответствующее спинорно-твисторное поле является решением редуцированной версии ГСУ (2.1).

Рассмотрим теперь точечного (идеализированного) наблюдателя O, движущегося по собственной мировой линии $X = X(\tau)$. Тогда точки на ЕМЛ, которые одномоментно детектируются O, определяются УСК (6.1).

А именно, для любого τ в общем случае имеется множество (вещественных R или комплексно сопряженных C) корней $\{\sigma_k\}$, определяющее набор точечных (R- or C-) частиц на ЕМЛ или ее комплексном расширении. Такие тождественные "предчастицы" получили название *дупликонов* [46].

Для наблюдателя неважно, является ли при этом ЕМЛ вещественной или комплексной: в любом случае, O *одновременно* получает много светоподобных сигналов от различных точек на той же самой ЕМЛ. С другой стороны, в некоторые дискретные моменты времени какая-то пара дупликонов сливается, поскольку два соответствующих корня (6.1) становятся кратными. В эти моменты, имеет место усиление твисторного поля (каустика конгруенции) вдоль изотропной прямой, соединяющей точки слияния и наблюдения. Такой светоподобный сигнал, распространяющийся в 3-пространстве с фундаментальной скоростью, может рассматриваться в качестве *классической модели фотона.*

С этой точки зрения, положение ''предчастицы" может детектироваться O лишь в определенные моменты времени, в то время как непрерывно дупликоны по существу ненаблюдаемы. Поэтому можно говорить о "половинчатом (dimerous) электроне" [46], который по существу (т.е. для наблюдателя) *существует только мгновенно*, в то время как непрерывно он существует лишь будучи разделенным на две тождественные точечные части, два дубликона. Замечательным образом, данная концепция позволяет дать элегантное объяснение явлению *квантовой интерференции* [10,46] за счет введения, вместо суперпозиции волн вероятности в квантовой теории, фазового сдвига параметра "комплексного времени".

Перечислим теперь несколько наиболее интересных следствий релятивистской ЕМЛ конструкции. Во-первых, для полиномиально параметризованной (невырожденной) ЕМЛ всегда, за счет структуры формул Виета, *выполняется полный набор законов сохранения, которые при этом имеют явную лоренц-инвариантную форму.* Например, закон сохранения полного момента импульса записывается в виде

$$\Sigma(\dot{x}^\mu x^\nu - \dot{x}^\nu x^\mu) = const, \tag{6.3}$$

где суммирование ведется по координатам/скоростям всех дупликонов, т.е. частиц одинаковой массы, которую можно принять единичной. Однако, *динамика является консервативной лишь для инерциально движущегося наблюдателя O* [40, 41], и это свойство согласуется с каноническими принципами физики (и даже позволяет дать естественное определение самому понятию "инерциальной системы отсчета").

Для *времениподобной* полиномиально параметризованной ЕМЛ, имеет место также неожиданное поведение дупликонов при больших значениях собственного времени T наблюдателя [40]. А именно, при некотором критическом значении T_1 наблюдается эффект *спаривания* дупликонов (асимптотически приближающихся один к другому). При еще большем времени $T_2 > T_1$ уже хорошо сформированные пары начинают группироваться в крупные *кластеры.* Тем самым, на фоне общего *разбегания* корней-частиц возникают сложные иерархические их структуры. Общая картина симулирует картину "расширения Вселенной" вплоть до выполнения закона Хаббла и, по меньшей мере качественно, напоминает реальную наблюдаемую.

Заключение

В работе представлен обзор основных положений и следствий алгебродинамики (АД). Эта теория в известной мере уникальна, поскольку базируется по существу *на одном единственном соотношении* (1.4), обобщении условий голоморфности Коши-Римана на алгебру комплексных кватернионов (бикватернионов) $\mathbb{B}$. Интерпретируя $\mathbb{B}$-дифференцируемые функции как физические поля, а частицы – как их сингулярности, из соотношения (1.4) (а точнее, из его редуцированной формы (2.1)) следует полная и самосогласованная теория взаимодействующих полей/частиц. Причем многие структуры, принятые в теоретической физике – калибровочные, спинорные, твисторные и проч. – не постулируются, а возникают сами как следствия фундаментального соотношения (1.4).

Особенно важно, что уравнения (1.4) обладают классом решений, отвечающих светоподобной (бессдвиговой) конгруенции, генерируемой точечной частицей, движущейся по некоторой мировой линии. Она может рассматриваться как Единая Мировая линия (ЕМЛ) и естественно порождает целый набор тождественных точечных частиц – дупликонов, в духе картины "одноэлектронной Вселенной" Уилера-Фейнмана. Для инерциального наблюдателя и полиномиально параметризованной ЕМЛ, коллективная динамика дупликонов всегда является консервативной. Тем самым возникают новые подходы к естественному описанию систем многих частиц и фиксации истинного вида межчастичных взаимодействий.

Более того, с ростом времени наблюдателя, на фоне общего разбегания, имеют место эффекты образования пар с последующей кластеризацией. Это позволяет приблизиться к решению другой фундаментальной проблемы, механизма образования все более сложных материальных образований на фоне взаимного удаления (разбегания) их составляющих.

В будущем предполагается изучение более общего (и естественного с точки зрения АД) случая коллективной динамики *струноподобных* сингулярностей-каустик. Другим направлением является продолжение рассмотрения динамики на фоне полного *комплексифицированного* пространства-времени $\mathbb{C}\mathbf{M}$, векторного пространства алгебры $\mathbb{B}$, и выяснение смысла четырех дополнительных координат.

Список литературы

1. Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени.* Москва: Мир, 1988.

2. Burinskii A.Ya., Kerr R.P. Nonstationary Kerr congruences, 1995. `https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/9501012`

3. Kassandrov V.V. General solution of the complex 4-eikonal equation and the "algebrodynamical" field theory. *Grav. & Cosm.*, 2002, 8 (suppl. 2), pp. 57–62. `https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0311006`

4. Kerr R.P., Wilson W.B. Singularities in the Kerr-Schild metrics. *Gen. Rel. Grav.*, 1979, no. 10, pp. 273–289.

5. Kassandrov V.V. Singular sources of Maxwell fields with self-quantized electric charge. In: *Has the Last Word been said on Classical Electrodynamics?*, eds. A. Chubykalo et al. Rinton Press, 2004, pp. 42–66. `https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/0308045`

6. Кассандров В.В. Алгебродинамика: кватернионы, твисторы, частицы. *Вестник Российского университета дружбы народов. Физика.*, 2000, 8(1), pp. 34–45.

7. Кассандров В.В. *Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика.* М.: Университет дружбы народов, 1992.

8. Кассандров В.В. Природа времени и частицы-каустики: физический Мир в алгебродинамике и твисторной теории. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2004, 1(1) pp. 89–105.

9. Kassandrov V.V. Quaternionic analysis and the algebrodynamics. In: *Space-time structure. Algebra and geometry*, eds. Pavlov D.G. et al. Moscow, Lilia-Print, 2007, pp. 441–473. `https://doi.org/10.48550/arXiv.0710.2895`

10. Kassandrov V.V. Algebrodynamics over complex space and phase extension of the Minkowski geometry. *Phys. Atom. Nuclei*, 2009, 72, pp. 813–827. `https://doi.org/10.1134/S106377880905010X`

11. Carter B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Phys. Rev.*, 1968, 174, pp. 1559–1568.

12. Burinskii A.Ya. Complex Kerr geometry and nonstationary Kerr solutions. *Phys. Rev. D*, 2003, 67, 124024. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0212048

13. Lind R.W., Newman E.T. Complexification of the algebraically special gravitational fields. *J. Math. Phys.*, 1974, 15, pp. 1103–1112.

14. Newman E.T. On a Classical, geometrical origin of magnetic moments, spin-angular momentum and the Dirac gyromagnetic ratio. *Phys. Rev. D*, 2002, 65, 104005. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0201055

15. Крамер Д., Штефанн Х., Мак-Каллум М., Херльт Э. *Точные решения уравнений Эйнштейна.* М.: Энергоиздат, 1982.

16. Атья М. *Геометрия и физика узлов.* М.: Мир, 1995.

17. Пенроуз Р. *Путь к реальности или Законы, управляющие Вселенной.* М.-Ижевск: R& C Dynamics, 2007.

18. Fueter R. Zur Theory der Regulären Functionen einer Quaternionenvariablen. *Monatsh. Math. Phys.*, 1936, 43, p. 69; Fueter R. Über dir Analytische Darstellung der Regulären Functionen einer Quaternionenvariablen. *Comment. Math. Helv.*, 1936, 8, p. 371.

19. Gürsey F., Tze H.C. Complex and quaternionic analyticity in chiral and gauge theories, I. *Ann. Phys.*, 1980, 128, pp. 29–47.

20. Evans M., Gürsey F., Ogievetsky V. From 2D conformal to 4D self-dual theories: the quaternionic analyticity. *Phys. Rev.*, 1993, D 47, pp. 3496–3517.

21. Deavours A. The quaternionic calculus. *Amer. Math. Monthly*, 1973, 80, pp. 995–1011.

22. Хренников А.Ю. Некоммутативный аналог функционального суперанализа. *Теор. Мат. Физ.*, 1995, 103:2, pp. 233–245.

23. Sudbery A. Quaternionic analysis. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1979, 85, pp. 199–223.

24. Scheffers G. Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen komplexen Funtionen. *Berichte Sächs. Acad. Wiss.*, 1893, Bd. 45, p. 828.

25. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ I. Дифференциальное исчисление. *Теор. Мат. Физ.*, 1984, 59:1, pp. 3–27.

26. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ II. Интегральное исчисление. *Теор. Мат. Физ.*, 1984, 60:2, pp. 169–198.

27. Kassandrov V.V. Conformal mappings, hyper-analytiity and field dynamics. *Acta Applic. Math.*, 1998, 50, pp. 197–202.

28. Kassandrov V.V. Biquaternionic electrodynamics and Weyl-Cartan geometry of space-time. *Grav. & Cosm.*, 1995, 1, pp. 216–222. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0007027

29. Kassandrov V.V. Physical fields as super-analytical mappings on the algebraic structure of space-time. In: *Quasigroups and Non-Associative Algebras in Physics*, eds. Löhmus J. and Kuusk P. Tallinn, Institite of physics of Estonia Press, 1990, pp. 202–214.

30. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Particles as singularities in the unified algebraic field dynamics. In: *Geometrical and Topological Ideas in Modern Physics*, ed. Petrov V.A. Protvino, Institute for high energy physics, 1992, pp. 199–212.

31. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Maxwell, Yang-Mills, Weyl and eikonal fields defined by any shear-free congruence. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 2017, 1750031. https://doi.org/10.48550/arXiv.1612.06718

32. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Twistor and "weak" gauge structures in the framework of quaternionic analysis, 2003. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0012109

33. Kassandrov V.V., Trishin V.N. Effective connections and fields associated with shear-free null congruences *Gen. Rel. Grav.*, 2004, 36, pp. 1603–1612. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0401120

34. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Self-dual connections and the equations of fundamental fields in a Weyl-Cartan space. *Phys. Part. Nuclei*, 2018, 49, pp. 5–9. https://doi.org/10.48550/arXiv.1808.01652

35. Бейтмен Г. *Математическая теория распространения электромагнитных волн.* М.: ГИФМЛ, 1958.

36. Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство-время. 2-спинорное исчисление и релятивистские поля.* М.: Мир, 1987.

37. Kassandrov V.V., Trishin V.N. "Particle-like" singular solutions in Einstein-Maxwell theory and in algebraic dynamics. *Grav. & Cosm.*, 2009, 5, pp. 272–276. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0007026

38. Kassandrov V.V., Khasanov I.Sh. Algebraic roots of Newtonian mechanics: correlated dynamics of particles on a unique worldline. *J. Phys. A: Math.Theor.*, 2013, 46, 175206. https://doi.org/10.48550/arXiv.1211.7002

39. Kassandrov V.V., Khasanov I.Sh., Markova N.V. Algebraic dynamics on a single worldline: Vieta formulas and conservation laws. *Вестник Российского университета дружбы народов. Математика. Информатика. Физика*, 2014, № 2, pp. 169–180. https://doi.org/10.48550/arXiv.1402.6158

40. Kassandrov V.V., Khasanov I.Sh., Markova N.V. Collective Lorentz invariant dynamics on a single “polynomial"worldline. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2015, 48, 395204. https://doi.org/10.48550/arXiv.1501.01606

41. Kassandrov V.V., Markova N.V. Three kinds of particles on a single rationally parameterized worldline. *Grav. Cosm.*, 2016, 22, pp. 363–367. https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.02869

42. Feynman R.P. The development of the space-time view of quantum electrodynamics. *Science*, 1966, 153 (3737), pp. 699–757.

43. Feynman R.P. The theory of positrons. *Phys. Rev.*, 1949, 76, pp. 749–787.

44. Stueckelberg E.C.G. Remarque á propos de la crèation de paires de particules en théorie de relativitè. *Helv. Phys. Acta*, 1941, 14, pp. 588–597.

45. Stueckelberg E.C.G. La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quants. *Helv. Phys. Acta*, 1942, 15, pp. 23–28.

46. Kassandrov V.V. “Dimerous” electron and quantum interference beoynd the probability amplitude paradigm. in: *Proc. Int. Sci. Meet. on Physical Interpretation of Relativity Theory (PIRT-2011)*, eds. Duffy M C et al. Moscow-Liverpool-Sunderland, Bauman Tech. Univ. Press, 2009, pp. 95–104. https://doi.org/10.48550/arXiv.1105.3183

References

1. Penrose R., Rindler W. *Spinors and space-time. Spinor and twistor methods in space-time geometry.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1986.

2. Burinskii A.Ya., Kerr R.P. Nonstationary Kerr congruences, 1995. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/9501012

3. Kassandrov V.V. General solution of the complex 4-eikonal equation and the “algebrodynamical” field theory. *Grav. & Cosm.*, 2002, 8 (suppl. 2), pp. 57–62. https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0311006

4. Kerr R.P., Wilson W.B. Singularities in the Kerr-Schild metrics. *Gen. Rel. Grav.*, 1979, no. 10, pp. 273–289.

5. Kassandrov V.V. Singular sources of Maxwell fields with self-quantized electric charge. In: *Has the Last Word been said on Classical Electrodynamics?*, eds. A. Chubykalo et al. Rinton Press, 2004, pp. 42–66. https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/0308045

6. Kassandrov V.V. Algebrodynamics: quaternions, twistors, particles. *Vestnik Peoples' Friend. Univ. Russia. Physics*, 2000, 8(1), pp. 34–45. (in Russ.)

7. Kassandrov V.V. *Algebraic structure of space-time and algebrodynamics.* Moscow, Peoples' Friend. Univ. Press, 1992. (in Russ.)

8. Kassandrov V.V. Nature of time and particles-caustics: physical world in algebrodynamics and twistor theory. *Hypercomplex numbers in geometry & physics*, 2004, 1(1), pp. 89–105. https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0312278

9. Kassandrov V.V. Quaternionic analysis and the algebrodynamics. In: *Space-time structure. Algebra and geometry*, eds. Pavlov D.G. et al. Moscow, Lilia-Print, 2007, pp. 441–473. https://doi.org/10.48550/arXiv.0710.2895

10. Kassandrov V.V. Algebrodynamics over complex space and phase extension of the Minkowski geometry. *Phys. Atom. Nuclei*, 2009, 72, pp. 813–827. https://doi.org/10.1134/S106377880905010X

11. Carter B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Phys. Rev.*, 1968, 174, pp. 1559–1568.

12. Burinskii A.Ya. Complex Kerr geometry and nonstationary Kerr solutions. *Phys. Rev. D*, 2003, 67, 124024. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0212048

13. Lind R.W., Newman E.T. Complexification of the algebraically special gravitational fields. *J. Math. Phys.*, 1974, 15, pp. 1103–1112.

14. Newman E.T. On a Classical, geometrical origin of magnetic moments, spin-angular momentum and the Dirac gyromagnetic ratio. *Phys. Rev. D*, 2002, 65, 104005. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0201055

15. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselauer C., Herlt E. *Exact solutions of Einstein's field equations.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009.

16. Atiyah M. *The geometry and physics of knots.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1990.

17. Penrose R. *The road to reality. A complete guide to the laws of the Universe.* London, Jonathan Cape, 2004.

18. Fueter R. Zur Theory der Regulären Functionen einer Quaternionenvariablen. *Monatsh. Math. Phys.*, 1936, 43, p. 69; Fueter R. Über dir Analytische Darstellung der Regulären Functionen einer Quaternionenvariablen. *Comment. Math. Helv.*, 1936, 8, p. 371.

19. Gürsey F., Tze H.C. Complex and quaternionic analyticity in chiral and gauge theories, I. *Ann. Phys.*, 1980, 128, pp. 29–47.

20. Evans M., Gürsey F., Ogievetsky V. From 2D conformal to 4D self-dual theories: the quaternionic analyticity. *Phys. Rev.*, 1993, D 47, pp. 3496–3517.

21. Deavours A. The quaternionic calculus. *Amer. Math. Monthly*, 1973, 80, pp. 995–1011.

22. Khrennikov A.Yu. Noncommutative analogue of the functional superanapysis. *Theor. Math. Phys.*, 1995, 103:2, pp. 525–534.

23. Sudbery A. Quaternionic analysis. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1979, 85, pp. 199–223.

24. Scheffers G. Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen komplexen Funtionen. *Berichte Sächs. Acad. Wiss.*, 1893, Bd. 45, p. 828.

25. Vladimirov V.S., Volovich I.V. Superanalysis I. Differential calculus. *Theor. Math. Phys.*, 1984, 59:1, pp. 317–335. (in Russ.)

26. Vladimirov V.S., Volovich I.V. Superanalysis II. Integral calculus. *Theor. Math. Phys.*, 1984, 60:2, 743–765. (in Russ.)

27. Kassandrov V.V. Conformal mappings, hyper-analytiity and field dynamics. *Acta Applic. Math.*, 1998, 50, pp. 197–202.

28. Kassandrov V.V. Biquaternionic electrodynamics and Weyl-Cartan geometry of space-time. *Grav. & Cosm.*, 1995, 1, pp. 216–222. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0007027

29. Kassandrov V.V. Physical fields as super-analytical mappings on the algebraic structure of space-time. In: *Quasigroups and Non-Associative Algebras in Physics*, eds. Löhmus J. and Kuusk P. Tallinn, Institite of physics of Estonia Press, 1990, pp. 202–214.

30. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Particles as singularities in the unified algebraic field dynamics. In: *Geometrical and Topological Ideas in Modern Physics*, ed. Petrov V.A. Protvino, Institute for high energy physics, 1992, pp. 199–212.

31. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Maxwell, Yang-Mills, Weyl and eikonal fields defined by any shear-free congruence. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 2017, 1750031. https://doi.org/10.48550/arXiv.1612.06718

32. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Twistor and “weak” gauge structures in the framework of quaternionic analysis, 2003. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0012109

33. Kassandrov V.V., Trishin V.N. Effective connections and fields associated with shear-free null congruences *Gen. Rel. Grav.*, 2004, 36, pp. 1603–1612. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0401120

34. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Self-dual connections and the equations of fundamental fields in a Weyl-Cartan space. *Phys. Part. Nuclei*, 2018, 49, pp. 5–9. https://doi.org/10.48550/arXiv.1808.01652

35. Bateman H. *The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion.* Dover Public. Inc., 1955.

36. Penrose R., Rindler W. *Spinors and space-time. 2-spinor calculus and relativistic fields.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1984.

37. Kassandrov V.V., Trishin V.N. "Particle-like" singular solutions in Einstein-Maxwell theory and in algebraic dynamics. *Grav. & Cosm.*, 2009, 5, pp. 272–276. https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0007026

38. Kassandrov V.V., Khasanov I.Sh. Algebraic roots of Newtonian mechanics: correlated dynamics of particles on a unique worldline. *J. Phys. A: Math.Theor.*, 2013, 46, 175206. https://doi.org/10.48550/arXiv.1211.7002

39. Kassandrov V.V., Khasanov I.Sh., Markova N.V. Algebraic dynamics on a single worldline: Vieta formulas and conservation laws. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia (Mathematics. Information Sciences. Physics)*, 2014, no. 2, pp. 169–180. https://doi.org/10.48550/arXiv.1402.6158

40. Kassandrov V.V., Khasanov I.Sh., Markova N.V. Collective Lorentz invariant dynamics on a single "polynomial" worldline. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2015, 48, 395204. https://doi.org/10.48550/arXiv.1501.01606

41. Kassandrov V.V., Markova N.V. Three kinds of particles on a single rationally parameterized worldline. *Grav. Cosm.*, 2016, 22, pp. 363–367. https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.02869

42. Feynman R.P. The development of the space-time view of quantum electrodynamics. *Science*, 1966, 153 (3737), pp. 699–757.

43. Feynman R.P. The theory of positrons. *Phys. Rev.*, 1949, 76, pp. 749–787.

44. Stueckelberg E.C.G. Remarque á propos de la crèation de paires de particules en théorie de relativitè. *Helv. Phys. Acta*, 1941, 14, pp. 588–597.

45. Stueckelberg E.C.G. La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quants. *Helv. Phys. Acta*, 1942, 15, pp. 23–28.

46. Kassandrov V.V. "Dimerous" electron and quantum interference beoynd the probability amplitude paradigm. in: *Proc. Int. Sci. Meet. on Physical Interpretation of Relativity Theory (PIRT-2011)*, eds. Duffy M C et al. Moscow-Liverpool-Sunderland, Bauman Tech. Univ. Press, 2009, pp. 95–104. https://doi.org/10.48550/arXiv.1105.3183

Авторы

Кассандров Владимир Всеволодович, к.ф.-м.н., доцент Института гравитации и космологии, Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия.
E-mail: vkassan@sci.pfu.edu.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Кассандров В. В. Алгебродинамика: кватернионный анализ, комплексная струна и единая Мировая линия. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2022. № 41. С. 31–48.

Authors

Kassandrov Vladimir Vsevolodovich, Assist. Prof., Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples' Friendship University of Russia, Miklukho-Maklaya Str. 6, Moscow, 117198, Russia.
E-mail: vkassan@sci.pfu.edu.ru

Please cite this article in English as:
Kassandrov V. V. The algebrodynamics: quaternionic analysis, complex string and the Unique Worldline. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2022, no. 41, pp. 31–48.