УДК 512.13, 512.12

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ КРИВИЗНЫ И ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

Баранов А. М.[a,b,1]

[a] ФГБОУ ВПО Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева (КГПУ), г. Красноярск, 660049, Россия

[b] ФГБОУ ВО Сибирский государственный университет им. акад. М.Ф. Решетнева (СибГУ), г. Красноярск, 660037, Россия

В касательной 4D пространстве-времени проведена алгебраическая классификация дифференциальной два-формы кривизны как антисимметричной матрицы, используя аналогию с тензором электромагнитного поля. Также по аналогии с алгебраической классификацией Петрова гравитационных полей вводятся типы такой матрицы. Приведены примеры с конкретными гравитационными полями: внешнего поля Шварцшильда и поля плоской гравитационной волны.

Ключевые слова: дифференциальные формы Картана, алгебраические классификации Петрова и электромагнитного поля, матрицы Вейля и Петрова для решений Шварцшильда и плоской гравитационной волны.

ALGEBRAIC CLASSIFICATION OF THE DIFFERENTIAL CURVATURE FORM AND THE GRAVITATIONAL FIELDS

Baranov A. M.[a,b,1]

[a] Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astafyev, 660049, Krasnoyarsk, Russia

[b] Siberian State University named after M.F. Reshetnev, 660037, Krasnoyarsk, Russia

Algebraic classification of the differential curvature form as classification of an antisymmetric matrix by analogy with electromagnetic field tensor is made in a tangent 4D space-time. Also by analogy with Petrov's algebraic classification of gravitational fields the types of such matrix are entered. Examples with concrete gravitational fields are given: the external field of Scharzschild and the gravitational plane wave.

Keywords: differential curvature form of Cartan, algebraic classifications of Petrov and electromagnetic field, Weyl and Petrov matrices of the Scharzschild solution and gravitational plane wave.

PACS: 04.20.-q , 04.20.Cv

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.16–20

Введение

Созданная А.З.Петровым алгебраическая классификация гравитационных полей [1] основана на классификации тензора кривизны (в общем случае тензора Вейля) путем предварительного приведения его к специальному виду симметричной комплексной 3×3 матрицы в евклидовом пространстве. Постановка задачи на собственные значения для такой матрицы позволяет получить специфические типы (подтипы) матрицы, которым сопоставляются классы конкретных гравитационных полей.

[1] E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Алгебраическая классификация Петрова связана с «прямым» нахождением компонент тензора кривизны (тензора Вейля) согласно тензорному определению этих объектов. Однако созданный Э.Картаном подход [2] с использованием дифференциальных форм позволяет более эффективно находить компоненты тензора кривизны.

1. Уравнения структуры Картана

Введем базисные дифференциальные формы (неголономные дифференциалы)

$$\Theta^{(\alpha)} = g_\mu^{(\alpha)} dx^\mu, \tag{1.1}$$

где g_μ^α – тетрады, составляющие базис в касательном в данной точке пространстве; dx^μ – дифференциалы координат x^μ; греческие индексы пробегают значения $0, 1, 2, 3$.

Если определить тетрадную метрику в касательном пространстве как

$$g_{(\alpha)(\beta)} = g_{(\alpha)\mu} g^\mu_{(\beta)}, \tag{1.2}$$

то ее можно связать с метрическим тензором

$$g_{(\alpha)(\beta)} = g^\mu_{(\alpha)} g^\nu_{(\beta)} g_{\mu\nu}. \tag{1.3}$$

Тогда, в касательном 4D пространстве-времени можно записать квадрат произвольного метрического интервала в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \Theta^{(\alpha)}\Theta_{(\alpha)} = g_{(\alpha)(\beta)}\Theta^{(\alpha)}\Theta^{(\beta)}, \tag{1.4}$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор псевдориманова 4D пространства-времени; в этом пространстве.

Картан предложил еще два структурных уравнения (уравнения структуры Картана). Первые уравнения в тетрадных компонентах записываются как

$$\mathbf{d}\Theta(\alpha) = -\omega^{(\alpha)}{}_{(\beta)} \wedge \Theta^{(\beta)}, \tag{1.5}$$

где здесь $\mathbf{d}$ – внешний дифференциал; $\wedge$ – внешнее произведение; $\omega_{(\alpha)(\beta)}$ – 1-форма связности, которая удовлетворяет соотношению $\omega_{(\alpha)(\beta)} = -\omega_{(\alpha)(\beta)}$ для случая $\mathbf{dg}_{(\alpha)(\beta)} = 0$.

Вторые уравнения структуры Картана имеют вид

$$\mathcal{R}_{(\alpha)((\beta)} = \mathbf{d}\,\omega_{(\alpha)(\beta)} + \omega_{(\alpha)(\gamma)} \wedge \omega^{(\gamma)}{}_{(\beta)}, \tag{1.6}$$

где $\mathcal{R}_{(\alpha)((\beta)}$ – 2-форма кривизны, которая связана с тензором кривизны $R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}$ в касательном пространстве как

$$\mathcal{R}_{(\alpha)(\beta)} = (1/2) R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} \Theta^{(\gamma)} \wedge \Theta^{(\delta)}, \tag{1.7}$$

и обладает свойством антисимметричности $\mathcal{R}_{(\alpha)(\beta)}$ =- $\mathcal{R}_{(\beta)(\alpha)}$.

В дальнейшем выберем тетрадную метрику $g_{(\alpha)(\beta)}$ постоянной относительно внешнего дифференцирования и равной метрическому тензору Минковского $\eta_{(\alpha)(\beta)} \equiv \eta_{\alpha\beta} = diag(1, -1, -1, -1)$, так что $\eta^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta = diag(1, 1, 1, 1)$ или просто единичная 4×4 матрица $\hat{E}$.

2. Задача на собственные значения

Рассмотрим теперь 2-форму кривизны как антисимметричную $4{\times}4$ матрицу $(\mathcal{R}_{(\alpha)(\beta)}) \equiv \hat{\mathcal{R}}$, обладающую следующими свойствами: $Trace\hat{\mathcal{R}} = 0$; $\hat{\mathcal{R}}^T = -\hat{\mathcal{R}}$. Это позволяет воспользоваться аналогией с тензором электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Поэтому далее положим $\mathcal{R}_{(0)(i)} = E_i$ и будем рассматривать эти компоненты как аналог вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ (латинские индексы пробегают значения $1, 2, 3$). Компоненты $\mathcal{R}_{\overset{*}{(1)}(0)} = \mathcal{R}_{(3)(2)} = H_1$; $\mathcal{R}_{\overset{*}{(2)}(0)} = \mathcal{R}_{(1)(3)} = H_2$;

$\mathcal{R}_{(3)(0)}^{\ *} = \mathcal{R}_{(2)(1)} = H_3$ будем считать аналогами компонент вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ (здесь операция звездочка есть операция дуального сопряжения (дуального поворота) $\mathcal{R}_{(\alpha)(\beta)}^{\ *} = (1/2)\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{R}^{(\gamma)(\delta)}$, где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – символ Леви-Чивита). В нашем случае аналогами инвариантов электромагнитного поля будут

$$I_1 = \delta^{ij}\mathcal{R}_{(0)(i)}\mathcal{R}_{(0)(j)} - \delta^{ij}\mathcal{R}_{(0)(i)}^{\ *}\mathcal{R}_{(0)(j)}^{\ *} \Longleftrightarrow \vec{E}^2 - \vec{H}^2 \tag{2.1}$$

и

$$I_2 = \delta^{ij}\mathcal{R}_{(0)(i)}\mathcal{R}_{(0)(j)}^{\ *} \Longleftrightarrow \vec{E}\vec{H}, \tag{2.2}$$

где $\delta^{ij} = \delta_{ij} = diag(1,1,1)$.

Как известно, алгебраическая классификация электромагнитного поля связана с задачей на собственные значения для тензора электромагнитного поля (см., в частности, [3]). Тогда в рассматриваемом случае задача на собственные значения примет вид $\mathcal{R}^{(\alpha)}{}_{(\beta)}X^{(\beta)} = \lambda\, \delta^\alpha_\beta X^\beta$, где $X^{(\alpha)}$ суть собственные векторы матрицы $\hat{\mathcal{R}}$, а вековое уравнение для $\lambda-$матрицы $\hat{\mathcal{R}}(\lambda)$ запишется как

$$det\, \hat{\mathcal{R}}(\lambda) = det(\mathcal{R}^{(\alpha)}{}_{(\beta)} - \lambda\, \delta^\alpha_\beta) = 0. \tag{2.3}$$

Проводя аналогию с классификацией тензора электромагнитного поля, можно сразу все сказать о классификации рассматриваемой здесь 2-формы кривизны. Если коротко, то анализ задачи на собственные значения для матрицы $\hat{\mathcal{R}}$ и использование выше указанной аналогии приводит к тому, что можно ввести подтип I матрицы $\lambda-$матрицы $\hat{\mathcal{R}}$ с характеристикой Сегре $[(1)(1)(1)(1)]$. Это означает, что все собственные значения в этом случае различны. Такой подтип соответствует подтипу I по классификации Петрова, который относится к наиболее общим гравитационным полям без каких-либо симметрий. Следующий подтип матрицы $\hat{\mathcal{R}}$ называют подтипом D с характеристикой $[(1,1)(1)(1)]$, то есть два собственных значения равны между собой (в данном случае нулю), а два других различны. В этом случае второй инвариант $I_2 = 0$. Существует и волновой подтип матрицы $\hat{\mathcal{R}}$, который по аналогии с классификацией Петрова называют подтипом N с характеристикой $[(1)(3)]$. При этом обращается в нуль и первый инвариант $I_1 = 0$, как и должно быть для светоподобной среды.

3. Примеры с гравитационными полями

Рассмотрим два примера с гравитационными полями: внешним полем Шварцшильда и гравитационным полем плоской волны.

1. Поле Шварцшильда, как известно, относится к подтипу D по классификации Петрова и соответствующая каноническая бесследовая 3×3 матрица Вейля в собирательный индексах может быть записана как $(W_{ij}) = (m/r^3)\, diag(2,-1,-1)$. Здесь скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице. С другой стороны, тетрадные компоненты тензора кривизны, отличные от нуля, равны: $R_{(0)(1)(0)(1)} = -2R_{(0)(2)(0)(2)} = -2R_{(0)(3)(0)(3)} = 2m/r^3 = -R_{(2)(3)(2)(3)} = 2R_{(3)(1)(3)(1)} = 2R_{(1)(2)(1)(2)}$. При этом в дальнейшем наряду с компонентами, вообще говоря, комплексной 3×3 матрицы Вейля будем по ряду соображений для удобства рассматривать и комопоненты симметричной бесследовой блочной 6×6 матрицы Петрова [1]. Поэтому следует иметь ввиду правило Петрова для собирательных индексов тензора кривизны (тензора Вейля): $10\to 1; 20\to 2; 30\to 3; 23\to 4; 31\to 5; 12\to 6$. Это правило можно распространить и на компоненты матрицы $\hat{\mathcal{R}}_{(\alpha)(\beta)}$ (2-форму кривизны), что приведет к введению 6-вектора «электромагнитного поля».

Учитывая (1.7), найдем компоненты матрицы $\hat{\mathcal{R}}$. Отличными от нуля оказываются компоненты «вектора напряженности электрического поля» $\hat{\mathcal{R}}_{(0)(i)}$, связанные с компонентами тензора кривизны поля Шварцшильда: $\hat{\mathcal{R}}_{(0)(1)} = R_{(0)(1)(0)(1)}\Theta^{(0)}\wedge\Theta^{(1)} = (2m/r^3)\Theta^{(0)}\wedge\Theta^{(1)}$; $\hat{\mathcal{R}}_{(0)(2)} = R_{(0)(2)(0)(2)}\Theta^{(0)}\wedge\Theta^{(2)} = -(m/r^3)\Theta^{(0)}\wedge\Theta^{(2)}$; $\hat{\mathcal{R}}_{(0)(3)} = R_{(0)(3)(0)(3)}\Theta^{(0)}\wedge\Theta^{(3)} = -(m/r^3)\Theta^{(0)}\wedge\Theta^{(3)}$.

Так как матрица Вейля для поля Шварцшильда относится к матрицам «электрического типа» (статическое поле), то прослеживается аналогия и с «электрическими» компонентами матрицы $\hat{\mathcal{R}}$ для 2-формы кривизны для поля Шварцшильда.

Другими словами, компоненты тензора кривизны внешнего поля Шварцшильда выступают в качестве компонент вектора напряженности электрического поля в интепретации матрицы $\hat{\mathcal{R}}$ и представляют строку и столбец этой матрицы.

2. Поле плоской гравитационной волны много раз обсуждалось (см., например, [4]). Отличные от нуля компоненты 6×6 матрицы Петрова для тензора кривизны этого поля суть $R_{22} = -R_{33} = -R_{55} = R_{66}$ (компоненты «электрического типа») и $R_{26} = R_{35} = R_{53} = R_{62}$ (компоненты «магнитного типа») или $R_{(2)(0)(2)(0)} = -R_{(3)(0)(3)(0)} = R_{(2)(0)(1)(2)} = R_{(3)(0)(3)(1)} = R_{(3)(1)(3)(0)} = -R_{(3)(1)(3)(1)} = R_{(1)(2)(2)(0)} = R_{(1)(2)(1)(2)} = a$.

Возвращаясь к выражению (1.7), связывающему матрицу $\hat{\mathcal{R}}_{(\alpha)(\beta)}$ с компонентами тензора кривизны поля гравитационной плоской волны, получим для компонент вектора напряженности «электрического поля»: $-E_1 = \hat{\mathcal{R}}_{(1)(0)} = 0$; $-E_2 = \hat{\mathcal{R}}_{(2)(0)} = R_{(2)(0)(2)(0)}\Theta^{(2)} \wedge \Theta^{(0)} + R_{(2)(0)(1)(2)}\Theta^{(1)} \wedge \Theta^{(2)} = a(\Theta^{(2)} \wedge \Theta^{(0)} + \Theta^{(1)} \wedge \Theta^{(2)})$; $-E_2 = \hat{\mathcal{R}}_{(3)(0)} = R_{(3)(0)(3)(0)}\Theta^{(3)} \wedge \Theta^{(0)} + R_{(3)(0)(3)(1)}\Theta^{(3)} \wedge \Theta^{(0)} = a(-\Theta^{(3)} \wedge \Theta^{(0)} + \Theta^{(3)} \wedge \Theta^{(1)})$.

Аналогично для компонент вектора напряженности «магнитного поля» найдем: $H_1 = \hat{\mathcal{R}}_{(3)(2)} = 0$; $H_2 = -\hat{\mathcal{R}}_{(3)(1)} = -R_{(3)(1)(3)(0)}\Theta^{(3)} \wedge \Theta^{(0)} - R_{(3)(1)(3)(1)}\Theta^{(3)} \wedge \Theta^{(1)} = a(-\Theta^{(3)} \wedge \Theta^{(0)} + \Theta^{(3)} \wedge \Theta^{(1)})$; $H_3 = -\hat{\mathcal{R}}_{(2)(1)} = -R_{(1)(2)(2)(0)}\Theta^{(2)} \wedge \Theta^{(0)} - R_{(1)(2)(1)(2)}\Theta^{(1)} \wedge \Theta^{(2)} = a(-\Theta^{(2)} \wedge \Theta^{(0)} - \Theta^{(1)} \wedge \Theta^{(2)})$.

Нетрудно убедиться, что оба аналога инвариантов электромагнитного поля (2.1) и (2.2) равны нулю, то есть получен аналог плоской электромагнитной волны типа N на основе плоской гравитационной волны типа N. Другими словами, при такой процедуре плоская гравитационная волна как бы «проецируется» в плоскую электромагнитную волну.

Заключение

В работе рассмотрена дифференциальная 2-форма кривизны, вводимая в рамках подхода Картана [2] для нахождения компонент тензора кривизны. Проведена алгебраическая классификация 2-формы кривизны как антисимметричной матрицы в касательном 4D пространстве-времени с использованием ортонормированных тетрад. При этом была использована аналогия с тензором электромагнитного поля. Как и в алгебраической классификации Петрова гравитационных полей, введены типы такой матрицы, которые тесно связаны с гравитационным полем. Подробно рассмотрены примеры с конкретными гравитационными полями: внешним полем Шварцшильда (подтип D) и полем плоской гравитационной волны (подтип N, две плоскости поляризации). В итоге получаем, что компоненты тензора кривизны поля Шварцшильда составляют компоненты «вектора напряженности электрического поля» такой матрицы, относящейся к подтипу D. Компоненты тензора кривизны поля плоской гравитационной волны образуют поле «плоской электромагнитной волны» подтипа N (одна плоскость поляризации).

Список литературы

1. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности.* Москва: Наука, 1966. 495 с.
2. Картан Э. *Геометрия римановых пространств.* Москва-Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 244 с.
3. Владимиров Ю.С. *Системы отсчета в теории гравитации.* М.: Энергоидат, 1982. 256 с.
4. Захаров В.Д. *Гравитационные волны в теории гравитации Эйнштейна.* Москва: Наука, 1972.

References

1. Petrov A.Z. *New Methods in General Relativity.* Moscow, Nauka Publ., 1966. 495 p. (in Russian)
2. Cartan E. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* Paris, Gauthier-Villars et S-ie Éditeurs, 1928.

3. Vladimirov Yu.S. *Reference Frames in the Gravitation Theory.* Moscow, Energoizdat Publ., 1982. 256 p. (in Russian)

4. Zakharov V.D. *Gravitational Waves in the Einstein Theory Gravity.* Moscow, Nauka Publ., 1972. (in Russian)

Авторы

Баранов Александр Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра физики и методики обучения физике, ФГБОУ ВПО Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева (КГПУ), ул. Ады Лебедевой, 89, г. Красноярск, 660049, Россия.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Баранов А. М. Алгебраическая классификация дифференциальной формы кривизны и гравитационные поля. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2023. № 1. С. 16–20.

Authors

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department “Physics and Methods of Physics Training”, Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astafyev, 89 Ada Lebedeva St., 660049, Krasnoyarsk, Russia.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Please cite this article in English as:
Baranov A. M. Algebraic classification of the differential curvature form and the gravitational fields. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 16–20.