УДК 524.882



# АНИЗОТРОПНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТИПА БИАНКИ I, V, IX В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ*

Галеев Р. Г.[a,1], Сушков С. В.[a,2]

[a] Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

В данной работе мы анализируем поведении анизотропии в моделях типа Бианки I, V, IX в теории гравитации с неминимальной кинетической связью. Мы получаем уравнения поля из действия с неминимальной кинетической связью, тем самым получив обобщенную систему уравнений для всех трех типов. Далее, численно анализируя решения данных моделей, мы исследуем поведение анизотропии на ранних и поздних стадиях эволюции вселенной.

*Ключевые слова*: модифицированные теории гравитации, скалярно-тензорные теории гравитации, инфляция.

# ANISOTROPIC COSMOLOGICAL MODELS OF BIANCHI TYPE I, V, IX IN GRAVITY THEORY WITH NON-MINIMAL COUPLING

Galeev R. G.[a,1], Sushkov S. V.[a,2]

[a] Kazan State University, Kazan, 420008, Russia

In this work we analyze behaviour of anisotropy in cosmological models of Bianchi type I, V, IX in gravity theory with non-minimal kinetic coupling. Deriving background equations from non-minimally coupled action, we obtain generalized system of equations. Further, we numerically analyze the solutions of this system, considering the anisotropy on early and late stage of universe evolution.

*Keywords*: modified gravity theories, scalar-tensor gravity theories, inflation.

PACS: 04.70.-s, 04.90.+e
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.26–30

## Введение

Благодаря стремительному развитию наблюдательной космологии в последние десятилетия, некоторые астрономические наблюдения говорят нам, что общая теория относительности нуждается в модификации и одним из способов это включение дополнительной степени свободы. Одним из претендентов на эту роль является скалярное поле, называемое инфлатоном. На данный момент, существует достаточное количество скалярно-тензорных теорий описывающих эволюцию нашей вселенной. Мы же в качестве рабочей теории сосредоточимся на теории гравитации с неминимальной кинетической связью [1]. Данная теория является частным случаем более обобщенной скалярно-тензорной теории Хорндески, которая допускает уравнения поля не выше второго порядка [2].

*Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030» Казанского федерального университета и частично поддержана грантом РНФ № 21-12-00130.

[1] E-mail: rafggaleev@stud.kpfu.ru
[2] E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Также известно, что однородная изотропная вселенная Фридмана включает себя три модели с различным знаком кривизны $k = -1, 0, 1$, что соответствует открытой, плоской и закрытой моделям вселенной [3]. В качестве обобщения открытой, плоской и закрытой вселенной соответствуют модели Бианки типа V, I и IX соответственно [4]. Изотропные космологические модели хорошо изучены [1], [5], [6], поэтому в данной работе мы исследуем поведение анизотропии в однородных космологических моделях на ранних и поздних стадиях эволюции вселенной.

## 1. Анизотропные космологические модели в теории с неминимальной кинетической связью

Теория гравитации с неминимальной кинетической связью определяется следующим действием:

$$\mathcal{S} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(M_{pl}^2 R - [g^{\mu\nu} + \alpha G_{\mu\nu}]\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right), \tag{1.1}$$

где $R$ - скаляр Риччи, $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор, $G_{\mu\nu}$ - тензор Эйнштейна, $M_{pl}^2 = \frac{1}{8\pi G}$, и $\alpha$ - коэффициент неминимальной кинетической связи. Более детальный анализ уравнений поля в ковариантном представлении представлен здесь [5].

Для анизотропных моделей моделей типа Бианки возьмем метрику, заданную через 1-формы:

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2\omega^1\otimes\omega^1 + a_2^2\omega^2\otimes\omega^2 + a_3^2\omega^3\otimes\omega^3, \tag{1.2}$$

где $a_i(t)$ - масштабные факторы, $\omega^i$ - 1-формы, где $i = 1, 2, 3$. Чтобы перейти в определенный тип Бианки используются коммутационные соотношения для 1-форм $\omega^i$. Для модели Бианки I коммутационное соотношение выглядит следующим образом $d\omega^i = 0$, для Бианки V — $d\omega^i = \omega^i\wedge\omega^1$, и для Бианки IX — $d\omega^i = -2\epsilon^{ijk}\omega^j\wedge\omega^k$.

**Таблица 1.** Значения в диагональной матрице представляющие кривизну пространства-времени. Где $t$ означает тип Бианки I,V или IX. Также для типа Бианки IX допускаются следующие комбинации $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}$.

| $K_{\mu\nu}^t$ | $K_{\mu\nu}^I$ | $K_{\mu\nu}^V$ | $K_{\mu\nu}^{IX}$ |
|---|---|---|---|
| $K_{00}^t$ | 0 | $-\frac{1}{a_1^2}$ | $\frac{1}{3}\left[\frac{2}{a_1^2} + \frac{2}{a_2^2} + \frac{2}{a_2^3} - \frac{a_1^2}{a_2^2a_3^3} - \frac{a_2^2}{a_1^2a_3^2} - \frac{a_2^2}{a_1^2a_3^2}\right]$ |
| $K_{ii}^t$ | 0 | $-\frac{1}{a_1^2}$ | $-\frac{3a_i^2}{a_j^2a_k^2} + \frac{a_j^2}{a_i^2a_k^2} + \frac{a_k^2}{a_i^2a_j^2} - \frac{2}{a_i^2} + \frac{2}{a_j^2} + \frac{2}{a_k^2}$ |

Опираясь на классификацию Бианки получим уравнения поля для этих моделей. Варьируя действие с неминимальной кинетической связью (1.1) по метрике (1.2) и используя следующую параметризацию $a_1 = \mathrm{a}e^{\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-}$, $a_2 = \mathrm{a}e^{\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-}$, $a_3 = \mathrm{a}e^{-2\beta_+}$, где a – средний масштабный фактор, а $\beta_\pm$ – параметры анизотропии. Тогда получим следующую систему уравнений после нескольких алгебраических манипуляций

$$3M_{pl}^2\left(H^2 - \dot\beta_+^2 - \dot\beta_-^2 + K_{00}^t\right) + \frac{9}{2}\alpha\dot\phi^2\left(H^2 - \dot\beta_+^2 - \dot\beta_-^2 + \frac{1}{3}K_{00}^t\right) = \frac{1}{2}\dot\phi^2, \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left[\left(M_{pl}^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot\phi^2\right)\mathrm{a}^3\dot\beta_+\right] = \frac{1}{6}\left(M_{pl}^2 - \frac{1}{2}\alpha\dot\phi^2\right)\left(K_{11}^t + K_{22}^t - 2K_{33}^t\right), \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left[\left(M_{pl}^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot\phi^2\right)\mathrm{a}^3\dot\beta_-\right] = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(M_{pl}^2 - \frac{1}{2}\alpha\dot\phi^2\right)(K_{11}^t - K_{22}^t). \tag{1.5}$$

И варьируя действие (1.1) по скалярному полю $\phi$, получим уравнение на скалярное поле

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{a}^3\dot\phi\left[1 - 3\alpha\left(H^2 - \dot\beta_+^2 - \dot\beta_-^2 + K_{00}^t\right)\right]\right\} = 0. \tag{1.6}$$

Перепишем полученные уравнения поля в соответствие с каждым типом Бианки для большей наглядности.

**Бианки I**

Модель типа Бианки I в деталях проанализирована и исследована в данной работе [7]. Ключевым здесь является то, что мы сразу можем получить первые интегралы из этих уравнений (1.8, 1.9).

$$3\left(M_{pl}^2+\frac{3}{2}\alpha\dot\phi^2\right)\left(H^2-\dot\beta_+^2-\dot\beta_-^2\right) = \frac{1}{2}\dot\phi^2, \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left[\left(M_{pl}^2+\frac{1}{2}\alpha\dot\phi^2\right)\mathrm{a}^3\dot\beta_\pm\right] = 0, \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{a}^3\dot\phi\left[1-3\alpha\left(H^2-\dot\beta_+^2-\dot\beta_-^2\right)\right]\right\} = 0. \tag{1.9}$$

**Бианки V**

В модели Бианки V присутствует недиагональное модифицированное уравнение Эйнштейна 01/10

$$2H_1-H_2-H_3=0, \tag{1.10}$$

что в некоторой степени упрощает систему, так как можно это уравнение проинтегрировать $a_1^2 = a_2a_3$. И это дает нам $\beta\equiv\beta_-=-\beta_+/\sqrt{3}$,

$$3M_{pl}^2\left[H^2-\frac{4}{3}\dot\beta^2-\frac{1}{\mathrm{a}^2}\right]+\frac{9}{2}\alpha\dot\phi^2\left[H^2-\frac{4}{3}\dot\beta^2-\frac{1}{3\mathrm{a}^2}\right] = \frac{1}{2}\dot\phi^2, \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left[\left(M_{pl}^2+\frac{1}{2}\alpha\dot\phi^2\right)\mathrm{a}^3\dot\beta\right] = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{a}^3\dot\phi\left[1-3\alpha\left(H^2-\frac{4}{3}\dot\beta^2-\frac{1}{\mathrm{a}^2}\right)\right]\right\} = 0. \tag{1.13}$$

В данной модели также как и в Бианки I можно сразу получить первые интегралы (1.12, 1.13), что значительно упрощает дальнейший анализ.

**Бианки IX**

Некоторый анализ данной модели представлен в данной работе [8]. Стоит заметить, что здесь также имеется первый интеграл (1.16), однако только для уравнения на скалярное поле.

$$3M_{pl}^2\left[H^2-\dot\beta_+^2-\dot\beta_-^2+\frac{\mathcal{K}}{\mathrm{a}^2}\right]+\frac{9}{2}\alpha\dot\phi^2\left[H^2-\dot\beta_+^2-\dot\beta_-^2+\frac{\mathcal{K}}{3\mathrm{a}^2}\right] = \frac{1}{2}\dot\phi^2, \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left[\left(M_{pl}^2+\frac{1}{2}\alpha\dot\phi^2\right)\mathrm{a}^3\dot\beta_\pm\right] = \frac{1}{2\mathrm{a}^2}\left(M_{pl}^2-\frac{1}{2}\alpha\dot\phi^2\right)\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\beta_\pm}, \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{a}^3\dot\phi\left[1-3\alpha\left(H^2-\dot\beta_+^2-\dot\beta_-^2+\frac{\mathcal{K}}{\mathrm{a}^2}\right)\right]\right\} = 0, \tag{1.16}$$

где мы ввели анизотропный потенциал

$$\mathcal{K}=-\frac{1}{3}e^{-8\beta_+}\left(4e^{6\beta_+}\cosh^2(\sqrt{3}\beta_-)-1\right)\left(4e^{6\beta_+}\sinh^2(\sqrt{3}\beta_-)-1\right). \tag{1.17}$$

Для того, чтобы проанализировать данную модель, мы полагаем, что параметры анизотропии $\beta_\pm << 1$. Тогда раскладывая анизотропный потенциал $\mathcal{K}$ (1.17) по малым $\beta_\pm$ вплоть до первого порядка, уравнение (1.15) примет следующий вид

$$\frac{1}{\mathrm{a}^3}\frac{d}{dt}\left[\left(M_{pl}^2+\frac{1}{2}\alpha\dot\phi^2\right)\mathrm{a}^3\dot\beta_\pm\right]=0. \tag{1.18}$$

Это позволяет нам получить первый интеграл для параметров анизотропии $\beta_\pm$.

Численные решения данных систем уравнений представлены на графиках (Рис. 1, Рис. 2). Отсюда видно, что при $a \to \infty$ параметр Хаббла $H \to 0$, это означает, что модели типа Бианки I, V, IX изотропизуются на поздних стадиях эволюции вселенной. Однако совершенно иначе ведет себя параметр Хаббла $H$ в этих моделях при $a \to 0$.

Рассматривая случай нулевых параметров анизотропии $\beta_{\pm} = 0$ (Рис. 1),в модели типа Бианки I параметр Хаббла $H$ стремится к константе заданной начальными условиями при численном решении. Это детально исследовано здесь [7]. При $a \to 0$ в моделях типа Бианки V и IX параметр Хаббла $H$ имеет следующие ассимптотики $H \to +\infty$ и $H \to -\infty$ соответственно, что четко видно на правом графике (Рис. 2).

В случае $\beta_{\pm} \neq 0$ (Рис. 2) слева, поведение аналогично тому, что и в изотропном случае. Однако, анизотропия дает некоторый вклад в эволюцию вселенной в виде пика после плато.

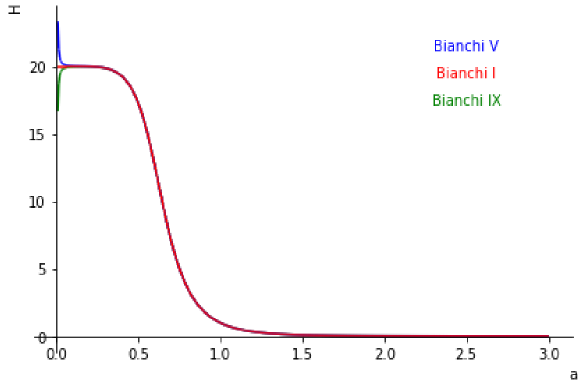


**Рис. 1.** Поведение параметра Хаббла $H^2$ от среднего масштабного фактора a при $\beta_{\pm} = 0$.

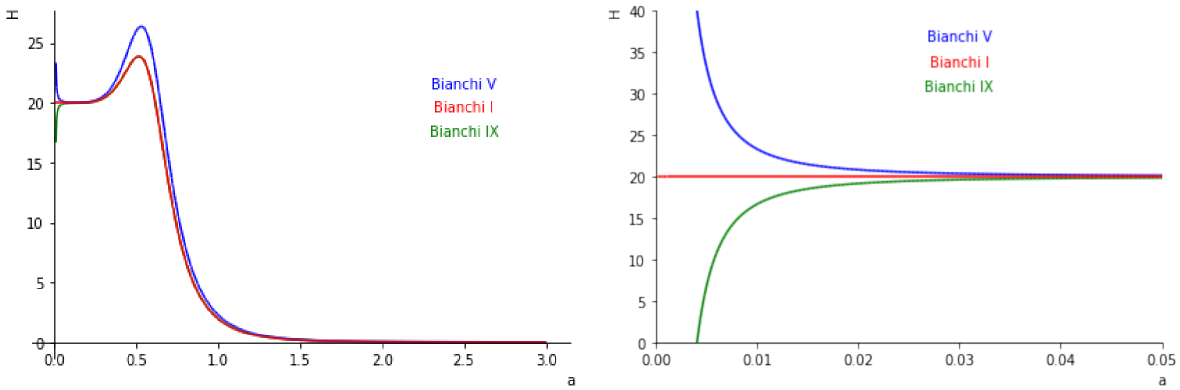


**Рис. 2.** Поведение параметра Хаббла $H^2$ в зависимости от a при $\beta_{\pm} \neq 0$ (Слева). Поведение параметра Хаббла $H^2$ в зависимости от a при $\beta_{\pm} \neq 0$ вблизи нуля.(Справа)

## Список литературы


1. Granda L.N., Cardona W. General Non-minimal Kinetic coupling to gravity. *JCAP*, 2010, 07, 021.

2. Horndeski G.W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 1974, 10, pp. 363–384.

3. Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, 1922, 10, pp. 377–386.

4. Bianchi L. Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. *Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie Terza*, 1898, 11, pp. 267–352.

5. Sushkov S.V. Realistic cosmological scenario with nonminimal kinetic coupling. *Phys. Rev.*, 2012, D85, 123520.

6. Sushkov S.V. Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling. *Phys. Rev.*, 2009, D80, 103505.

7. Galeev R. Anistropic cosmological models in Horndeski gravity. *Phys. Rev.*, 2021, D103, 104015.

8. Starobinskiy A.A. Anisotropy screening in Horndeski cosmologies. *Phys. Rev.*, 2020, D101, 064039.

### References

1. Granda L.N., Cardona W. General Non-minimal Kinetic coupling to gravity. *JCAP*, 2010, 07, 021.

2. Horndeski G.W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 1974, 10, pp. 363–384.

3. Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, 1922, 10, pp. 377–386.

4. Bianchi L. Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. *Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie Terza*, 1898, 11, pp. 267–352.

5. Sushkov S.V. Realistic cosmological scenario with nonminimal kinetic coupling. *Phys. Rev.*, 2012, D85, 123520.

6. Sushkov S.V. Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling. *Phys. Rev.*, 2009, D80, 103505.

7. Galeev R. Anistropic cosmological models in Horndeski gravity. *Phys. Rev.*, 2021, D103, 104015.

8. Starobinskiy A.A. Anisotropy screening in Horndeski cosmologies. *Phys. Rev.*, 2020, D101, 064039.

### Авторы

**Галеев Рафкат Газинурович**, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: rafggaleev@stud.kpfu.ru

**Сушков Сергей Владимирович**, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**
Галеев Р. Г., Сушков С. В. Анизотропные космологические модели типа Бианки I, V, IX в теории гравитации с неминимальной кинетической связью. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2023. № 1. С. 26–30.

### Authors

**Galeev Rafkat Gazinurovich**, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: rafggaleev@stud.kpfu.ru

**Sushkov Sergey Vladimirovich**, Doctor of Physics and Mathematics, Docent, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

**Please cite this article in English as:**
Galeev R. G., Sushkov S. V. Anisotropic cosmological models of Bianchi type I, V, IX in gravity theory with non-minimal coupling. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 26–30.