УДК 517.917

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ПО БЕНЕНТИ-ФРАНКАВИЛЬЯ И ТИПЫ ПО ПЕТРОВУ*

Гальцов Д. В.[a,1], Кулицкий А. В.[a,2]

[a] МГУ, г. Москва, 119991, Россия

Бененти и Франкавилья (БФ) предложили класс метрик с двумя коммутирующими векторами Киллинга, для которых существует неприводимый тензор Киллинга второго ранга, и уравнения геодезических интегрируемы. Этот класс допускает нетривиальный тензор Риччи и, вообще говоря, не является алгебраически специальным. Мы находим дополнительное условие на класс БФ, при выполнении которого метрики допускают изотропные геодезические бессдвиговые конгруэнции и принадлежат либо общему типу I, либо типу D по Петрову, но не типу II. Соответствующие тензоры Киллинга имеют лишь две ненулевые проекции Ньюмена-Пенроуза. Этому подклассу принадлежат черные дыры и решения с параметром Ньюмена-Унти-Тамбурино (НУТ) в теории N=4 супергравитации.

Ключевые слова: черные дыры, тензоры Киллинга, типы по Петрову, формализм Ньюмена-Пенроуза.

BENENTI-FRANCAVIGLIA SEPARABILITY AND PETROV TYPES

Gal’tsov D. V.[a,1], Kulitskii A. V.[a,2]

[a] Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

Benenti and Francavilla (BF) proposed a class of metrics with two commuting Killing vectors for which there exists an irreducible Killing tensor of the second rank and the geodesic equations are integrable. This class admits a non-trivial Ricci tensor and generically is not algebraically special. We find an additional condition on the BF class, under which the metrics admit isotropic geodesic and shear-free congruences, and belong either to the general Petrov type I or to type D, but not to type II. The corresponding Killing tensors have only two nonzero Newman-Penrose projections. This subclass includes black holes with the Newman-Unti-Tamburino (NUT) parameter, in the $\mathcal{N} = 4$ supergravity

Keywords: black holes, Killing tensors, Petrov type, Newman-Penrose formalism.

PACS: 34D08, 93C15
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.31–35

Введение

Метрики Керра, Керра-Ньюмена и их обобщения с параметром НУТ принадлежат к типу D по Петрову и обладают неприводимыми тензорами Киллинга, обеспечивающими разделение переменных в уравнениях геодезических и волновых уравнениях. В последнее время возрос интерес к деформациям этих метрик, сохраняющих указанные свойства [1]. В связи с этим оказался полезным анзац Бененти-Франкавилья [2], предложенный в 1979 г., который гарантирует существование тензора Киллинга в более общих пространствах, вообще говоря, принадлежащих к общему типу I по Петрову. Целью работы является уточнение возможных алгебраических типов метрик БФ,

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ в рамках проекта 20-52-18012 и научной и образовательной школы МГУ «Фундаментальные и прикладные космические исследования».

[1]E-mail: galtsov@phys.msu.ru
[2]E-mail: av.kulitsky@yandex.ru

а также отыскание подкласса, допускающего существование изотропных бессдвиговых геодезических конгруэнций, но не обязательно принадлежащего типу D. Мы покажем, что такому подклассу принадлежат некоторые метрики черных дыр в расширенных теориях супергравитации.

1. Анзац Бененти-Франскавилья

Интересующий нас класс в координатах t, r, y, φ (сигнатура $[+---]$) описывается контравариантным метрическим тензором [2,3]:

$$g^{\mu\nu} = C \begin{pmatrix} A_3(r) - B_3(y) & 0 & 0 & A_4(r) - B_4(y) \\ 0 & -A_2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_2(y) & 0 \\ A_4(r) - B_4(y) & 0 & 0 & A_5(r) - B_5(y) \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{A_1(r) + B_1(y)} \tag{1.1}$$

где $A_1(r)$ и $B_1(y)$ - произвольные функции, зависящие каждая от одной переменной, (обычно r - радиальная координата, а $y = \cos\theta$). Эти метрики имеют два коммутирующих вектора Киллинга $K_{(t)} = \partial_t$ и $K_{(\varphi)} = \partial_\varphi$, а также нетривиальный тензор Киллинга второго ранга [2], удовлетворяющий уравнению $\nabla_{(\alpha} K_{\mu\nu)} = 0$:

$$K^{\mu\nu} = C \begin{pmatrix} A_1(r)B_3(y) + B_1(y)A_3(r) & 0 & 0 & A_1(r)B_4(y) + B_1(y)A_4(r) \\ 0 & -A_2(r)B_1(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2(y)A_1(r) & 0 \\ A_1(r)B_4(y) + B_1(y)A_4(r) & 0 & 0 & A_1(r)B_5(y) + B_1(y)A_5(r) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

В общем случае метрика (1.1) принадлежит к типу I по Петрову, а тензор Киллинга не имеет простого вида в проекциях Ньюмена-Пенроуза [4]. Однако если наложить дополнительные условия

$$A_4(r) = \sqrt{A_3(r)}\sqrt{A_5(r)}, \qquad B_4(y) = \sqrt{B_3(y)}\sqrt{B_5(y)}, \tag{1.3}$$

получим все еще широкий подкласс, который допускает введение простой изотропной тетрады

$$\begin{aligned} l^\mu &= \sqrt{C/2}\left(\sqrt{A_3(r)}, -\sqrt{A_2(r)}, 0, \sqrt{A_5(r)}\right), \qquad n^\mu = \sqrt{C/2}\left(\sqrt{A_3(r)}, \sqrt{A_2(r)}, 0, \sqrt{A_5(r)}\right), \\ m^\mu &= \sqrt{C/2}\left(\sqrt{B_3(y)}, 0, -i\sqrt{B_2(y)}, \sqrt{B_5(y)}\right), \qquad \bar{m}^\mu = \sqrt{C/2}\left(\sqrt{B_3(y)}, 0, i\sqrt{B_2(y)}, \sqrt{B_5(y)}\right), \end{aligned} \tag{1.4}$$

и имеет свойства, сближающие его с метриками типа D. Вычисление тетрадных проекций тензора Вейля и спиновых коэффициентов приводит к следующему интересному результату

$$\Psi_1 = \Psi_3, \qquad \Psi_0 = \Psi_4 = 0; \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} &\epsilon = \gamma, \quad \tau = \pi, \quad \alpha = \beta, \quad \mu = \rho; \\ &\kappa = \lambda = \sigma = \nu = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

показывающему, что векторные поля l^μ, n^μ определяют главные изотропные направления, геодезические и бессдвиговые. Аналогичные условия, в силу теоремы Гольдберга-Сакса [5], гарантируют принадлежность пространства типу D при выполнении дополнительных условий на девиатор тензора Риччи $\Phi_{00} = \Phi_{01} = \Phi_{02} = 0$. В рассматриваемом случае последние не обязательно выполняются, поэтому метрика может относиться либо к типу D, либо к типу I. В частности, в супергравитации $N = 4$, черные дыры имеют тип I. При этом в случае метрик (1.1) при выполнении условий (1.3) не требуется равенство нулю Φ_{00} для того, чтобы решение было пространством типа D. Заметим, что общий тип II исключается. Тензор Киллинга (1.2) в обоих случаях будет иметь только две независимые тетрадные проекции

$$K_{ln} = B_1(y), \qquad K_{m\bar{m}} = A_1(r). \tag{1.7}$$

Для разделения переменных в уравнении Клейна-Гордона необходима коммутация оператора $\hat{K} = K^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$ с оператором Даламбера $\Box = g_{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. Вычисление приводит к результату

$$[\Box, \hat{K}]\,\phi = \frac{4}{3}\nabla_\alpha(K_\sigma{}^{[\alpha}R^{\beta]\sigma})\nabla_\beta\,\phi = 0. \tag{1.8}$$

С учетом (1.7) получаем:

$$\begin{aligned} K_\sigma{}^{[\alpha}R^{\beta]\sigma} = 2(K_{ln} + K_{m\bar{m}})\big[&n^\beta(\bar{m}^\alpha\Phi_{01} + m^\alpha\Phi_{10}) - n^\alpha(\bar{m}^\beta\Phi_{01} + m^\beta\Phi_{10}) + \\ &+ (l^\beta\bar{m}^\alpha - l^\alpha\bar{m}^\beta)\Phi_{12} + (l^\beta m^\alpha - l^\alpha m^\beta)\Phi_{21}\big] \equiv 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Таким образом, для выполнения условия (1.8) в случае пространств типа I необходимо равенство нулю $\Phi_{01} = \Phi_{12} = 0$.

2. Теория Эйнштейна-Максвелла с дилатоном и аксионом

В качестве примера рассмотрим семипараметрическое вращающееся решение теории Эйнштейна-Максвелла с дилатоном, аксионом и параметром НУТ, относящееся к $N = 4$ супергравитации [6]. В случае нулевых магнитного и НУТ-зарядов координатным перобразованием $r \to r + r_-$ оно сводится к известному решению Сена [7], которое часто рассматривают как деформированную метрику Керра при моделировании отклонений от стандартной теории черных дыр

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}(dt - wd\varphi)^2 - \Sigma\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 + \frac{\Delta\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}d\varphi^2\right), \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &\Delta = (r - r_-)(r - 2M) + a^2 - (N - N_-)^2, \qquad \Sigma = r(r - r_-) + (a\cos\theta + N)^2 - N_-^2, \\ &w = \frac{2}{a^2\sin^2\theta - \Delta}\left[N\Delta\cos\theta + a\sin^2\theta(M(r - r_-) + N(N - N_-))\right], \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$r_- = \frac{M|Q - iP|^2}{|M + iN|^2}, \qquad N_- = \frac{N|Q - iP|^2}{2|M + iN|^2}. \tag{2.3}$$

Решение определяется массой M, параметром НУТ N, электрическим Q и магнитным зарядом P. Связь с формой БФ (1.1) следующая

$$\begin{aligned} &A_1(r) = r(r - r_-), && B_1(y) = (a\,y + N)^2 - N_-^2, \\ &A_2(r) = \Delta, && B_2(y) = (1 - y^2), \\ &A_3(r) = \frac{(r(r - r_-) + a^2 + N^2 - N_-^2)^2}{\Delta}, && B_3(y) = \frac{\left[a(1 - y^2) - 2Ny\right]^2}{1 - y^2}, \\ &A_4(r) = a\frac{r(r - r_-) + a^2 + N^2 - N_-^2)^2}{\Delta}, && B_4(y) = \frac{a(1 - y^2) - 2Ny}{1 - y^2}, \\ &A_5(r) = \frac{a^2}{\Delta}, && B_5(y) = \frac{1}{(1 - y^2)}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $y = \cos\theta$. Из вида (2.4) следуют условие (1.3) и выражения для компонент тензора Киллинга

$$K_{ln} = (a\,\cos\theta + N)^2 - N_-^2, \qquad K_{m\bar{m}} = r(r - r_-). \tag{2.5}$$

Метрика является невакуумным решением типа I, о чем свидетельствует набор ненулевых скаляров Вейля и скаляров кривизны

$$\Psi_0 = \Psi_4 = 0, \qquad \Psi_1 = \Psi_3 = \frac{a(4N_-^2 + r_-^2)\sin\theta\sqrt{\Delta}}{8\Sigma^3},$$

$$
\begin{aligned}
12\Sigma\Psi_2 = &- 12(M+iN)(r-i(a\cos\theta+N))^3 - 24(i-r_-)NN_-(r-i(N+a\cos\theta))^2+\\
&+ r_-^3(8M-r) + 8NN_-^3 - 4N_-^4 - 6ar_-\cos\theta(5M+3iN)(a\cos\theta+2N+2ir)+\\
&+ 2r_-\left(M\left(15(r-\mathrm{iN})^2+7N_-^2\right)+18N^2r-9iN^3-3iN\left(N_-^2-3r^2\right)-2N_-^2r\right)+\\
&+ 4N_-^2\left(2a^2+a\cos\theta(3i(M-iN)-a\cos\theta)-5Mr+2N^2+3iN(M+r)\right)+\\
&+ 4N_-^2r^2 + r_-^2\left(2a^2+24iMN-7N^2+8NN_--N_-^2\right)+\\
&+ r_-^2\left(a\cos\theta(6i(4M+iN)-a\cos\theta)+26Mr-6iNr+r^2\right),
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
\Phi_{00} = \Phi_{22} = \frac{\left(4N_-^2+r_-^2\right)\Delta}{8\Sigma^3}, \qquad \Phi_{02} = \overline{\Phi_{20}} = -\frac{a^2\left(4N_-^2+r_-^2\right)\sin^2\theta}{8\Sigma^3},
$$

$$
\begin{aligned}
16\Sigma^3\Phi_{11} = &\, a^2\cos^2(\theta)\left(8Mr_-+16NN_--4N_-^2-r_-^2\right)+16MN_-^2r_--24MN_-^2r+\\
&+ 8aN\cos\theta\left(2Mr_-+4NN_--4N_-^2-r_-^2\right)+N^2\left(8Mr_--28N_-^2-7r_-^2\right)+\\
&+ 8Mr_-r^2-14Mr_-^2r+16N^3N_-+2NN_-\left(4N_-^2+3r_-^2+8r^2-8r_-r\right)+\\
&+ N_-^2r_-^2-4N_-^2r^2+4N_-^2r_-r+4N_-^4-r_-^2r^2+r_-^3r+6Mr_-^3,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
\Lambda = \frac{1}{24R} = -\frac{\left(4N_-^2+r_-^2\right)\left(a^2\sin^2\theta+\Delta\right)}{48\Sigma^3}.
\tag{2.8}
$$

Нетрудно убедиться в том, что условие квантовой (1.8) сепарабильности выполнено.

Авторы благодарят Институт физики КФУ за поддержку, а также К.В. Кобялко и И.А. Богуша за обсуждение работы.

Список литературы

1. Papadopoulos G., Pérez-Bolaños E. Symmetries, spinning particles and the TCFH of D=4,5 minimal supergravities. *Phys. Lett. B*, 2021, vol. 819, p. 136441.

2. Benenti S., Francaviglia M. Remarks on certain separability structures and their applications to general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 1979, vol. 10, pp. 79–92.

3. Papadopoulos G., Kokkotas K. Preserving Kerr symmetries in deformed spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 2018, vol. 35, no. 18, p. 185014.

4. Newman E., Penrose R. An Approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys*, 1962, vol. 3, p. 566.

5. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge, Cambridge University Press, 2003.

6. Galtsov D., Kechkin O. Ehlers-Harrison type transformations in dilaton - axion gravity. *Phys. Rev. D*, 1994, vol. 50, pp. 7394–7399.

7. Sen A. Rotating charged black hole solution in heterotic string theory. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, vol. 69, pp. 1006–1009.

References

1. Papadopoulos G., Pérez-Bolaños E. Symmetries, spinning particles and the TCFH of D=4,5 minimal supergravities. *Phys. Lett. B*, 2021, vol. 819, p. 136441.

2. Benenti S., Francaviglia M. Remarks on certain separability structures and their applications to general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 1979, vol. 10, pp. 79–92.

3. Papadopoulos G., Kokkotas K. Preserving Kerr symmetries in deformed spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 2018, vol. 35, no. 18, p. 185014.

4. Newman E., Penrose R. An Approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys*, 1962, vol. 3, p. 566.

5. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge, Cambridge University Press, 2003.

6. Galtsov D., Kechkin O. Ehlers-Harrison type transformations in dilaton - axion gravity. *Phys. Rev. D*, 1994, vol. 50, pp. 7394–7399.

7. Sen A. Rotating charged black hole solution in heterotic string theory. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, vol. 69, pp. 1006–1009.

Авторы

Гальцов Дмитрий Владимирович, д. ф.-м. н., профессор физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Ленинские Горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия.
E-mail: galtsov@phys.msu.ru

Кулицкий Александр Валерьевич, аспирант, м.н.с. физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Ленинские Горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия.
E-mail: av.kulitsky@yandex.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Гальцов Д. В., Кулицкий А. В. Разделение переменных по Бененти-Франкавилья и типы по Петрову. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2023. № 1. С. 31–35.

Authors

Gal'tsov Dmitry Vladimirovich, Doctor of Sciences, Professor of the Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: galtsov@phys.msu.ru

Kulitskii Aleksandr Valerievich, PhD student, junior researcher of the Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: av.kulitsky@yandex.ru

Please cite this article in English as:
Gal'tsov D. V., Kulitskii A. V. Benenti-Francaviglia separability and Petrov types. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 31–35.