УДК 530.122, 524.000

ВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ И ГРАВИТАЦИОННЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕЛОКАЛЬНОЙ НЬЮТОНОВСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ*

Урсулов А. В.[a,1], Юдина Е. С.[a,2]

[a] Уральский федеральный университет имени первого президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, 620002, Россия

В работе в нерелятивистском пределе рассматривается распространение малых возмущений в гравитирующих средах с пространственной дисперсией, обусловленной предполагаемой нелокальностью гравитационного поля. Показано, что в принятой модели при определённых условиях одновременный учёт космологической постоянной и указанной пространственной дисперсии позволяет сделать корректной математическую постановку задачи Джинса о гравитационной неустойчивости неподвижной однородной сплошной среды. Получено интегро-дифференциальное уравнение, описывающее малые возмущения плотности рассматриваемой системы. Путем моделирования ядра интегрального слагаемого данное уравнение сведено к дифференциальному уравнению. Получен закон дисперсии рассматриваемых возмущений. Исследованы гравитационные неустойчивости, возникающие в таких системах. Отмечено, что на временах отвечающих минимуму дисперсионных кривых, нарастание плотности в результате гравитационной неустойчивости развивается наиболее медленно.

Ключевые слова: нелокальная теория гравитации, тёмная материя, тёмная энергия, пространственная дисперсия, гравитационная неустойчивость.

WAVE PERTURBATIONS AND GRAVITATIONAL INSTABILITIES IN THE NONLOCAL NEWTONIAN GRAVITY

Ursulov A. V.[a,1], Yudina E. S.[a,2]

[a] Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsyn, Ekaterinburg, 620002, Russia

In this paper, the propagation of small perturbations in gravitational media with spatial dispersion due to the assumed nonlocality of the gravitational field is considered in the non-relativistic limit. It is shown that in the accepted model, under certain conditions, simultaneous consideration of the cosmological constant and the specified spatial dispersion makes it possible to correctly formulate the Jeans problem of gravitational instability of a stationary homogeneous continuous medium. An integro-differential equation describing small density perturbations of the system under consideration is obtained. By modeling the kernel of the integral term, this equation is reduced to a differential equation. The law of dispersion of the perturbations under consideration is obtained. Gravitational instabilities arising in such systems are investigated. It is noted that at times corresponding to the minimum of dispersion curves, the increase in density as a result of gravitational instability develops most slowly.

Keywords: nonlocal gravity, dark matter, dark energy, spatial dispersion, gravitational instability.

PACS: 04.50.Kd, 97.60.-s
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2023.1.108–112

---

*Работа выполнена при поддержке проекта FEUZ-2023-0017 Министерства Образования и Науки Российской Федерации.

[1]E-mail: AV.Ursulov@urfu.ru
[2]E-mail: e.yudina994@gmail.com

Введение

Открытие тёмной материи и тёмной энергии стимулировали исследования, выходящие за пределы Общей теории относительности и имеющие своей конечной целью построение "новой физики" и "новой геометрии". Одним из подходов к созданию новых теорий является попытка сделать гравитацию нелокальной. Вариант такой нелокальной теории гравитации был предложен в работах [1–3]. Особенностью предложенного в указанных работах подхода является то, что нелокальность гравитационного поля проявляется как пространственная дисперсия части барионного вещества, позволяя отождествить последнее с "тёмной материей". Таким образом, в предлагаемом подходе свойства тёмной материи обусловлены предполагаемой нелокальностью гравитационного взаимодействия, то есть, в конечном итоге, геометрией пространства-времени. Указанная интерпретация тёмной материи позволяет по-новому взглянуть на известные астрофизические и космологические задачи [1–3].

В данной работе, в рамках указанного выше подхода, в ньютоновском приближении анализируются особенности распространения плоских волновых возмущений и гравитационная неустойчивость в неподвижных однородных изотропных сплошных средах, состоящих из барионного вещества, темной материи и темной энергии.

1. Возмущения и неустойчивости в гравитирующих сплошных средах с пространственной дисперсией

Учёт предполагаемой нелокальности гравитационного поля в нерелятивистском приближении приводит к появлению в уравнении Пуассона дополнительного интегрального слагаемого, которое можно интерпретировать как вклад, обусловленный наличием тёмной материи [1–3]. В результате, полная система уравнений, описывающая движение нерелятивистской сплошной среды, принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{\nabla} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}\varphi, \\ \Delta\varphi = 4\pi G(\rho + \rho_D - \rho_\Lambda), \end{cases} \tag{1.1}$$

где ρ и $\vec{v}$ - плотность и скорость барионной материи, $P = P(\rho)$ - давление, φ - напряжённость гравитационного поля, а

$$\rho_D(\vec{r}) = \int K(\vec{r} - \vec{r'})\rho(\vec{r'})d\vec{r'} \tag{1.2}$$

есть плотность тёмной материи, которая зависит от плотности барионной материи посредством интеграла по всему объёму, занимаемому этой материей. Благодаря ядру $K(\vec{r} - \vec{r'})$ связь между ρ_D и ρ является нелокальной, что означает наличие пространственной дисперсии в системе. По сравнению с работой [1] здесь дополнительно учтена плотность, обусловленная космологической постоянной Λ (плотность "тёмной энергии") $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G}$ [4, 5].

Преобразуем систему (1.1), выделив невозмущенное решение (индекс 0) и соответствующее малое возмущение (индекс 1) в виде: $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = \varphi_1$, $P = P_0 + P_1$, $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{v_1} = \vec{v_1}$ ($\rho_0 = const$, $P_0 = const$), а на ядро K наложим условие:

$$\int K(\vec{r})d\vec{r} = \frac{\rho_\Lambda - \rho_0}{\rho_0} > 0. \tag{1.3}$$

Условие (1.3) позволяет решить известную проблему ненулевой начальной плотности в задаче о гравитационной неустойчивости неподвижной однородной сплошной среды [4]. Отметим, что плотность ρ_Λ больше чем на 3 порядка превышает среднюю плотность современной Вселенной [4]. С учетом (1.3) после линеаризации система (1.1) может быть сведена к одному интегро-дифференциальному уравнению описывающему возмущения плотности ρ_1, распространяющиеся вдоль оси x:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + 4\pi\rho_0 G\Big[\rho_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-x')\rho_1(x')dx'\Big], \tag{1.4}$$

где v_s - скорость звука.

Вид ядра K уравнения (1.4) достаточно сложен, однако его можно аппроксимировать функцией, которая качественно сохраняет основные свойства ядра, но позволяет упростить уравнение. В общем случае ядро $K(x)$ обладает следующими свойствами: 1) в силу пространственной однородности среды зависит только от разности координат: $K(x-x')$; 2) в силу изотропии среды является чётной функцией $K(-x) = K(x)$; 3) спадает на бесконечности $K(\pm\infty) = 0$; 4) нормировано на единицу $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx = 1$. Всем перечисленным выше условиям удовлетворяет функция [6]:

$$K(x-x') = -\alpha\delta(x-x') + (1+\alpha)\gamma_0(x-x'), \tag{1.5}$$

где $\gamma_0(x) = \frac{q}{2}exp(-q|x|)$ - является собственной функцией оператора $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q^2\right)$, q - волновое число, определяющее характерный размер пространственной дисперсии, α - параметр, характеризующий величину нелокальности.

Подставляя функцию $K(x-x')$ (1.5) в уравнение (1.4) и действуя на получившееся уравнение оператором $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q^2\right)$, находим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}\right) - q^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^4 \rho_1}{\partial x^4} - q^2 v_s^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + 4\pi\rho_0 G(1-\alpha)\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - 8\pi\rho_0 G q^2 \rho_1. \tag{1.6}$$

Выполнив в (1.6) преобразование Фурье, получим закон дисперсии, который удобно записать в безразмерном виде:

$$\Omega^2 = \kappa^2 - \frac{(1-\alpha)\kappa^2 + 2\zeta^2}{\kappa^2 + \zeta^2}, \tag{1.7}$$

где $\Omega = \frac{\omega}{\omega_J}$ – безразмерная частота, $\kappa = \frac{k}{k_J}$ - безразмерное волновое число, $\zeta = \frac{q}{k_J}$ – безразмерный параметр, характеризующий относительный размер пространственной дисперсии, а k_J и ω_J – волновое число и частота Джинса: $k_J = \sqrt{\frac{4\pi G}{v_s^2}}$ и $\omega_J = v_s k_J = \sqrt{4\pi G v_s}$.

На Рис.1 приведен типичный график зависимости $\Omega^2(\kappa^2)$.

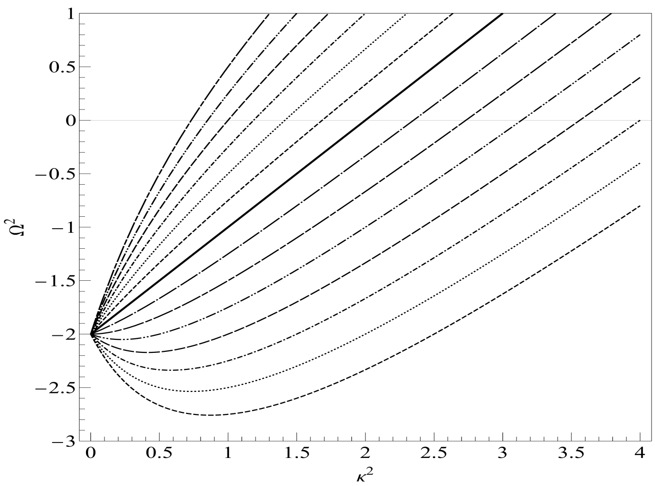

Рис. 1. Зависимость $\Omega^2(\kappa^2)$ при $\zeta^2 = 1$. Случай Джинса [4] – сплошная прямая линия на графике, соответствует значению $\alpha = -1$. Выше лежат кривые, отвечающие значениям $\alpha > -1$, а ниже – кривые, отвечающие значениям $\alpha < -1$. При $\alpha \leq -(1+\zeta^2)$ у изображенных на графике кривых появляются минимумы.

Функция (1.7) обращается в 0 в точках $\kappa_0^2=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\zeta^2+\alpha-1\right)^2+8\zeta^2}-\left(\zeta^2+\alpha-1\right)\right]$, которые существуют при любых значениях α и ζ. При $\kappa^2<\kappa_0^2$ значения Ω^2 отрицательны: $\Omega^2<0$, что соответствует гравитационной неустойчивости - возмущение плотности ρ_1 при таких значениях волнового вектора нарастает. Наоборот, при $\kappa^2>\kappa_0^2$ значения Ω^2 положительны: $\Omega^2>0$, что отвечает случаю распространения звуковых волн в системе. Кроме того, функция (1.7) имеет минимум в точке $\kappa_{min}^2=-\zeta^2+\sqrt{-(\alpha+1)}\zeta$, который, с учётом требования $\kappa_{min}^2\geq 0$, реализуется при $\alpha\leq-(1+\zeta^2)$. Значение функции $\Omega^2\left(\kappa^2\right)$ в минимуме равно $\Omega^2\left(\kappa_{min}^2\right)=-\left(\zeta+\sqrt{-(\alpha+1)}\right)^2-2$. Величина $\left|\Omega^2\left(\kappa_{min}^2\right)\right|$ возрастает с увеличением ζ и уменьшением α. Максимальное значение $\Omega^2\left(\kappa_{min}^2\right)$ достигается при $\zeta=0$ и $\alpha=-1$ и совпадает со значением функции $\Omega^2\left(\kappa^2\right)$ в нуле $\Omega^2(0)=-2$. Минимумам дисперсионных кривых отвечают характерные времена $\tau_{max}=\frac{1}{\sqrt{\left|\Omega^2\left(\kappa_{min}^2\right)\right|}}$, которые определяют наиболее медленное нарастание плотности, обусловленное гравитационной неустойчивостью.

Заключение

Основные выводы данной работы состоят в следующем. 1. Одновременный учёт пространственной дисперсии, обусловленной предполагаемой нелокальностью гравитационного поля (тёмной материи) и тёмной энергии, обусловленной учетом космологической постоянной, в нерелятивистском пределе позволяет при определённых условиях сделать корректной математическую постановку задачи о гравитационной неустойчивости неподвижной однородной сплошной среды. 2. Интегро-дифференциальное уравнение, описывающее плоские линейные возмущения плотности в рассматриваемой системе, может быть сведено к дифференциальному уравнению четвертого порядка путём моделирования ядра интегрального члена. Последнее позволяет получить закон дисперсии указанных возмущений в явном виде. 3. Исследование закона дисперсии рассматриваемых возмущений показывает, что в рассматриваемых системах на временах, отвечающих минимуму дисперсионных кривых, нарастание плотности в результате гравитационной неустойчивости развивается наиболее медленно.

Список литературы

1. Mashhoon B. Nonlocal Gravity: The General Linear Approximation. *Physical Review D*, 2014, vol. 90, no. 12. https://arxiv.org/abs/1409.4472v2 (Дата обращения 13.11.2022)

2. Mashhoon B. Nonlocal General Relativity. *Galaxies*, 2015, vol. 3 (1), no. 17. https://arxiv.org/abs/1411.5411v2 (Дата обращения 13.11.2022)

3. Chicone C., Mashhoon B. Nonlocal Newtonian Cosmology. *Journal of Mathematical Physics*, 2016, vol. 57, no. 7. https://arxiv.org/abs/1510.07316v2 (Дата обращения 13.11.2022)

4. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. *Строение и эволюция вселенной.* М.: Наука, 1975. 736 с.

5. Алексеев С.О., Памятных Е.А., Урсулов А.В., Третьякова Д.А., Латош Б.Н. *Общая теория относительности. Введение. Современное развитие и приложения.* М.: URSS, 2022. 400 с.

6. Ursulov A.V. Dispersion laws, nonlinear solitary waves, and modeling of kernels of integro-differential equations describing perturbations in hydrodynamic-type media with strong spatial sispersion. *Acoustical Physics*, 2020, vol. 66, no. 4, pp. 375–383.

References

1. Mashhoon B. Nonlocal Gravity: The General Linear Approximation. *Physical Review D*, 2014, vol. 90, no. 12. Available at: https://arxiv.org/abs/1409.4472v2 (accessed 13.11.2022)

2. Mashhoon B. Nonlocal General Relativity. *Galaxies*, 2015, vol. 3 (1), no. 17. Available at: https://arxiv.org/abs/1411.5411v2 (accessed 13.11.2022)

3. Chicone C., Mashhoon B. Nonlocal Newtonian Cosmology. *Journal of Mathematical Physics*, 2016, vol. 57, no. 7. Available at: `https://arxiv.org/abs/1510.07316v2` (accessed 13.11.2022)

4. Zeldovich Ja.B., Novikov I.D. *The structure and evolution of the Universe.* Moscow, Nauka Publ., 1975. 736 p. (in Russian)

5. Alekseev S.O., Pamyatnykh E.A., Ursulov A.V., Tretyakova D.A., Latosh B.N. *General Theory of Relativity: An Introduction. Modern development and applications.* Moscow, URSS, 2022. 400 p. (in Russian)

6. Ursulov A.V. Dispersion laws, nonlinear solitary waves, and modeling of kernels of integro-differential equations describing perturbations in hydrodynamic-type media with strong spatial sispersion. *Acoustical Physics*, 2020, vol. 66, no. 4, pp. 375–383.

Авторы

Урсулов Андрей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Уральский федеральный университет имени первого президента России Б. Н. Ельцина, ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия.
E-mail: AV.Ursulov@urfu.ru

Юдина Елена Сергеевна, студент, Уральский федеральный университет имени первого президента России Б. Н. Ельцина, ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия.
E-mail: e.yudina994@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Урсулов А. В., Юдина Е. С. Волновые возмущения и гравитационные неустойчивости в нелокальной ньютоновской теории гравитации. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2023. № 1. С. 108–112.

Authors

Ursulov Andrey Vladimirovich, Ph.D., Associate Professor, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N.Yeltsin, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: AV.Ursulov@urfu.ru

Yudina Elena Sergeevna, student, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: e.yudina994@gmail.com

Please cite this article in English as:
Ursulov A. V., Yudina E. S. Wave perturbations and gravitational instabilities in the Nonlocal Newtonian Gravity. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 1, pp. 108–112.