УДК 514.763

ПРОЕКТИВНЫЕ И АФФИННЫЕ ДВИЖЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПЯТИМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ $h_{32,3}$

Аминова А. В.[a,1], Хакимов Д. Р.[a,2]

[a] Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Находятся симметрии уравнений геодезических в форме алгебр Ли бесконечно малых проективных и аффинных преобразований специальных 5-мерных псевдоримановых пространств, а именно h-пространств $H_{32,3}$ типа $\{32\}$.

Ключевые слова: проективное движение, аффинное движение, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство $H_{32,3}$ типа $\{32\}$, уравнения Киллинга, проективная алгебра Ли; .

PROJECTIVE AND AFFINE MOVEMENTS OF SPECIAL FIVE-DIMENSIONAL SPACES $h_{32,3}$

Aminova A. V.[a,1], Khakimov D. R.[a,2]

[a] Kazan State University, Kazan, 420008, Russia.

We find symmetries of geodesic equations in the form of Lie algebras of infinitesimal projective and affine transformations of special 5-dimensional pseudo-Riemannian spaces, namely h-spaces $H_{32,3}$ of type $\{32\}$.

Keywords: projective motion, affine motion, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space $H_{32,3}$ of type $\{32\}$, Killing equations, projective Lie algebra;.

PACS: 11.10.Kk, 04.50.+h, 04.50.-h, 02.40-k, 02.20.Sv
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.12-17

Введение

Векторное поле X на n-мерном псевдоримановом многообразии (M^n, g) с проективной структурой П называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением*, если локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная этим полем в окрестности каждой точки $p \in M^n$ состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры П [1].

Бесконечно малое проективное преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ является проективным движением в псевдоримановом многообразии (M^n, g), если и только если выполнены условия [1, 7]:

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij} \tag{1}$$

(обобщенное уравнение Киллинга) и

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i} \tag{2}$$

(уравнение Эйзенхарта), где запятая означает ковариантное дифференцирование в (M^n, g), а φ — скаляр, называемый определяющей функцией проективного движения.

[1]E-mail: asya.aminova@kpfu.ru
[2]E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

В работе [8] с помощью метода косонормального репера А. В. Аминовой определены пятимерные h-пространства H_{32} типа $\{32\}$ и установлены необходимые и достаточные условия существования проективного движения типа $\{32\}$. Показано, что в канонической карте (x, U) метрика g h-пространства H_{32} имеет вид

$$g = e_1(f_2 - f_1)^2 \left(4Adx^1dx^3 + \left(dx^2\right)^2 + 2\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{4A}{f_2 - f_1}\right) dx^2dx^3\right) +$$

$$e_1(f_2 - f_1)^2 \left(\varepsilon_1 \left(x^1\right)^2 - \frac{8A\varepsilon_1 x^1}{f_2 - f_1} + \frac{4A^2}{(f_2 - f_1)^2}\right) \left(dx^3\right)^2 + e_2(f_1 - f_2)^3 \left(2Bdx^4dx^5 - \frac{3B^2}{f_1 - f_2}\left(dx^5\right)^2\right), \tag{3}$$

где $f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)c_1$, $f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1 - \varepsilon_2)c_2$, $c_1, c_2 - const$, $A = \varepsilon_1\left(x^2 + \tau(x^3)\right) + 1 - \varepsilon_1$, $B = \varepsilon_2\left(x^4 + \mu(x^5)\right) + 1 - \varepsilon_2$, ε_1, ε_2 принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2 = \pm 1$, τ – функция x^3, μ – функция x^5.

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ h-пространство H_{32} обозначается символом $H_{32,1}$, при $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$ — символом $H_{32,2}$, а при $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$ — символом $H_{32,3}$. Случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ приводит к плоской метрике. Таким образом, всякое неплоское h-пространство H_{32} является либо $H_{32,1}$, либо $H_{32,2}$, либо, наконец, $H_{32,3}$.

Вычислив связность и кривизну метрики (3), можно убедиться в справедливости утверждения: h-пространство $H_{32,3}$ является пространством постоянной кривизны K, если и только если выполняется условие $\dfrac{d\mu}{dx^5} = 0$, при этом $K = 0$, т. е. всякое h-пространство $H_{32,3}$ постоянной кривизны является плоским.

Для получения максимальной проективной алгебры Ли в h-пространстве H_{32} необходимо найти общее решение уравнения Эйзенхарта в H_{32}. Это было сделано в статье [9], где установлены необходимые и достаточные условия для существования негомотетического проективного движения в пространстве H_{32}. Показано, что если h-пространство типа $\{32\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру H_{r-1}. Аффинная подалгебра сводится к гомотетиям или изометриям.

1. Интегрирование обобщенных уравнений Киллинга в h-пространстве $H_{32,3}$ непостоянной кривизны

Интегрируя обобщенные уравнения Киллинга (1) в пространствах $H_{32,3}$ непостоянной кривизны, получим следующий результат: если h-пространство $H_{32,3} \equiv (M, g)$ непостоянной кривизны допускает негомотетическое проективное движение X, то вокруг каждой точки $p \in M$ существует каноническая карта (x, U), в которой метрика $g|_U$ этого пространства и проективное движение $X|_U = \xi^i \partial_i$ определяются формулой (3) и условиями:

$$\begin{gathered}\xi^1 = (a_2 - 2a_3)x_1 - a_1x^2 + a_6, \quad \xi^2 = (a_2 - a_3)x^2 + a_5, \quad \xi^3 = a_2x^3 + a_4, \\ \xi^4 = (-a_1x^5 + a_2 - 2a_3)(x^4 + \mu(x^5)) - x^5(a_1x^5 + a_3)\frac{d\mu}{dx^5}, \quad \xi^5 = a_1(x^5)^2 + a_3x^5, \\ x^5(a_1x^5 + a_3)\frac{d^2\mu}{{dx^5}^2} + [3(a_1x^5 + a_3) - a_2]\frac{d\mu}{dx^5} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

где $a_1, \ldots, a_6$ — постоянные интегрирования, μ – функция x^5.

2. Алгебры Ли проективных движений в h-пространстве $H_{32,3}$ непостоянной кривизны

Для нахождения негомотетических проективных алгебр Ли, действующих в h-пространстве $H_{32,3}$ непостоянной кривизны, воспользуемся леммой:

Лемма (Аминова [2], с. 134). *Для того чтобы V^n допускало r-мерную максимальную алгебру Ли P_r, необходимо и достаточно, чтобы ранг R системы Θ однородных линейных алгебраических уравнений относительно параметров a_i, образованной уравнениями*

$$\sum_{k=1}^{q} a_k T_k^{\alpha} = 0, \tag{5}$$

(здесь $a_1, \ldots, a_q$ – постоянные интегрирования, T_k^{α} зависят только от констант и функций, определяющих компоненты метрического тензора g_{ij}) и всеми их дифференциальными следствиями, равнялся $q - r$.

В нашем случае $q = 6$, а система (5) сводится к уравнению

$$x^5(a_1x^5 + a_3)\frac{d^2\mu}{dx^{5^2}} + [3(a_1x^5 + a_3) - a_2]\frac{d\mu}{dx^5} = 0, \tag{6}$$

которое запишем в виде

$$x^5ua_1 - a_2 + ua_3 + 0 \cdot a_4 + 0 \cdot a_5 + 0 \cdot a_6 = 0, \tag{7}$$

введя обозначение

$$u \equiv x^5\frac{\mu''}{\mu'} + 3$$

и приняв во внимание условие $\mu' \neq 0$ непостоянства кривизны.

Система Θ образуется уравнением (7) и его дифференциальными следствиями. Выпишем те строки матрицы этой системы, которые соответствуют уравнению (7) и его ближайшим дифференциальным следствиям:

$$\begin{pmatrix} x^5u & -1 & u & 0 & 0 & 0 \\ x^5u' + u & 0 & u' & 0 & 0 & 0 \\ x^5u'' + 2u' & 0 & u'' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Так как ранг матрицы (8) $3 \geq Rk \geq 1$, то в соответствии с леммой 1 размерности максимальной проективной алгебры Ли P_r в пространстве $H_{32,3}$ непостоянной кривизны $r \leq 5$.

В случае $Rk = 3$ система Θ имеет единственное решение $a_1 = a_2 = a_3$, и проективная алгебра сводится к изометриям, поэтому остаются два случая.

$P_5,\ Rk = 1$. Приравнивая нулю миноры второго порядка матрицы (8), получим $u = 0$ и, из (7), $a_2 = 0$, т. е. неизометрические гомотетии отсутствуют.

Интегрируя уравнение $u = 0$, найдем $\mu = (p/2)(x^5)^{-2} + q$, где $p \neq 0, q$ —постоянные. После замены $\overline{x}^4 = x^4 + q$, не меняющей вида метрики

$$g = e_1(x^5)^2\left(4dx^1dx^3 + \left(dx^2\right)^2\right) - 8e_1x^5dx^2dx^3 + 4e_1\left(dx^3\right)^2 - \tag{9}$$
$$e_2B(x^5)^2\left(2x^5dx^4dx^5 + 3B\left(dx^5\right)^2\right),$$

опустив черту, имеем

$$\mu = \frac{p}{2(x^5)^2} \qquad (p = \text{const} \neq 0). \tag{10}$$

$P_4,\ Rk = 2$. Решение системы Θ зависит от одной из переменных a_1, a_2, a_3. Полагая $a_1 \neq 0$ (иначе проективное движение сводится к гомотетиям) и $a_2 \equiv a_1t,\ a_3 \equiv a_1s$ в уравнении (6), после его интеграции и замены $\overline{x}^4 = x^4 + q$ получим

$$\mu = p(t-s+x^5)(x^5)^{t/s-2}(x^5+s)^{1-t/s} \qquad (p,t,s-\text{const}; p,s\neq 0). \tag{11}$$

К такому же результату придем, приравняв нулю миноры третьего порядка матрицы (8) и интегрируя уравнение $uu''=2u'^2$.

Если записать уравнения (4) в виде $\xi^i=\sum_{l=1} a_l A^i_l$ $(i=1,\dots,5)$, где a_l — свободные параметры из числа $a_1,\dots,a_6$, то $E_l=A^i_l\partial_i$ будут базисными генераторами соответствующей проективной алгебры Ли. В итоге приходим к следующему заключению.

Если 5-мерное h-пространство $H_{32,3}$ типа $\{32\}$ (9) непостоянной кривизны допускает негомотетическое проективное движение, то это пространство и действующая в нем максимальная негомотетическая проективная алгебра Ли P определяются приведенными ниже формулами, где $\underset{\text{п}}{E}$ — неаффинное проективное движение, $\underset{\text{г}}{E}$ — неизометрическая инфинитезимальная гомотетия, $\underset{\text{и}}{E}$ — инфинитезимальная изометрия.

I Функция μ имеет вид (10):

$$\mu=\frac{p}{2(x^5)^2} \qquad (p=\text{const}\neq 0).$$

Размерность проективной алгебры Ли $\dim P=5$. Алгебра P натянута на проективное векторное поле

$$\underset{\text{п}}{E}{}_1 = x^2\partial_1+\left(x^4x^5-\frac{p}{2x^5}\right)\partial_4-(x^5)^2\partial_5,$$

инфинитезимальную изометрию

$$\underset{\text{и}}{E}{}_2 = 2x^1\partial_1+x^2\partial_2+2x^4\partial_4-x^5\partial_5$$

и три трансляции $\underset{\text{и}}{E}{}_3=\partial_1$; $\underset{\text{и}}{E}{}_4=\partial_2$; $\underset{\text{и}}{E}{}_5=\partial_3$.

Структурные уравнения имеют вид:

$$[E_2,E_1]=E_1,\quad [E_3,E_2]=2E_3,\quad [E_4,E_1]=E_3,\quad [E_4,E_2]=E_4,$$

остальные коммутаторы равны нулю.

II. Функция μ задается равенством (11):

$$\mu = p(t-s+x^5)(x^5)^{t/s-2}(x^5+s)^{1-t/s} \qquad (p,t,s-\text{const}; p,s\neq 0).$$

Размерность проективной алгебры Ли $\dim P=4$. Базис в P состоит из (негомотетического) проективного движения

$$\underset{\text{п}}{E}{}_1 = \left((t-2s)x_1-x^2\right)\partial_1+(t-s)x^2\partial_2+tx^3\partial_3+$$

$$\left((t-2s-x^5)x^4-p(x^5)^{t/s-1}(x^5+s)^{2-t/s}\right)\partial_4+x^5(x^5+s)\partial_5,$$

и трех трансляций $\underset{\text{и}}{E}{}_2=\partial_1$; $\underset{\text{и}}{E}{}_3=\partial_2$; $\underset{\text{и}}{E}{}_4=\partial_3$.

Структура алгебры Ли P задается уравнениями

$$[E_2,E_1]=(t-2s)E_2,\quad [E_3,E_1]=(t-s)E_3,\quad [E_4,E_1]=tE_4,$$

остальные скобки Ли равны нулю.

Заключение

Рассмотрены инфинитезимальные проективные преобразования 5-мерных псевдоримановых многообразий (M^5,g) в форме h-пространств $H_{32,3}$ типа $\{32\}$ [8]. В итоге получена классификация h-пространств $H_{32,3}$ типа $\{32\}$ по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований .

Список литературы

1. Аминова А.В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. *Янус-К*, М., 2003.

2. Аминова А.В. Проективные симметрии гравитационных полей. *Изд-во Казан. ун-та*, Казань, 2018.

3. Аминова А. В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий. *УМН.* — 1995. — Т. 50, вып. 1. – С. 69–142.

4. Аминова А. В. О полях тяготения, допускающих группы проективных движений. *ДАН СССР.* – 1971. – Т. 197, № 4. – С. 807–809.

5. Аминова А. В. Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств. *Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР* – 1974. – Т. 6. – С. 295–316.

6. Аминова А. В. Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности. *Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР* – 1974. – Т. 6. – С. 317–346.

7. Эйзенхарт Л. П, *Риманова геометрия.* М.: Ин. лит., 1948. – 316 с.

8. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях 5-мерных пространств h-пространства типа {32}. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, № 4, С. 21—31 (2018).

9. Aminova A. V.,Khakimov D. R. On the properties of the projective Lie algebras of rigid h-spaces H_{32} of the type {32}. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, **162**, no. 2, Kazan University, Kazan, 2020, 111–119.

References

1. Aminova A.V. Transformations of Pseudo-Riemannian manifolds. *Yanus-K*, Moscow, 2003.

2. Aminova A.V. Projective symmetries of gravitational fields. *Kazan University Publishing House*, Kazan, 2018.

3. Aminova A. V. Lie algebras of infinitesimal projective transformations of Lorentz manifolds. *UMN.* - 1995. - V. 50, issue. 1. - P. 69–142.

4. Aminova A. V. On gravitational fields admitting groups of projective motions. *DAN SSSR.* - 1971. - V. 197, No. 4. - P. 807-809.

5. Aminova A. V. Projective group properties of some Riemannian spaces. *Tr. Geom. semin. VINITI AN USSR* – 1974. – T. 6. – pp. 295–316.

6. Aminova A. V. Groups of projective and affine motions in the spaces of the general theory of relativity. *Tr. Geom. semin. VINITI AN USSR* – 1974. – T. 6. – P. 317–346.

7. Eisenhart L. P., *Riemannian geometry.* M.: In. lit., 1948. – 316 p.

8. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of 5-dimensional spaces h-spaces of type {32}. *Space, Time and Fundamental Interactions*, No. 4, P. 21—31 (2018).

9. Aminova A.V., Khakimov D.R. On the properties of the projective Lie algebras of rigid h-spaces H_{32} of the type {32}. *Uchenye Zapiski Kazan skogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki.* – 2020. – Vol. 162, N 2. – P. 111–119. – (In Russian).

Авторы

Аминова Ася Васильевна, профессор, д.ф.-м.н., кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18, Россия
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович, доцент, к.ф.-м.н., кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18, Россия,
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Проективные и аффинные движения специальных пятимерных пространств $h_{32,3}$. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 1. С. 12—17.

Authors

Aminova Asya Vasilyevna, Kazan (Volga Region) Federal University, 18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Khakimov Dzhamoliddin Rakhmonovich, Kazan (Volga Region) Federal University, 18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Please cite this article in English as:
Aminova A. V., Khakimov D. R. Projective and affine movements of special five-dimensional spaces $h_{32,3}$. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 12–17.