UDC 530.12; 530.51

ОТКРЫТАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАК ОСЦИЛЛЯТОР С ВЯЗКОСТЬЮ

Баранов А. М.[a,1]

[a] ФГБОУ ВПО Красноярский государственный педагогический университет им.В.П.Астафьева (КГПУ), г. Красноярск, 660049, Россия

Сведение проблемы моделирование эволюции открытой космологической модели Вселенной к эквивалентной проблеме поведения линейного гармонического осциллятора с вязкостью продемонстрировано для четырехмерного конформно-плоского пространства-времени с метрикой в форме Фока. Соответствующая космологическая модель представляет собой точное решение уравнений Эйнштейна. Показано, что параметр, соответствующий коэффициенту вязкости, влияет на эволюцию этой модели. Поведение функции состояния показано графически в зависимости от параметров, входящих в модель. В свою очередь, функция состояния в каждый момент представляет собой уравнение состояния. На асимптотике полученная модель переходит в открытую космологическую модель Фридмана.

Keywords: открытая Вселенная, космологические модели, модель Фридмана, осциллятор, вязкость .

OPEN COSMOLOGICAL MODEL AS THE OSCILLATOR WITH VISCOSITY

Baranov A. M.[a,1]

[a] Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P.Astafyev, Krasnoyarsk, 60049, Russia

The reduction of a problem the evolution modeling of the open cosmological model of the Universe to an equivalent problem of behavior of the linear harmonic oscillator with viscosity is demonstrated for the four-dimensional conformally flat space-time with a metric in Fock's form. The corresponding cosmological model is the exact solution of the Einstein equations. It is shown that the parameter corresponding to coefficient of viscosity influences evolution of this model. The function of state behavior is graphically shown depending on parameters entering in model. In turn, function of state in each instant represents an equation of state. On the asymptotics such model becomes the open cosmological model Friedman.

Keywords: the open Universe, cosmological models, the Friedman model, oscillator, viscosity .

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.47-52

Введение

Подход к моделированию открытой Вселенной как задачи о «механическом» движении частицы под действием силового поля иллюстрируется в работах [1]- [3]. Другими словами, демонстрируется замена проблемы решения космологической задачи на решение «механической» задачи. В настоящей работе будет продолжен тот же подход, но с решением задачи для осциллятора с релеевским трением (вязкостью).

Исходный вид метрики запишем как метрику, конформную метрике Минковского (см. [4])

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru

$$ds^2 = \exp(2\sigma) \cdot \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

с конформным множителем $\exp(2\sigma)$, являющимся функцией переменной S, квадрат которой равен $S^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - r^2$; t –временная переменная; квадрат пространственной переменной r равен $r^2 = \delta_{ij} x^i x^j$ с метрическим тензором евклидового 3-пространства $\delta_{ij} = diag(1,1,1)$, x^i – декартовы пространственные координаты; индексы i, j пробегают значения $1, 2, 3$; функция $\sigma = \sigma(S)$; $\eta_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$ – метрической тензор Минковского; скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная равны единице, а эйнштейновская гравитационная постоянная равна здесь $\varkappa = 8\pi$.

Уравнения Эйнштейна используются в следующей записи

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{2}$$

с тензором энергии-импульса (ТЭИ) в приближении идеальной паскалевой жидкости

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p) \cdot u_\mu u_\nu - p \cdot g_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где $G_{\mu\nu}$– тензор Эйнштейна; $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи; R – скалярная кривизна; ε – плотность энергии; p – давление; 4-скорость $u_\mu = \exp(\sigma)\, S_{,\mu}$; $u_\mu u^\mu = 1$.

Вводя 3-проектор $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ на 3-пространство, который одновременно есть и метрический 3-тензор, ортогональный 4-скорости ($b_{\mu\nu} u^\nu = 0$), можно спроектировать гравитационные уравнения (2) на временноподобную мировую линию и пространственноподобную площадку (то есть расщепить уравнения) и в результате получим систему уравнений (после проведения замены $\sigma(S) = 2 \ln y(S)$) в виде

$$12 \, \frac{dy}{dS} \left(\frac{dy}{dS} + \frac{1}{S} y\right) = \varkappa\varepsilon \cdot y^6; \tag{4}$$

$$4 \left(\frac{d^2 y}{dS^2} + \frac{2}{S} \frac{dy}{dS}\right) = -\varkappa p \cdot y^5 \tag{5}$$

Далее при выборе новой переменной $x = \dfrac{1}{S}$ уравнение (4) перепишется как

$$12 \, x^4 \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right) = \kappa\varepsilon \cdot y^6. \tag{6}$$

Уравнение (6) представим в записи, аналогичной второму закону Ньютона для частицы единичной массы,

$$F(x, y, p) = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\varkappa p \, \frac{y^5}{4x^4}, \tag{7}$$

где F – аналог «механической силы».

Такая запись одного из уравнений тяготения позволяет использовать различные потенциальные «механические силы» и заменить решение космологической проблемы на «механическую». В частности, отсутствие силы ($F = 0$, инерциальное движение) приводит к открытой космологической модели Фридмана в форме Фока :

$$\exp(2\sigma_F) = \left(1 - \frac{A_F}{S}\right)^4 = (1 - A_F x)^4, \tag{8}$$

где A_F –постоянная, появляющаяся во фридмановском решении и связанная с плотностью энергии пыли, заполняющей эту космологическую модель.

1. Гармонический осциллятор с вязкостью

Если выбрать силу Гука ($F_H \propto y$), реализующейся для осциллятора без трения, то получим открытую космологическую модель, заполненную веществом и излучением (см. [1]- [3]).

Дальнейшее исследование будет связано с введением наряду с силой Гука еще и диссипативной силы Рэлея ($F_R \propto \dfrac{dy}{dx} = y'_X$):

$$F = F_H + F_R = -\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dy'_X} = -B^2 y - 2\lambda \frac{dy}{dx} \tag{9}$$

с соответствующими потенциальными функциями $U = \dfrac{B^2 y^2}{2}$; $\quad V = \lambda (\dfrac{dy}{dx})^2$, где B^2 – аналог коэффициента жесткости осциллятора или квадрата собственной частоты осциллятора с единичной массой, λ – аналог коэффициента трения.

В этом случае уравнение, отвечающее выбранной силе (9), примет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\lambda \frac{dy}{dx} + B^2 y = 0. \tag{10}$$

Как известно, решение этого уравнения для колебательного режима есть

$$y(x) = C_0\, e^{-\lambda x} \cos(\sqrt{B^2 - \lambda^2} \cdot x + \gamma_0) = C_0\, e^{-\lambda x} \cos(\Omega \cdot x + \gamma_0). \tag{11}$$

Одновременно эта функция $y(x) = \exp(\sigma/2)$ является решением космологических уравнений тяготения.

В качестве примера рассмотрим здесь случай очень слабого трения, то есть $\lambda/B << 1$ или $(\lambda/B)^2 \sim 0$, $\Omega \approx B$. В этом приближении решение уравнения (11) запишется как

$$y(x) = C_0\, e^{-\lambda x} \cos(Bx + \gamma_0), \tag{12}$$

где C_0 и γ_0 суть постоянные интегрирования, которые находятся из условий на асимптотике и требования, чтобы решение «проходило» через решение Фридмана ($S \to \infty$ или $x \to 0$), которое здесь примет вид

$$\exp(2\sigma) = (1 - \frac{A}{S})^4 = (1 - Ax)^4 \tag{13}$$

с $A = \lambda + A_F$.

В итоге получаем: $C_0 = \sqrt{1 + (A_F/B)^2}$; $\qquad \mathrm{tg}\gamma_0 = (A - \lambda)/B = A_F/B$.

Для дальнейшего рассмотрения произведем инверсию переменной $x \to z = 1/Bx = S/B$. После этого выражение (13) перепишется в виде

$$y(z) = \sqrt{1 + (A_F/B)^2} e^{-\lambda/z} \cos(\frac{1}{z} + \gamma_0), \tag{14}$$

а выражения для давления и плотности энергии примут вид

$$\varkappa p = \frac{4}{z^4 B^2 y^4} (1 - 2\alpha \cdot tg(\frac{1}{z} + \gamma_0)); \tag{15}$$

$$\varkappa \varepsilon = \frac{12}{z^3 B^2 y^4} (1 + \frac{1}{z}(\alpha + tg(\frac{1}{z} + \gamma_0))) \cdot (\alpha + tg(\frac{1}{z} + \gamma_0)), \tag{16}$$

где параметр $\alpha = \lambda/B$ отвечает за «вязкость».

2. Функция состояния и поведение космологической модели

Введем функцию состояния β следующим образом:

$$\beta(z) = \frac{p}{\varepsilon}. \tag{17}$$

Эта функция в каждый момент S задает уравнение состояния. В нашем случае получим

$$\beta(z) = \frac{1}{3}\frac{(1 - 2\alpha \cdot \mathrm{tg}(\frac{1}{z} + \gamma_0))}{(z + (\alpha + \mathrm{tg}(\frac{1}{z} + \gamma_0)) \cdot (\alpha + \mathrm{tg}(\frac{1}{z} + \gamma_0))}. \tag{18}$$

Функция состояния «управляется» двумя параметрами: γ_0, связанному с плотностью энергии вещества и плотностью излучения через отношение параметров A_F и B как $\mathrm{tg}\gamma_0 = A_F/B$, и параметром $\alpha = \lambda/B$, который связан с коэффициентом «вязкости». Соответствующие графики функции состояния для различных значений указанных выше параметров приведены на Рис.1 и помечены как 1, 2, 3, 4.

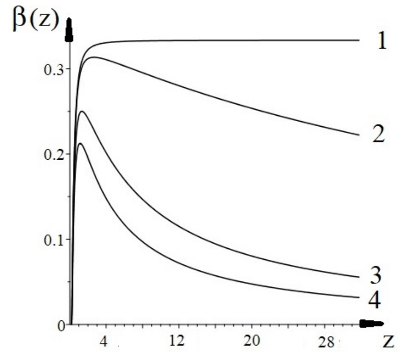

Рис. 1. Поведение функции состояния β открытой космологической модели в зависимости от комбинации параметров γ_0 и α.

График на Рис.1 под номером 1 соответствует эволюции космологической модели нулевым параметром «трения», $\alpha = 0$, и отсутствием вещества, $\gamma_0 = 0$. Другими словами, открытая космологическая модель заполнена только равновесным излучением с уравнением состояния $\varepsilon = 3p$ на всем интервале изменения переменной S (почти от нуля до бесконечности).

График под номером 2 получен для значений параметров $\gamma_0 = 0$ и $\alpha = 0,005$, то есть в открытой космологической модели, заполненной излучением, присутствует «вязкость» и кривая медленно спадает при стремлении S к бесконечности.

Под номером 3 график описывает поведение модели при малой плотности вещества по сравнению с плотностью излучения ($\gamma_0 = 0,05$ или $A_F/B \approx 0,05$). При этом «вязкость» отсутствует ($\alpha = 0$).

Четвертый график описывает поведение открытой космологической модели как с веществом и излучением ($\gamma_0 = 0,05$), так и с «диссипацией» ($\alpha = 0,005$).

3. Заключение

В данной статье на основе ранних работ продемонстрировано сведение проблемы моделирования эволюции открытой Вселенной в $4D$ пространстве-времени для конформно-плоской метрики в форме Фока к эквивалентной ей задаче об осцилляторе с релеевской вязкостью. Соответствующая космологическая модель заполнена веществом и излучением в приближении идеальной жидкости.

В качестве примера рассмотрен случай очень малого трения. Показано, что параметр, отвечающий коэффициенту вязкости, влияет на эволюцию этой модели. В зависимости от входящих в модель параметров графически продемонстрировано поведение функции состояния, которая, в свою очередь, в каждый момент времени представляет собой уравнение состояния.

Следует отметить, что λ дает вклад в постоянную A , которая отвечает за наличие вещества. При увеличении параметра «вязкости» λ параметр A также растет, а значит растет и эффективная плотность энергии материи. Функция состояния β при этом быстрее выходит на асимптотику, соответствующую открытой космологической модели Фридмана, но при этом исчезает ультрарелятивистская фаза с уравнением состояния $\varepsilon = 3p$ или $\beta = 1/3$.

Другими словами, поведение графиков функции состояния β показывает, что наша модель будет качественно соответствовать модели горячей Вселенной (модели Большого Взрыва), если на первых этапах расширения Вселенной параметры γ_0, α «включаются» только после достижения максимума $\beta_{\max} = 1/3$, либо эти параметры должны быть столь незначительны, чтобы не влиять на максимум.

Тем самым получаем графическую иллюстрацию влияния наличия вещества, излучения и «вязкости» на эволюцию открытой космологической модели, обобщающей модель Фридмана.

Список литературы

1. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской вселенной. I. Эволюция модели как задача о движении частицы в силовом поле. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия* (STFI). 2014, № 1, с. 37-46.

2. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field. *Space, Time and Fundamental Interactions* (STFI). 2020, № 3, p.27-36.

3. Баранов А.М. Эволюция открытой космологической модели с излучением. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия* (STFI). 2017, № 1. с.20-29.

4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИЗФМЛ, 1961.

References

1. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field. *Space, Time and Fundamental Interactions.* 2014. no.1, pp. 37-46 (in Russian).

2. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field. *Space, Time and Fundamental Interactions.* 2020, no. 3, pp. 27–36.

3. A.M. Baranov A.M. Evolution of the open cosmological model with radiation. *Space, Time and Fundamental Interactions.* 2017, no. 1, pp. 20-29 (in Russian).

4. Fock V.A. *The Theory of Space, Time and Gravitation.* New York:, Pergamon Press, 1964. 460 p.

Авторы

Баранов Александр Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра физики, технологии и методики обучения, ФГБОУ ВПО Красноярский государственный педагогический университет им.В.П.Астафьева (КГПУ), ул. Ады Лебедевой, 89, г. Красноярск, 660049, Россия
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Баранов А. М. Открытая космологическая модель как осциллятор с вязкостью. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 1. С. 47—52.

Authors

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department "Physics, Technology and Training Methods", Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P.Astafyev, 89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 660049, Russia
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Please cite this article in English as:

Baranov A. M. Open cosmological model as the oscillator with viscosity. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 47–52.