УДК 524.8, 53.1

ПРИМЕР ПЕРЕХОДА ОТ ТЕНЗОРНО-МУЛЬТИ-СКАЛЯРНОЙ К ОДНОПОЛЕВОЙ КОСМОЛОГИИ *

Большакова К. А.[a,1], Червон С. В.[a,b,c,2]

[a] Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, Ульяновск, 432071, Россия.

[b] Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия.

[c] Казанский Федеральный Университет, г. Казань, 420008, Россия.

В данной работе представлен алгоритм, позволяющий перейти от многополевой космологической модели к модели с одним скалярным полем на примере тензорно-мульти-скалярной теории гравитации. Этот алгоритм существенно отличается от метода, представленного в статье [1].

Ключевые слова: Тензорно-мульти-скалярная теория гравитации, метод Иванова – Салопека – Бонда.

AN EXAMPLE OF THE TRANSITION FROM TENSOR-MULTI-SCALAR TO SINGLE-FIELD COSMOLOGY

Bolshakova K. A.[a,1], Chervon S. V.[a,b,c,2]

[a] Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, 432071, Russia.

[b] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia.

[c] Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

This paper presents an algorithm that allows one to move from a multi-field cosmological model to a model with one scalar field using the example of a tensor-multi-scalar theory of gravity. This algorithm is fundamentally different from the method presented in the article [1]

Keywords: Tensor-multi-scalar theory of gravity, Ivanov – Salopek – Bond method.

PACS: 04.20.Kd, 04.50.Kd
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.53-59

Введение

Тензорно-мульти-скалярная теория гравитации (ТМС ТГ) представляет собой модификацию эйнштейновской гравитации, исследование которой имеет важное значение для объяснения ускоренного расширения Вселенной [2]. Наличие нескольких скалярных полей в ТМС ТГ позволяет рассматривать ситуацию, когда поля принимают значения во внутреннем пространстве (пространстве целей), что означает построение киральной само-гравитирующей модели (КГСМ) [3].

В работах [4, 5] были найдены инфляционные решения в ТМС ТГ для трёхполевых моделей в рамках степенной инфляции и де-ситтеровского расширения. Для расчёта космологических

*Статья написана в рамках Соглашения о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2025-066 от 16.01.2025, заключенным между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

[1]E-mail: bolshakova.ktrn@gmail.com
[2]E-mail: chervon.sergey@gmail.com

параметров в мультиполевых моделях необходимы специализированные методы, включая использование анзаца и линейных связей между полями [1, 6, 7].

В данной работе предлагается алгоритм, основанный на аналитическом решении киральной космологической модели, для установления функциональной связи между полями в рамках инфляционных решений, полученных в ТМС ТГ. Предлагаемый алгоритм существенно отличается от метода, представленного в статье [1].

1. Действие в тензорно-мульти-скалярной теории гравитации

Рассмотрим действие тензорно-мульти-скалярной теории гравитации (ТМС ТГ) [2]

$$S = \frac{1}{\varkappa}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}h_{AB}\varphi^A_{,\mu}\varphi^B_{,\nu} - W(\varphi^C)\right] + S_m[\chi_m, \Omega^2(\varphi^C)g_{\mu\nu}], \quad (1)$$

которое включает в себя гравитационные киральные (скалярные) поля φ^A, метрику пространства целей $h_{AB}(\varphi)$ и общие поля материи χ_m. Здесь $\varkappa$ – эйнштейновская гравитационная постоянная, R – скалярная кривизна, $g = det(g_{\mu\nu})$, $\varphi_{,\mu} = \partial_\mu\varphi = \frac{d\varphi}{dx^\mu}$. Индексы $\mu, \nu, ... = 0, 1, 2, 3$ определяют координаты пространства-времени, $A, B, C, ... = 1, 2...N$ задают N скалярных полей. Совокупность скалярных полей $\{\varphi^1, \varphi^2, ...\varphi^N\}$, будем обозначать $\varphi := \{\varphi^1, \varphi^2...\varphi^N\}$.

В качестве источника гравитации выбираем каноническое скалярное поле χ с потенциалом самодействия $U(\chi)$. Гравитационная часть действия (1) в отсутствии S_m соответствует киральной космологической модели (ККМ) при выборе естественных единиц, включая $\varkappa = M_P^{-2} = 1$ [8].

Метрику пространства целей h_{AB} (1) выбираем в двухмерном варианте:

$$ds^2_\sigma = h_{11}d\phi^2 + h_{22}(\phi, \psi)d\psi^2, \quad h_{11} = const., \quad \varphi^1 = \psi, \quad \varphi^2 = \phi. \quad (2)$$

Таким образом, действие (1) с метрикой пространства целей (2), киральными гравитационными полями $\varphi^1 = \psi$ и $\varphi^2 = \phi$, самодействующим скалярным полем χ с потенциалом самодействия $U(\chi)$ можно представить в следующем виде:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(h_{11}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + h_{22}(\psi, \phi))\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - W(\psi, \phi) + \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\chi_{,\mu}\chi_{,\nu} - U(\chi)\right)\right]. \quad (3)$$

Здесь и далее полагаем $\varkappa = 1$. Отметим, что действие (3) содержит три поля: киральные гравитационные поля $\varphi^1 = \psi$ и $\varphi^2 = \phi$ и одно материальное скалярное поле χ.

Для уравнений космологической динамики, полученных путем варьирования действия (3) в рамках метрики Фридмана – Робертсона – Уокера (ФРУ), найдены классы решений для степенного масштабного фактора и инфляции де Ситтера. Эти решения и алгоритм их поиска представлены в работах [4, 5].

Действие (3) можно переписать как:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(h_{11}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + h_{22}(\psi, \phi)\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} + \chi_{,\mu}\chi_{,\nu}\right) - V_G(\chi, \psi, \phi)\right], \quad (4)$$

где $V_G(\chi, \psi, \phi) = W(\psi, \phi) + U(\chi)$ – общий потенциал всех трех полей.

2. Метод перехода к модели с одним полем

Идея метода заключается в том, чтобы на основе аналитических решений системы нелинейных уравнений, полученных в работе [4], выразить зависимость киральных полей ψ и ϕ от скалярного поля χ, используя обратную зависимость $t(\chi)$. Затем, зная зависимость $\phi(\chi)$ и $\psi(\chi)$, выразить потенциалы полей $W(\psi, \phi)$ через скалярное поле χ. Также представить компоненты киральной метрики $h_{22}(\phi, \psi)$ как функцию от поля χ.

Получив вид зависимости $\phi(\chi)$ и $\psi(\chi)$, находим значение их производных:

$$\phi_{,\mu} = \frac{d\phi}{d\chi}\chi_{,\mu}, \quad \psi_{,\mu} = \frac{d\psi}{d\chi}\chi_{,\mu}. \quad (5)$$

Также, используя найденные зависимости $\phi(\chi)$ и $\psi(\chi)$, представим потенциал $W(\psi,\phi)$ и компоненты киральной метрики $h_{22}(\psi,\phi)$ как функции от поля χ.

Выполняя подстановку соотношений (5) в действие (4), получаем

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\omega(\chi)\chi_{,\mu}\chi_{,\nu}-V_G(\chi)\right]. \tag{6}$$

Здесь кинетическая функция $\omega(\chi)$ определена таким образом:

$$\omega(\chi)=h_{11}\left(\frac{d\phi}{d\chi}\right)^2+h_{22}(\chi)\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^2+1. \tag{7}$$

Стоит отметить, что действие (6) является частным случаем действия обобщенной скалярно-тензорной теории гравитации, рассмотренной в работе [3]. Используя результаты статьи [9], для метрики (ФРУ) $dS^2=-dt^2+a^2(t)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$, получаем систему уравнений:

$$3H^2=\frac{\omega(\chi)}{2}\dot{\chi}^2+V_G(\chi),\quad 3H^2+2\dot{H}^2+\frac{\omega(\chi)}{2}\dot{\chi}^2-V_G(\chi)=0. \tag{8}$$

Здесь $a(t)$ – масштабный фактор, $H(t)=\frac{\dot{a}}{a}$ – параметр Хаббла.

2.1. Метод Иванова – Салопека – Бонда

Для поиска решений системы уравнений (8) с обобщенным потенциалом $V_G(\chi)$ будем использовать метод Иванова – Салопека – Бонда [10]. Следуя этому методу, полагаем зависимость параметра Хаббла от поля $H(\chi)$, и тогда систему уравнений (8) можно представить как [10]:

$$H'(\chi)=-\frac{\omega(\chi)}{2}\dot{\chi},\quad -\frac{1}{3}V_G(\chi)=\frac{2}{3\omega(\chi)}\left[H'\right]^2-H^2. \tag{9}$$

Введем генерирующую функцию $F(\chi)=\sqrt{3}(H(\chi)-F_*)$ [10], тогда вид потенциала и связь генерирующей функции с параметром Хаббла такова:

$$V_G(\chi)=-\frac{2}{3\omega(\chi)}[F']^2+[F+F_*]^2,\quad H(\chi)=\sqrt{\frac{1}{3}}\left(F+F_*\right), \tag{10}$$

где $F_*=const$. Таким образом, зная вид потенциала $V_G(\chi)$, можно подобрать вид генерирующей функции $F(\chi)$ и определить параметр Хаббла $H(\chi)$.

3. Переход к однополевой модели для случая $U(\chi)=V_0\exp(\mu\chi)$

Для выполнения перехода к однополевой модели рассмотрим решения, полученные в [4] для случая экспоненциального потенциала $U(\chi)=V_0\exp(\mu\chi)$ и степенного масштабного фактора $a=ct^m, c=const$. При таком задании эволюции Вселенной и потенциала $U(\chi)$, материальное скалярное поле $\chi(t)$, киральные гравитационные поля $\psi(t)$ и $\phi(t)$ имеют вид [4]:

$$\chi=\mu^{(-1)}\ln\left(\frac{6m}{t^2V_0\mu^2}\right),\quad \psi=\sqrt{2}t,\quad \phi=\sqrt{2m}\ln t. \tag{11}$$

где μ, m, $V_0=const$.

Зависимость $t(\chi)$ для данного случая определяется из (11):

$$t(\chi)=\sqrt{Q}\exp\left(-\frac{\chi\mu}{2}\right),\quad Q=\frac{6m}{V_0\mu^2} \tag{12}$$

Следовательно, получаем следующие зависимости киральных полей от скалярного поля χ:

$$\phi(\chi)=\frac{\sqrt{2m}}{2}\left(\ln Q-\chi\mu\right),\quad \psi(\chi)=\sqrt{2Q}\exp\left(-\frac{\chi\mu}{2}\right),\quad Q>0. \tag{13}$$

Для перехода к модели с одним полем необходимо представить компоненты киральной метрики через скалярное поле χ. В рассматриваемой модели [4] $h_{11} = 1$, а второй компонент $h_{22}(\psi) = \frac{\epsilon 2^m}{c^2 \psi^{2m}}$. Учитывая зависимость $\psi(\chi)$ (13), получаем

$$h_{22}(\psi) = \frac{\epsilon}{c^2 Q^m} \exp(\chi \mu m), \tag{14}$$

здесь $c = const$ соответствует определению масштабного фактора $a = ct^m$.

Определим потенциалы киральных полей для данного случая. Подставив зависимости $\phi(\chi)$ и $\psi(\chi)$ (13) в потенциалы $W_1(\phi)$, $W_2(\phi)$, $W_3(\psi)$ [4], находим:

$$W_1(\chi) = \exp(\chi\mu), \quad W_2(\chi) = -2\sqrt{2m} A V_0 \exp(\chi\mu), \tag{15}$$

$$W_3(\chi) = -\frac{24B\sqrt{mV_0}}{\mu\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{\chi\mu}{2}\right) + \frac{2\epsilon}{c^2 Q_1^m} \exp(\chi\mu m). \tag{16}$$

Общий потенциал однополевой модели $V_G(\chi)$ находится как сумма всех потенциалов киральных полей, зависящих от поля χ (15), (16) и экспоненциального потенциала $U(\chi) = V_0 \exp(\mu\chi)$:

$$V_G(\chi) = A_1 \exp(\chi\mu) + A_2 \exp\left(-\frac{\chi\mu}{2}\right) + A_3 \exp(\chi\mu m), \tag{17}$$

где новые константы A_1, A_2, A_3 определены таким образом:

$$A_1 = \left(V_0 - 2\sqrt{2m} A V_0 + \frac{(3m-1)V_0\mu^2}{6}\right), \quad A_2 = -\frac{24B\sqrt{mV_0}}{\mu\sqrt{3}}, \quad A_3 = \frac{2\epsilon}{c^2 Q^m} \tag{18}$$

Для определения кинетической функции $\omega(\chi)$ (7) находим частные производные от ψ и ϕ по полю χ. Учитывая (14), получаем

$$\omega(\chi) = \frac{m\mu^2}{2} + \frac{\epsilon Q^{1-m}}{2c^2} \exp\left(\chi\mu(m-1)\right) + 1. \tag{19}$$

Рассмотрим выбор констант: $m = 1$, $\epsilon = -1$, $\mu = c^{-1}$, который приводит кинетическую функцию $\omega(\chi)$ (19) к простому виду:

$$\omega(\chi) = 1. \tag{20}$$

Следует отметить, если постоянная μ будет принимать значение $\mu = \sqrt{2} = c^{-1}$ и при этом $m = 1$, $\epsilon = -1$, тогда $\omega(\chi)$ так же принимает вид (20). При этих случаях должно выполняться условие $V_0 > 0$ для того, чтобы $Q > 0$.

3.1. Решение для частного случая $V_G = A_2 \exp\left(-\frac{\chi\mu}{2}\right)$

Рассмотрим частный случай, когда $m = 1$, $\epsilon = -1$, $A = \dfrac{\mu^2 c^2 + 3c^2 - \mu^2}{6c^2\sqrt{2}}$, $\mu = c^{-1}$. При этом потенциал $V_G(\chi)$ (17) принимает вид:

$$V_G(\chi) = A_2 \exp\left(-\frac{\chi\mu}{2}\right), \quad A_2 = -\frac{24B\sqrt{V_0}}{\mu\sqrt{3}}. \tag{21}$$

Потенциал (21) образован генерирующей функцией $F(\chi)$ вида:

$$F(\chi) = \lambda_1 \exp\left(-\frac{\chi\mu}{4}\right). \tag{22}$$

При подстановке (22) в (10) получаем:

$$V_G(\chi) = \lambda_1^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{6}\right) \exp\left(-\frac{\chi\mu}{2}\right). \tag{23}$$

При определении $\lambda_1^2 = -\dfrac{48B\sqrt{3V_0}}{\mu(6-\mu^2)}$ и выполнении условия $\mu < 0$ (или $B < 0$), потенциал (23) принимает вид (21). Следовательно, параметр Хаббла $H(\chi)$ (10) и поле χ принимают вид:

$$H(\chi) = \sqrt{-\frac{16B\sqrt{3V_0}}{\mu(6-\mu^2)}} \exp\left(-\frac{\chi\mu}{4}\right), \quad \chi(t) = \frac{4}{\mu}\ln\left[\sqrt{-\frac{B\mu^3\sqrt{3V_0}}{4(6-\mu^2)}}\right]. \tag{24}$$

Таким образом, зависимость параметра Хаббла от времени $H(t)$ такова:

$$H(t) = \frac{8}{\mu^2 t}. \tag{25}$$

Параметр Хаббла (25) соответствует степенной инфляции при условии $m = \frac{8}{\mu^2} > 1$. Данное решение представляет собой вечную инфляцию, выход из которой возможен за счет рассмотрения неканонического скалярного поля [12].

Заключение

В рамках тензрно-мульти-скалярной гравитации с двумя гравитационными скалярными полями и самодействующим скалярным полем – источником гравитации, рассмотрена возможность перехода к однополевой модели для определения спектральных космологических параметров стандартным образом. Используя функциональную связь между полями на основе точного решения в ТМС ТГ, получена модель с потенциалом (23), скалярным полем и параметром Хаббла (24).

Преимущества данного подхода заключается в том, что становится возможным проводить расчеты космологических параметров, описывающих эпоху ранней инфляции Вселенной в ТМС ТГ, используя стандартные методы вычисления данных параметров в однополевой модели, которые широко изучены, например, в работе [10].

Список литературы

1. Chervon S.V., Fomin I.V., Mayorova T.I., Khapaeva A. V. Cosmological parameters of $f(R)$ gravity with kinetic scalar curvature. *J.Phys.Conf.Ser.*, 2020. 012016 p.

2. Damour T., Esposito-Far'ese G. Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Class Quantum Grav*, 1992. V.9.

3. Червон С.В. Киральные само-гравитирующие модели: точные решения и вычисление космологических параметров. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2022. № 40. С. 30–49.

4. Червон С. В., Кубасов А. С., Большакова К. А. Космологическая инфляция в тензорно-мультискалярной теории гравитации. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2018. № 1. С. 50—66

5. Bolshakova K. A., Chervon S. V., Cosmological Solutions in the Tensor-Multi-Scalar Theory of Gravity with the Higgs Potential. *Grav. Cosmol.*, 2020. V.26, N. 2. P. 153-151.

6. Фомин И.В., Червон С.В., Морозов А.Н. *Гравитационные волны в ранней Вселенной.* Москва: МГТУ им. Н.Е., Баумана, 2018. – 154 с.

7. Chervon S., Fomin I., Pozdeeva E. O., Sami M., Vernov Yu. S. Superpotential method for chiral cosmological models connected with modified gravity. *Phys. Rev. D.* , 2019. V. 100. P. 063522.

8. Beesham A., Maharaj S.D., Chervon S.V., Kubasov. A.S. Exact Inflationary Solutions Inspired by the Emergent Universe Scenario. *Int. J. Theor. Phys.*, 2015, V.54. P. 884-895

9. De Felice A., Tsujikawa S., Elliston J., Tavakol R. Chaotic inflation in modified gravitational theories. *JCAP*, 2011. Vl. 2011, № 8. P. 021-021.

10. Chervon S.V., Fomin I.V., Beesham A. The method of generating functions in exact scalar field inflationary cosmology. *Eur. Phys. J. C.*, 2018. Vl. 78, №. 4. 14 pp.

11. Chervon S., Fomin, I., Yurov V., Yurov A. *Scalar Field Cosmology.* Series on the Foundations of Natural Sciences and Technology – Monography. World Scientific Publishing. 2019.

12. Unnikrishnan S., Sahni V. Resurrecting power law inflation in the light of Planck results. *JCAP* , 2013. V. 10. P. 063.

References

1. Chervon S.V., Fomin I.V., Mayorova T.I., Khapaeva A. V. Cosmological parameters of $f(R)$ gravity with kinetic scalar curvature. *J.Phys.Conf.Ser.*, 2020. P. 012016.

2. Damour T., Esposito-Far'ese G. Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Class Quantum Grav*, 1992. V.9.

3. Chervon S.V. Chiral self-gravitating models: exact solutions and calculation of cosmological parameters. *Space, time and fundamental interactions*, 2022. No. 40. P. 30–49.(in Russ.)

4. Chervon S. V., Kubasov A. S., Bolshakova K. A. Cosmological inflation in tensor-multi-scalar theory of gravitation. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, No. 1, pp. 67-81.

5. Bolshakova K. A., Chervon S. V., Cosmological Solutions in the Tensor-Multi-Scalar Theory of Gravity with the Higgs Potential. *Grav. Cosmol.*, 2020. V.26, No. 2. P. 153-151.

6. Fomin I.V., Chervon S.V., Morozov A.N. *Gravitational waves of the early universe*. Moscow: MSTU im. N.E. Bauman, 2018. – 154 p. (in Russian).

7. Chervon S., Fomin I., Pozdeeva E. O., Sami M., Vernov Yu. S. Superpotential method for chiral cosmological models connected with modified gravity. *Phys. Rev. D.* , 2019. V. 100. P. 063522.

8. Beesham A., Maharaj S.D., Chervon S.V., Kubasov. A.S. Exact Inflationary Solutions Inspired by the Emergent Universe Scenario. *Int. J. Theor. Phys.*, 2015, V.54. P. 884-895

9. De Felice A., Tsujikawa S., Elliston J., Tavakol R. Chaotic inflation in modified gravitational theories. *JCAP*, 2011. V. 2011, No. 8. P. 021-021.

10. Chervon S.V., Fomin I.V., Beesham A. The method of generating functions in exact scalar field inflationary cosmology. *Eur. Phys. J. C.*, 2018. V. 78, No. 4. 14 pp.

11. Chervon S., Fomin, I., Yurov V., Yurov A. *Scalar Field Cosmology.* Series on the Foundations of Natural Sciences and Technology – Monography. World Scientific Publishing. 2019.

12. Unnikrishnan S., Sahni V. Resurrecting power law inflation in the light of Planck results. *JCAP* , 2013. V. 10. P. 063.

Авторы

Большакова Катерина Александровна, научный сотрудник, лаборатория гравитации, космологии, астрофизики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, пл. Ленина, д. 4/5, Ульяновск, 432071, Россия.
E-mail: bolshakova.ktrn@gmail.com

Червон Сергей Викторович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры физики и технических дисциплин, УлГПУ им. И.Н. Ульянова, площадь Ленина, 4/5, г. Ульяновск, 432071, Россия. Профессор кафедры физики МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2- ая Бауманoвская ул., д. 5, стр. 1, г. Москва, 105005, Россия. Ведущий научный сотрудник, Институт физики, КФУ, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Большакова К. А., Червон С. В. Пример перехода от тензорно-мульти-скалярной к однополевой космологии. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 1. С. 53—59.

Authors

Bolshakova Katerina Alexandrovna, researcher, laboratory of gravitation, cosmology, astrophysics, Ulyanovsk State Pedagogical University, Lenin's square, 4/5, Ulyanovsk, 432071, Russia.
E-mail: bolshakova.ktrn@gmail.com

Chervon Sergey Viktorovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of physics and technical disciplines, Ulyanovsk State Pedagogical University, 4/5 Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russia. Professor of Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005, Russia. Leading Researcher, Kremlevskaya ul. 18, Institute of Physics, KFU, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Please cite this article in English as:
Bolshakova K. A., Chervon S. V. An example of the transition from tensor-multi-scalar to single-field cosmology. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 53–59.