УДК 52-336+524.83

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ТЕОРИИ ХОРНДЕСКИ

Фатыхов Р. Р.[a,1], Сушков С. В.[a,2]

[a] Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

В данной работе исследуется динамика однородных изотропных космологических моделей с пространственно плоской метрикой в теориях гравитации со скалярным полем, неминимально связанным с кривизной. Неминимальная связь здесь характеризуется присутствием в функционале действия слагаемых вида $\xi R\phi^2$ и $\eta G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi$ (кинетическая связь). Мы будем рассматривать теорию, которая также включает квадратичный потенциал скалярного поля. Ввиду нелинейности получаемых динамических уравнений в своём анализе мы будем прежде всего интересоваться асимптотическим поведением, а также использовать численное интегрирование в том числе для представления динамики модели в виде фазового портрета.

Ключевые слова: Скалярно-тензорные теории гравитации, неминимальная кинетическая связь, космологическая инфляция.

DYNAMICAL PROPERTIES OF COSMOLOGICAL MODELS IN HORNDESKI THEORY

Fatykhov R. R.[a,1], Sushkov S. V.[a,2]

[a] Kazan State University, Kazan, 420008, Russia.

In this paper, we study the dynamics of homogeneous isotropic cosmological models with a spatially flat metric in theories of gravity with a scalar field that is non-minimally coupled to curvature. The non-minimal coupling here is characterized by the presence in the action functional terms of the form $\xi R\phi^2$ and $\eta G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi$ (kinetic coupling). We will consider a theory that includes the quadratic potential of a scalar field. Due to the non-linearity of the resulting dynamic equations, in our analysis we will primarily be interested in asymptotic behavior, and also use numerical integration, including to represent the dynamics of the model in the form of a phase portrait.

Keywords: Scalar-tensor theories of gravity, nonminimal derivative coupling, cosmological inflation.

PACS: 04.50.Kd, 98.80.-k
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.154-155

Введение

Модель Фридмана с классической материей хорошо описывает динамику Вселенной на большей части её истории, однако сталкивается с непреодолимыми трудностями в объяснении проблем плоскостности и горизонта. Для их решения была предложена теория космической инфляции (многократного экспоненциального расширения Вселенной), обусловленной динамикой некоторого скалярного поля (инфлатона) в прошлом. Более того, современные астрономические наблюдения [1] свидетельствуют о том, что Вселенная относительно недавно вступила в новую фазу ускоренного расширения.

[1] E-mail: frr1802@yandex.ru
[2] E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Таким образом указанные выше обстоятельства (факт ускоренного расширения Вселенной в прошлом и в настоящем) вынуждают модифицировать уравнения тяготения Эйнштейна для описания наблюдаемой космологической динамики. Одним из направлений модификации является добавление дополнительной степени свободы в теорию, например, скалярного поля. Такие теории получили название скалярно-тензорных. Помимо теории со скалярным полем, минимально связанным с гравитацией, ничто *априори* не запрещает рассматривать теории с неминимальной связью. Более того, выводы теории с каноническим скалярным полем не полностью согласуется с данными астрономических наблюдений [1], что побуждает рассматривать теории с неминимальной связью.

1. Действие и полевые уравнения

В данной работе мы будем исследовать космологическую динамику в модифицированной теории гравитации со скалярным полем, неминимально связанным с кривизной, действие которой задаётся следующим образом:

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(1-\xi\phi^2\right)R - \phi\left(g^{\mu\nu}+\eta G^{\mu\nu}\right)\phi_\mu\phi_\nu - 2V(\phi)\right] + S_m, \tag{1}$$

Здесь $g_{\mu\nu}$ — псевдориманова метрика с сигнатурой $(-,+,+,+)$, $g = \det g_{\mu\nu}$, R — скалярная кривизна (скаляр Риччи), κ — гравитационная постоянная Эйнштейна (равная[1] $8\pi G = m_P^{-2}$, где G — гравитационная постоянная Ньютона и m_P — редуцированная планковская масса), $G_{\mu\nu}$ — тензор Эйнштейна, $V(\phi)$ — потенциал скалярного поля, η — коэффициент кинетической связи с $G_{\mu\nu}$ размерности m^{-2}, ξ — безразмерный коэффициент связи скалярного поля с кривизной R. Здесь и далее верхние и нижние индексы у ϕ означают компоненты ковариантной производной (например, $\phi_\alpha \equiv \nabla_\alpha\phi$ и т. д., а также $(\nabla\phi)^2 \equiv \phi^\alpha\phi_\alpha$ и $\Box\phi \equiv \phi^\alpha_\alpha$).

Такой лагранжиан является частным случаем общего лагранжиана Хорндески [2], приводящего к уравнениям движения второго порядка. В работах [3, 4] было показано, что модели с кинетической связью обладают рядом очень интересных особенностей, среди них — механизм, неизбежно приводящий к инфляционной стадии в прошлом и не требующим "тонкой настройки".

Вариацией функционала действия (1) по метрике $g_{\mu\nu}$ и полю ϕ получаем следующую систему дифференциальных уравнений, являющихся обобщениями уравнения Эйнштейна и Клейна–Гордона соответственно:

$$G_{\mu\nu} = T^{(m)}_{\mu\nu} + T^{(\phi)}_{\mu\nu} + \eta\Theta^{(1)}_{\mu\nu} + \xi\Theta^{(2)}_{\mu\nu}, \tag{2a}$$

$$\Box\phi + \eta G_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} - \xi R\phi = V_\phi, \tag{2b}$$

где $T^{(m)}_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса обычной материи, $V_\phi \equiv dV(\phi)/d\phi$ и

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = \phi_\mu\phi_\nu - \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\Theta^{(1)}_{\mu\nu} = {} & -\frac{1}{2}R\phi_\mu\phi_\nu + 2\phi^\alpha R_{\alpha(\mu}\phi_{\nu)} + \phi^\alpha\phi^\beta R_{\alpha\mu\beta\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 \\ & -\phi_{\mu\nu}\Box\phi + \phi^\alpha_\mu\phi_{\alpha\nu} + g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}(\Box\phi)^2 - \frac{1}{2}\phi^{\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}\phi^\alpha\phi^\beta\right),\end{aligned} \tag{4}$$

$$\Theta^{(2)}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}\phi^2 + g_{\mu\nu}\Box(\phi^2) - (\phi^2)_{\mu\nu}. \tag{5}$$

Далее будем рассматривать полученные уравнения поля в однородной изотропной пространственно-плоской метрике в отсутствие обычной материи:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right), \tag{6}$$

[1] мы работаем в естественной системе единиц: $\hbar = c = 1$, в дальнейшем $\kappa = 8\pi G = 1$

где $a(t)$ — масштабный фактор, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ — метрика на 2-сфере . В силу однородности и изотропности модели также полагаем $\phi = \phi(t)$.

В метрике (6) tt и rr-компоненты уравнения Эйнштейна (2a) имеют следующий вид:

$$3H^2 = \rho_\phi, \tag{7a}$$

$$-\left(2\dot{H} + 3H^2\right) = p_\phi, \tag{7b}$$

где

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{9}{2}\eta H^2\dot{\phi}^2 + 3\xi\left\{H^2\phi^2 + 2H\phi\dot{\phi}\right\}, \tag{8a}$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}\eta\left\{\left(2\dot{H} + 3H^2\right)\dot{\phi}^2 + 4H\dot{\phi}\ddot{\phi}\right\} - \xi\left\{\left(2\dot{H} + 3H^2\right)\phi^2 + 4H\phi\dot{\phi} + 2\phi\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}^2\right\}. \tag{8b}$$

А уравнение Клейна–Гордона (2b) записывается в виде:

$$(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) - 3\eta\left\{H^2\ddot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^3\dot{\phi}\right\} + \xi\phi\left\{\dot{H} + 2H^2\right\} = -V_\phi \tag{9}$$

Здесь точка над символом означает производную по t и $H(t) \equiv a\dot{(t)}/a(t)$ — параметр Хаббла.

2. Динамическая система

Полученную систему дифференциальных уравнений можно разрешить относительно старших производных $\ddot{\phi}$ и $\dot{H}$. Однако нам достаточно из уравнений (8b) и (9) выразить только $\ddot{\phi}$, а в качестве второго независимого уравнения взять (7a), которое является алгебраическим (квадратным) уравнением относительно H:

$$H(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\xi\phi\dot{\phi} \pm \sqrt{D(\phi, \dot{\phi})}}{1 - \xi\phi^2 + \frac{3}{2}\eta\dot{\phi}^2}, \tag{10}$$

где (далее мы будем рассматривать случай $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$)

$$D(\phi, \dot{\phi}) = (\xi\phi\dot{\phi})^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)\left(1 - \xi\phi^2 + \frac{3}{2}\eta\dot{\phi}^2\right).$$

Далее, подставляя выражение для H (10) в выражение для $\ddot{\phi}$, получим автономную систему дифференциальных уравнений на ϕ и $\dot{\phi}$ в нормальной форме.

Следует отметить, что в действительности решения системы уравнений принадлежат двумерной поверхности, задаваемой связью (7a), в трёхмерном пространстве $(\phi, \dot{\phi}, H)$ (рис. 1), а конкретное решение представляет собой линию на этой поверхности. Это следует помнить, поскольку далее мы будем рассматривать фазовые портреты динамической системы в проекции на плоскость $H = 0$.

Заметим, что выражение для H (10) в случае $\xi < 0$ и $\eta > 0$ является симметричным относительно ϕ и $\dot{\phi}$ (с точностью до положительного множителя), а его значение — всегда вещественным и неотрицательным для всех ϕ и $\dot{\phi}$. Далее, при $\phi \gg 0$ и $\dot{\phi} \gg 0$ осуществляется квази-де Ситтеровское поведение ($H \sim \mathrm{const}$ и $\phi \sim \exp\beta t$ при некотором β и $t \to \pm\infty$):

$$H^2 \to \frac{m^2}{6|\xi|}, \quad \text{при } \dot{\phi}^2 \ll \phi^2, t \to +\infty, \tag{11a}$$

$$H^2 \to \frac{M^2}{9}, \quad \text{при } \phi^2 \ll \dot{\phi}^2, t \to -\infty, \tag{11b}$$

где $M^2 = 1/\eta$ — масштаб массы, характеризующий неминимальную кинетическую связь.

Представим поведение динамической системы в виде фазового портрета (рис. 2). Подробный анализ теории с неминимальной кинетической связью с помощью методов исследования динамических систем можно найти в работах [5, 6].

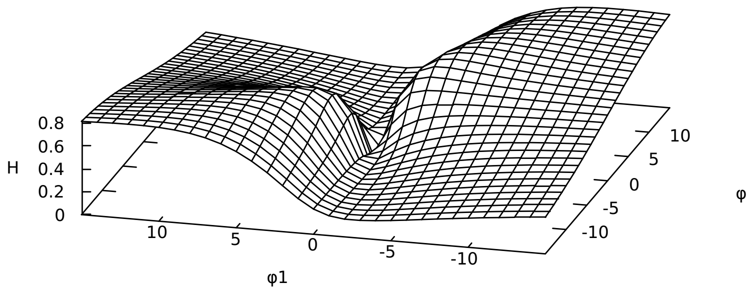

Рис. 1. Поверхность в пространстве $(\phi, \dot{\phi}, H)$ для модели с параметрами $\eta = 1/3, \xi = -1/6, m^2 = 1/20$.

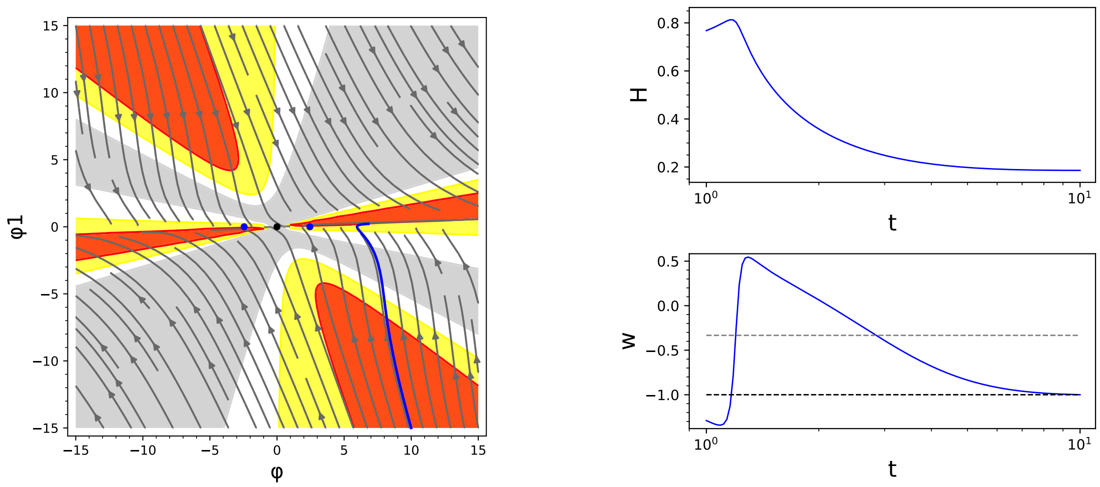

Рис. 2. Фазовый портрет системы для $\eta = 1/3$, $\xi = -1/6$, $m^2 = 1/20$. Точками обозначены неподвижные точки: чёрным — устойчивый фокус ($\phi = \dot{\phi} = 0$), синим — седловые точки $\dot{\phi} = 0$, $\phi^2 = -1/\xi$. Слева: белые и серые области отвечают расширению с замедлением (показатель баротропы $w \leq 1/3$ и $w > 1/3$ соответственно), жёлтые и красные области отвечают ускоренному расширению ($w < -1/3$) и сверхускоренному расширению ($\dot{H} > 0$). Справа: пример динамики параметра Хаббла H и показателя баротропы $w = -1 - 2\dot{H}/3H^2$ для начальных значений $\phi = -10$, $\dot{\phi} = -15$.

Заключение

В данной работе исследовалась динамика однородных изотропных космологических моделей с пространственно плоской метрикой в теориях гравитации со скалярным полем, неминимально связанным с кривизной. Было показано, что наличие в теории неминимальной связи вида $\xi R\phi^2$ и $\eta G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi$, а также квадратичного потенциала допускает в вакуумном случае существование двух инфляционных стадий, разделённых стадией замедляющегося расширения.

Список литературы

1. Ade P.A.R., *et al.* [Planck]. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 2014, vol. 571, A16.

2. Horndeski G.W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 1974, vol. 10, 363–384 pp.

3. Sushkov S.V. Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling. *Phys. Rev. D*, 2009, vol. 80, 103505.

4. Saridakis E.N., Sushkov S.V. Quintessence and phantom cosmology with non-minimal derivative coupling. *Phys. Rev. D*, 2010, vol. 81, 083510.

5. Skugoreva M.A., Sushkov S.V., Toporensky A.V. Cosmology with nonminimal kinetic coupling and a power-law potential. *Phys. Rev. D*, 2013, vol. 88, 083539.

6. Matsumoto J., Sushkov S.V. Cosmology with nonminimal kinetic coupling and a Higgs-like potential. *JCAP*, 2015, vol. 11, 047.

Авторы

Фатыхов Равиль Ришатович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: frr1802@yandex.ru

Сушков Сергей Владимирович, д-р. физ.-мат. наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Фатыхов Р. Р., Сушков С. В. Динамические свойства космологических моделей в теории Хорндески. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 1. С. 154—158.

Authors

Fatykhov Ravil Rishatovich, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: frr1802@yandex.ru

Sushkov Sergey Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Docent, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Please cite this article in English as:
Fatykhov R. R., Sushkov S. V. Dynamical properties of cosmological models in Horndeski theory. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 154–158.