

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774+519.711.3+551.5.001.57+517.957

© Игнатьев Ю. Г., Самигуллина А. Р., 2025

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ АСИММЕТРИЧНОГО СКАЛЯРНОГО ХИГГСОВА ДУБЛЕТА С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ*

Игнатьев Ю. Г.^{a,1}, Самигуллина А. Р.^{a,2}

^a Казанский федеральный университет, Институт физики, ул. Кремлевская, д. 16А, г. Казань, 420008, Россия.

Предложены космологические модели на основе асимметричного скалярного Хиггсова дублета (каноническое Φ и фантомное ϕ поля) с потенциальным взаимодействием между компонентами. Проведен качественный анализ соответствующих динамических систем и выявлены их трансформационные свойства по отношению к преобразованиям подобия фундаментальных констант. Исследовано асимптотическое поведение этого класса космологических моделей вблизи космологических сингулярностей. Проведённое численное моделирование выявило ряд интересных особенностей этих моделей, в частности, возможность возникновения достаточно длительной “фазы ожидания”, на котором Вселенная является почти Евклидовой, а также наличие точек отскока, в окрестности которых происходят сильные колебания скалярных потенциалов.

Ключевые слова: Асимметричный скалярный Хиггсов дублет, космологические модели, качественный анализ, асимптотическое поведение, фаза ожидания, отскоки..

COSMOLOGICAL MODELS BASED ON AN ASYMMETRIC SCALAR HIGGS DOUBLET WITH POTENTIAL INTERACTIONS BETWEEN COMPONENTS

Ignat'ev Yu. G.^{a,1}, Samigullina A. R.^{a,2}

^a Kazan Federal University, Institute of Physics, Kremlyovskaya str., 16A, Kazan, 420008, Russia.

Cosmological models based on an asymmetric scalar Higgs doublet (canonical Φ and phantom ϕ fields) with potential interaction between the components are proposed. A qualitative analysis of the corresponding dynamic systems is performed and their transformation properties with respect to similarity transformations of fundamental constants are revealed. The asymptotic behavior of this class of cosmological models near cosmological singularities is investigated. The numerical simulations revealed a number of interesting features of these models, in particular, the possibility of a fairly long “waiting phase”, during which the Universe is almost Euclidean, as well as the presence of rebound points, in the vicinity of which strong oscillations of scalar potentials occur.

Keywords: Asymmetric scalar Higgs doublet, cosmological models, qualitative analysis, asymptotic behavior, waiting phase, bounces..

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S, 52.27.Ny, 02.60.Cb, 07.05.Tp, 04.25.-g

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.94-100

*Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров

¹E-mail: yurii.ignatev.1947@yandex.ru

²E-mail: alsu_sam@mail.ru

Введение

Опишем базовые соотношения математической модели космологической эволюции классического скалярного Хиггса поля основанной на асимметричном скалярном дублете и ее основные свойства. В качестве полевой модели рассмотрим самосогласованную систему уравнений Эйнштейна, классического Φ и фантомного ϕ скалярных полей, с потенциалом Хиггса [1], которому соответствует функция Лагранжа ^{1 2}

$$L = \frac{1}{16\pi} (g^{lm} \Phi_{,l} \Phi_{,m} - 2V(\Phi)) + \frac{1}{16\pi} (-g^{lm} \varphi_{,l} \varphi_{,m} - 2v(\varphi)) + \frac{1}{8\pi} \gamma \Phi^2 \varphi^2, \quad (1)$$

где

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4} \left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha} \right)^2, \quad v(\varphi) = -\frac{\beta}{4} \left(\varphi^2 - \frac{\mu^2}{\beta} \right)^2 \quad (2)$$

– потенциальная энергия Хиггса соответствующих скалярных полей, α и β константы их самодействия, γ – константа взаимодействия компонент дублета, m и μ – их массы квантов.

Канонический тензор энергии-импульса (см., например, [3]) скалярного дублета относительно функции Лагранжа (1) имеет вид

$$8\pi T_i^k = \Phi_{,i} \Phi^{,k} - \frac{\delta_i^k}{2} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + \delta_i^k V(\Phi) - \phi_{,i} \phi^{,k} + \frac{\delta_i^k}{2} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + \delta_i^k v(\phi) - \delta_i^k \gamma \Phi^2 \phi^2. \quad (3)$$

Гравитационное поле скалярного дублета описывается уравнениями Эйнштейна с тензором энергии-импульса T_i^k (3) и затравочной космологической постоянной Λ_0

$$G_i^k = R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k = 8\pi T_i^k + \Lambda_0 \delta_i^k. \quad (4)$$

Затравочное значение космологической постоянной Λ_0 связана с её наблюдаемым значением Λ , получающимся при изъятии постоянного слагаемого в потенциальной энергии, соотношением

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{m^4}{4\alpha} - \frac{\mu^4}{4\beta}. \quad (5)$$

Функции Лагранжа (1) соответствуют уравнения скалярных полей:

$$\Delta \Phi + V'_\Phi - 2\gamma \Phi \phi^2 = 0; \quad (6)$$

$$-\Delta \phi + v'_\phi - 2\gamma \Phi^2 \phi = 0, \quad (7)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (8)$$

1. Полная система уравнений для метрики Фридмана

В случае пространственно-плоской метрики Фридмана

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (9)$$

- где $a(t)$ - масштабный фактор и не зависящих от трехмерных координат скалярных полей $\Phi(t)$, $\phi(t)$ тензор энергии-импульса скалярного поля принимает изотропную структуру

$$T_k^i = (\varepsilon + p) \delta_k^i \delta^4 - p \delta_k^i, \quad (10)$$

¹Здесь и далее используется планковская система единиц $G = \hbar = c = 1$.

²The work is performed according to the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University.

где

$$\varepsilon = T_4^4 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \right) + \frac{1}{8\pi} \left(-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + v(\phi) \right) - \frac{1}{8\pi} \gamma \Phi^2 \phi^2; \quad (11)$$

$$p = -T_\alpha^\alpha = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - V(\Phi) \right) - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + v(\phi) \right) + \frac{1}{8\pi} \gamma \Phi^2 \phi^2, \quad (12)$$

так что

$$\varepsilon + p = \frac{1}{8\pi} (\dot{\Phi}^2 - \dot{\phi}^2), \quad (13)$$

где ε - плотность энергии и p - давление космологической системы.

Уравнения полей скалярного дублета (6)–(7) в метрике (9) принимают вид

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + V'_\Phi - 2\gamma\Phi\phi^2 = 0; \quad (14)$$

$$-\ddot{\phi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + v'_\phi - 2\gamma\Phi^2\phi = 0. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что из всех уравнений Эйнштейна (4) только два нетривиальных:

$$\frac{4}{4} : 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - v(\phi) + \gamma\Phi^2\phi^2 - \Lambda_0 = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha} : 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - v(\phi) + \gamma\Phi^2\phi^2 - \Lambda_0 = 0 \quad (17)$$

Придадим этим уравнениям более компактный вид, переходя от независимой переменной $a(t)$ к переменной $H(t)$ (см. [4] и содержащиеся там комментарии). Для этого продифференцируем по времени уравнение Эйнштейна (16)

$$\begin{aligned} \frac{6\ddot{a}\dot{a}}{a^2} - \frac{6\dot{a}^3}{a^3} - \ddot{\Phi}\dot{\Phi} - V'_\Phi\dot{\Phi} + \ddot{\phi}\dot{\phi} - v'_\phi\dot{\phi} \\ - 2\gamma\Phi\dot{\Phi}\dot{\phi}^2 - 2\gamma\Phi^2\dot{\phi}\dot{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Умножая обе части уравнений поля (14) и (15) соответственно на $\dot{\Phi}$ и $\dot{\phi}$ и подставляя результат в (16), получим

$$3\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \dot{\Phi}^2 - \dot{\phi}^2 \right) = 0. \quad (19)$$

Вводя далее параметр Хаббла

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (20)$$

перепишем (19) в форме

$$\begin{aligned} 6H \left(\dot{H} + \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right) = 0 \Rightarrow \\ \dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что уравнение (21) можно записать в эквивалентном виде, складывая уравнения (16) и (17) и применяя подстановку (6)

$$\dot{H} = -3H^2 + \frac{m^2\Phi^2}{2} - \frac{\alpha\Phi^4}{4} + \frac{\mu^2\phi^2}{2} - \frac{\beta\phi^4}{4} - \gamma\Phi^2\phi^2 + \Lambda. \quad (22)$$

1.1. Нормальная система динамических уравнений

Полученной системе уравнений можно придать нормальный вид, т.е., представить её в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка разрешенных относительно производных:

$$\dot{\Phi} = Z, \quad (23)$$

$$\dot{Z} = -3HZ - m^2\Phi + \alpha\Phi^3 + 2\gamma\Phi\phi^2, \quad (24)$$

$$\dot{\phi} = z, \quad (25)$$

$$\dot{z} = -3Hz + \mu^2\phi - \beta\phi^3 - 2\gamma\Phi^2\phi, \quad (26)$$

$$\dot{H} = -\frac{Z^2}{2} + \frac{z^2}{2}. \quad (27)$$

Также с учетом (22) эту систему можно записать в следующем виде, удобным для качественного анализа:

$$\dot{\Phi} = Z, \quad (28)$$

$$\dot{Z} = -3HZ - m^2\Phi + \alpha\Phi^3 + 2\gamma\Phi\phi^2, \quad (29)$$

$$\dot{\phi} = z, \quad (30)$$

$$\dot{z} = -3Hz + \mu^2\phi - \beta\phi^3 - 2\gamma\Phi^2\phi, \quad (31)$$

$$\dot{H} = -3H^2 + \frac{m^2\Phi^2}{2} - \frac{\alpha\Phi^4}{4} + \frac{\mu^2\phi^2}{2} - \frac{\beta\phi^4}{4} - \gamma\Phi^2\phi^2 + \Lambda. \quad (32)$$

Таким образом, нормальная система динамических уравнений (28)–(32) описывает фазовые траектории в пятимерном фазовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^5 = \{\Phi, Z, \phi, z, H\}$. Каждой конкретной фазовой траектории, определяемой начальными условиями, в этом фазовом пространстве соответствует конкретная космологическая модель. Можно показать, что уравнение (16) является первым интегралом динамической системы (28)–(32):

$$3H^2 - \frac{Z^2}{2} + \frac{\alpha\Phi^4}{4} - \frac{m^2\Phi^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{\beta\phi^4}{4} - \frac{\mu^2\phi^2}{2} + \gamma\Phi^2\phi^2 - \Lambda = 0. \quad (33)$$

Уравнение (33) определяет гиперповерхность в фазовом пространстве динамической системы (28)–(32), на которой лежат все фазовые траектории этой системы. В дальнейшем эту гиперповерхность будем называть *гиперповерхностью Эйнштейна-Хиггса*.

Уравнение (33) можно записать в форме

$$3H^2 - \mathcal{E} = 0, \quad (34)$$

где неотрицательная величина \mathcal{E} – *эффективная энергия системы*:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - \frac{\alpha\Phi^4}{4} + \frac{m^2\Phi^2}{2} - \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\beta\phi^4}{4} + \frac{\mu^2\phi^2}{2} - \gamma\Phi^2\phi^2 + \Lambda \geq 0, \quad (35)$$

Отметим полезное соотношение для определения *инвариантного космологического ускорения* Ω :

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa), \quad (36)$$

где $\kappa = \frac{\varepsilon}{p}$ – *эффективный коэффициент баротропы*.

В работе проведен детальный качественный анализ динамической системы (28)–(32) и показано, что при

$$\mu^4 + 4\beta\Lambda > 0$$

динамическая системы (28)–(32) имеет две и только две устойчивые (притягивающие) особые точки $M_{0,\pm}^+$.

Кроме того, исследованы асимптотики решений системы (28)–(32) вблизи космологической сингулярностей и показано, что к состоянию сингулярности модель приближается со значением эффективного коэффициента баротропы $\varkappa = 1$, что соответствует предельному жесткому уравнению состояния.

1.2. Модель с бесконечными прошлым и будущим с начальными условиями вблизи особой точки $M_{0,0}^+; \Lambda = 0$

В качестве примера рассмотрим модель с фундаментальными параметрами \mathbf{P} и начальными условиями \mathbf{I} (подробности см. в [5])

$$\mathbf{P} \equiv [[\alpha, \beta, m, \mu], \Lambda, \gamma] = \mathbf{P}^{(1)} = [[1, 1, 1, 1], 0, 5 \cdot 10^{-5}]; \quad (37)$$

$$\mathbf{I} \equiv [\Phi(0), Z(0), \phi(0), z(0), H(0) = e \cdot H_0] = \mathbf{I}^{(1)} = [10^{-3}, 0, 10^{-5}, 0, 1], \quad (38)$$

где $e = \pm 1$, H_0 – неотрицательный корень уравнения (33).

Данная модель относится к классу космологических моделей с бесконечными прошлым и будущим. На Рис. 1 показана эволюция геометрических факторов $\xi(t)$ и $H(t)$, а на Рис. 2 эволюция скалярных потенциалов для модели с параметрами $\mathbf{P}^{(1)}$ и начальными условиями $\mathbf{I}^{(1)}$. Как можно видно из графиков на Рис. 1, данная модель имеет инфляционные начало и конец, причем на начальном этапе происходит инфляционное сжатие с $H \approx -0.289$, которое сменяется инфляционным расширением на конечном этапе с $H \approx +0.289$. Указанные инфляционные этапы связаны “мостиком” с очень малым постоянным значением параметра Хаббла $H \approx 4 \cdot 10^{-4}$, $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow a(t) \approx 1$. Можно сказать, что на интервале $t \in [-15, 15]$ Вселенная является почти Евклидовой. Поскольку полная энергия космологической системы \mathcal{E} согласно (34) равна $3H^2$, то на этом промежуточном этапе полная энергия стремится к нулю $\mathcal{E} \approx 10^{-7}$. Заметим, что предположение о существовании Евклидовых циклов было сформулировано в работе авторов [2].

При этом как раз на промежуточном этапе происходят сильные колебания потенциалов скалярных полей: потенциал классического поля Φ выходит из устойчивого состояния $\Phi = 0$ и после нескольких колебаний возвращается в прежнее состояние. Потенциал фантомного поля ϕ переходит из устойчивого состояния $\phi = 1$ в неустойчивое состояние $\phi = 0$ и затем возвращается в прежнее состояние.

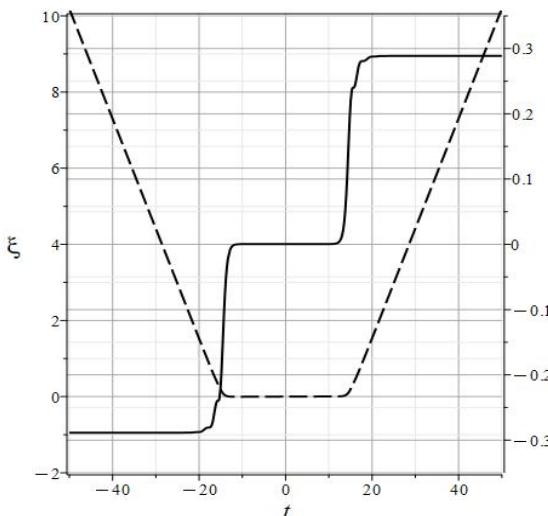


Рис. 1. $\xi(t)$ – штриховая линия; $H(t)$ – сплошная линия.

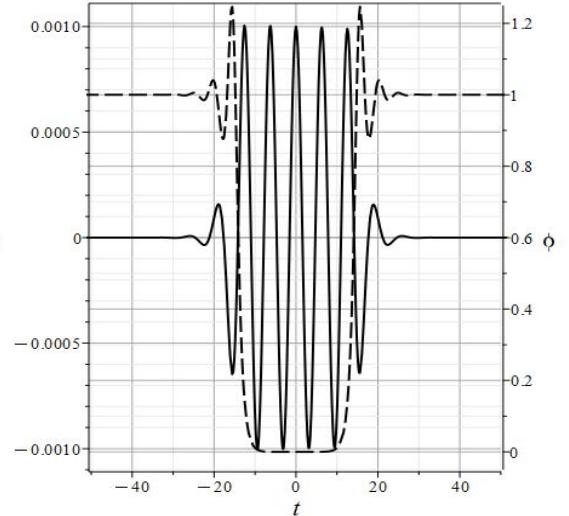


Рис. 2. Фазовая траектория модели $\mathbf{P}^{(1)}$ в плоскости $\{\Phi, \phi\}$.

Заключение

1. В зависимости от значений фундаментальных параметров космологические модели на основе асимметричного скалярного Хиггсова дублета возможен широкий спектр типов её поведения, среди которых модели с бесконечными инфляционными прошлым и будущим, модели с начальной сингулярностью и бесконечным инфляционным будущим, с бесконечным инфляционным прошлым и конечным будущим (Big Rip), с конечными прошлым и будущим.
2. В частности при достаточно больших значениях константы взаимодействия $\gamma \gtrsim 0.49$ космологическая эволюция быстро заканчивается Big Rip'ом, что делает непригодными космологические модели на основе асимметричного скалярного Хиггсова дублета с большими значениями константы взаимодействия.
3. В ряде случаев модели имеют точки отскока, в которых происходит процесс перехода из одного устойчивого состояния в другое.
4. В ряде случаев модели допускают фазу почти Евклидова цикла, на котором Вселенная является почти Евклидовой за счет практически полной компенсации энергии полей дублета.

Список литературы

1. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологических моделей основанных на асимметричном скалярном дублете: классическое + фантомное скалярное поле. I. Случай минимально взаимодействующих скалярных полей: качественный анализ. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2017. № 2(19). С. 36-52.
2. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. О предельных евклидовых циклах в космологических моделях, основанных на скалярных полях. *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2019. Т. 62, №4. С. 55-61
3. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press. Oxford- New York-Toronto-Sydney- Paris- Frankfurt, 1971.
4. Ignat'ev Yu. G., Ignat'ev D. Yu. Short-Wave Approximation for Macroscopic Cosmology with Higgs Scalar Field. *Gravitation and Cosmology*. 2020; 26(3): pp. 249–258.
5. Самигуллина А.Р. Программный комплекс исследования нелинейных динамических систем, основанных на асимметричном скалярном Хиггсовом дублете с потенциальным взаимодействием между компонентами, построение гиперповерхности Эйнштейна-Хиггса. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2024. №.2(47). С. 18-25.

References

1. Ignat'ev Yu. G. Qualitative and numerical analysis of cosmological models based on an asymmetric scalar doublet: classical + phantom scalar field. I. The case of minimally interacting scalar fields: qualitative analysis. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2017, 2(19), pp.36-52. (in Russian).
2. Ignat'ev Yu. G., Samigullina A. R. Yu. G. Ignat'ev, A. R. Samigullina. On euclidean limit cycles in cosmological models based on scalar fields. *Rus. Phys. J.*, 2019, 62(4), pp.618-626.
3. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press. Oxford- New York-Toronto-Sydney- Paris- Frankfurt, 1971. 374p.
4. Ignat'ev Yu. G., Ignat'ev D. Yu. Short-Wave Approximation for Macroscopic Cosmology with Higgs Scalar Field. *Gravitation and Cosmology*, 2020, 26(3), pp.249–258.
5. Samigullina A.R. Software package for studying nonlinear dynamic systems based on an asymmetric scalar Higgs doublet with potential interaction between components, construction of the Einstein-Higgs hypersurface. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2024, 2(47), pp.18-25. (in Russian).

Авторы

Игнатьев Юрий Геннадиевич, в.н.с., д.ф.-м.н., профессор, Казанский федеральный университет, Институт физики, ул. Кремлевская, д. 16А, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: yurii.ignatev.1947@yandex.ru

Самигуллина Алсу Ринатовна, м.н.с, Казанский федеральный университет, Институт физики, ул. Кремлевская, д. 16А, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: alsu_sam@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Игнатьев Ю. Г., Самигуллина А. Р. Космологические модели на основе асимметричного скалярного Хиггсова дублета с потенциальным взаимодействием между компонентами. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2025. № 1. С. 94–100.

Authors

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Institute of Physics, Kremlyovskaya str., 16A, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: yurii.ignatev.1947@yandex.ru

Samigullina Alsu Rinatovna, junior researcher, Kazan Federal University, Institute of Physics, Kremlyovskaya str., 16A, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: alsu_sam@mail.ru

Please cite this article in English as:

Ignat'ev Yu. G., Samigullina A. R. Cosmological models based on an asymmetric scalar Higgs doublet with potential interactions between components. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 94–100.