

УДК 531.51, 530.12, 519.713

© Игнатьев Ю. Г., Кох И. А., 2025

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА АСИММЕТРИЧНОМ СКАЛЯРНОМ ДУБЛЕТЕ С КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ КОМПОНЕНТ

Игнатьев Ю. Г.^{a,1}, Кох И. А.^{a,2}^a Казанский федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Проведены детальный качественный анализ и численное моделирование эволюции космологических моделей, основанных на асимметричном дублете классического и фантомного скалярных Хиггсовых полей с кинетической связью между компонентами. Проведено численное моделирование математической модели космологической эволюции асимметричного скалярного дублета с кинетическим взаимодействием между компонентами. Рассмотрен широкий спектр значений фундаментальных параметров и начальных условий модели. Выявлены различные типы поведения: модели с бесконечным инфляционным прошлым и будущим – с точкой отскока и без неё, модели с конечным прошлым и бесконечным будущим, с бесконечным прошлым и конечным будущим (Big Rip), а также модели с конечными прошлым и будущим. На основе численного анализа исследовано поведение моделей вблизи начальной сингулярности и Большого разрыва, показано, что в обоих случаях коэффициент баротропии стремится к единице, что соответствует предельно жёсткому состоянию материи вблизи сингулярностей. Приведён численный пример космологической генерации классической компоненты скалярного дублета его фантомной компонентой. Проведена оценка рождения скорости фермионных пар скалярным полем вблизи точек отскока и показано, что скалярное поле на холодной стадии Вселенной может обеспечить рождение необходимого числа массивных скалярно заряженных фермионов.

Ключевые слова: космологическая модель, фантомные и классические скалярные поля, кинетическое взаимодействие, качественный анализ, асимптотическое поведение, численное моделирование.

COSMOLOGICAL MODELS BASED ON ASYMMETRIC SCALAR DOUBLET WITH KINETIC COUPLING OF COMPONENTS

Ignat'ev Yu. G.^{a,1}, Kokh I. A.^{a,2}^a Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

A detailed qualitative analysis and numerical modeling of the evolution of cosmological models based on an asymmetric doublet of classical and phantom scalar Higgs fields with a kinetic coupling between the components were carried out. Numerical modeling of a mathematical model of the cosmological evolution of an asymmetric scalar doublet with kinetic interaction between the components was carried out. A wide range of values of fundamental parameters and initial conditions of the model is considered. Various types of behavior have been identified: models with an infinite inflationary past and future - with and without a rebound point, models with a finite past and infinite future, with an infinite past and finite future (Big Rip), as well as models with a finite past and future. Based on numerical analysis, the behavior of the models near the initial singularity and the Big Rip is studied; it is shown that in both cases the barotropic coefficient tends to unity, which corresponds to the extremely rigid state of matter near the singularities. A numerical example of the cosmological generation of the classical component of a scalar doublet by its phantom component is given. An assessment was made of the birth of the velocity of fermion pairs by a scalar field near the rebound points and it was shown that a scalar field at the cold stage of the Universe can ensure the birth of the required number of massive scalarly charged fermions.

Keywords: cosmological model, phantom and classical scalar fields, kinetics interaction, quality analysis, asymptotic behavior, numerical modelling.

¹E-mail: yurii.ignatev.1947@yandex.ru²E-mail: irina.alexandrovna.kokh@gmail.com

PACS: 04.20.Kd, 04.50.Kd

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.88-93

Введение

В [1] была подробно исследована космологическая модель, основанная на *асимметричном скалярном дублете Хиггса*, в котором классическая Φ и фантомная φ компоненты взаимодействуют лишь посредством гравитационного поля. Заметим, что ранее в [2–4] были получены и изучены некоторые однопараметрические классы точных решений для космологической модели, основанной на классическом и фантомном полях при специальном выборе функции потенциальной энергии. Позже в работе [5] были исследованы космологические модели, основанные на скалярном квинтоне с взаимодействием между классической и фантомной компонентами при специальном выборе функции потенциальной энергии в виде экспоненты. Далее в [6, 7] на основе теоретической модели статистической системы скалярно заряженных фермионов с Хиггсовым потенциалом взаимодействия [8] были исследованы космологические модели, в которых взаимодействие между компонентами асимметричного скалярного дублета осуществлялось посредством скалярно заряженных фермионов. В этих работах представлена богатая коллекция космологических моделей, среди которых есть модели с конечным прошлым (начальная сингулярность возникает в конечный момент времени $t_0 > -\infty$) и конечным будущим (конечная сингулярность возникает в конечный момент времени $t_\infty < +\infty$). В частности, в [7] было исследовано поведение космологических моделей вблизи сингулярностей $t \rightarrow t_s$ и показано, что вблизи сингулярностей достигается суммарное ультрарелятивистское уравнение состояния материи

$$\kappa \equiv \frac{p}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{3}, \text{ (at } t \rightarrow t_s \text{)}.$$

Далее, в [9] были изучены трансформационные свойства космологических моделей по отношению к преобразованиям подобия фундаментальных констант.

В связи с проблемами образования сверхмассивных чёрных дыр в ранней Вселенной в серии работ [10] – [11] была построена теория скалярно-гравитационной неустойчивости систем скалярно заряженных фермионов и предложена модель образования сверхмассивных чёрных дыр, удовлетворительно объясняющая основные характеристики этих объектов. Таким образом, модели скалярных полей с нелинейным взаимодействием могут играть важную роль в космологии и астрофизике ранней Вселенной. В рассмотренной выше серии работ такое нелинейное взаимодействие компонент обеспечивалось их взаимодействием с носителями скалярных зарядов. Эта модель, однако, обладает некоторыми недостатками, – во-первых, чрезвычайной математической сложностью, затрудняющей её аналитическое исследование, а, во-вторых, недостаточно убедительной физической аргументацией появления на ранних стадиях космологической эволюции скалярно заряженных фермионов.

В связи с этим возникает закономерный вопрос: нельзя ли построить космологическую модель на чисто полевой основе, отражающей основные черты модели со скалярными носителями зарядов? В этой статье мы исследуем такую двухполевую модель скалярного поля с кинетическим взаимодействием между компонентами.

1. Основные уравнения и анализ

Рассмотрим асимметричный скалярный Хиггсов дублет (см., например, [1]) с кинетической связью между компонентами. Соответствующая простейшая функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{16\pi} (g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - 2V(\Phi)) + \frac{1}{16\pi} (-g^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} - 2v(\varphi)) + \frac{1}{8\pi} \gamma \left(g^{ik} \Phi_{,i} \varphi_{,k} \right)^p, \quad (1)$$

где

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4} \left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha} \right)^2; \quad v(\varphi) = -\frac{\beta}{4} \left(\varphi^2 - \frac{\mu^2}{\beta} \right)^2 \quad (2)$$

– потенциальная энергия соответствующих скалярных полей, α и β – константы их самодействия, m и μ – их массы квантов, γ – константа кинетического взаимодействия, $p \geq 1$ – некоторое целое число. В отличие от [1] в рассматриваемой модели был конкретизирован знак перед потенциалом классического и фантомного полей, отвечающий реальной физической модели.

Переходя к стандартным обозначениям качественной теории динамических систем (см. [13])

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n); i = \overline{1, n},$$

запишем систему уравнений Эйнштейна и хиггсовых полей в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= Z \quad (\equiv F_1); \quad \dot{Z} = -3HZ - \frac{m^2\Phi - \alpha\Phi^3}{1 + \gamma^2} - \gamma \frac{\mu^2\varphi - \beta\varphi^3}{1 + \gamma^2} \quad (\equiv F_2); \\ \dot{\varphi} &= z, \quad (\equiv F_3); \quad \dot{z} = -3Hz + \frac{\mu^2\varphi - \beta\varphi^3}{1 + \gamma^2} - \gamma \frac{m^2\Phi - \alpha\Phi^3}{1 + \gamma^2} \quad (\equiv F_4); \\ \dot{H} &= -\frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{2}z^2 - \gamma Zz \quad (\equiv F_5). \end{aligned} \quad (3)$$

При этом первый интеграл динамической системы (3) можно записать в виде:

$$3H^2 - \frac{Z^2}{2} + \frac{\alpha\Phi^4}{4} - \frac{m^2\Phi^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{\beta\varphi^4}{4} - \frac{\mu^2\varphi^2}{2} - \gamma Zz - \Lambda = 0. \quad (4)$$

Аналогично [12] можно доказать [14] ряд свойств динамической системы (3), в частности, свойства инвариантности её и характеров её особых точек по отношению к преобразованию подобия фундаментальных параметров, а также асимптотические свойства вблизи космологических сингулярностей.

На Рис. 1 показаны графики эволюции геометрических факторов $\xi(t)$ и $H(t)$, а на Рис. 2 эволюция скалярных потенциалов $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$ в модели с параметрами (подробности см. в [15]):

$$\mathbf{P} \equiv [\alpha, \beta, m, \mu, \gamma, \Lambda] = [0.01, 0.01, 0.1, 0.1, 10^{-2}, 10^{-6}]; \quad (5)$$

$$\mathbf{I} \equiv [\Phi_0, Z_0, \varphi_0, z_0, e] = [0, 0, 0.01, 0, 1], \quad (e = \pm 1), \quad (6)$$

где знак e соответствует выбору положительного или отрицательного решения уравнения (4) относительно начального значения параметра Хаббла.

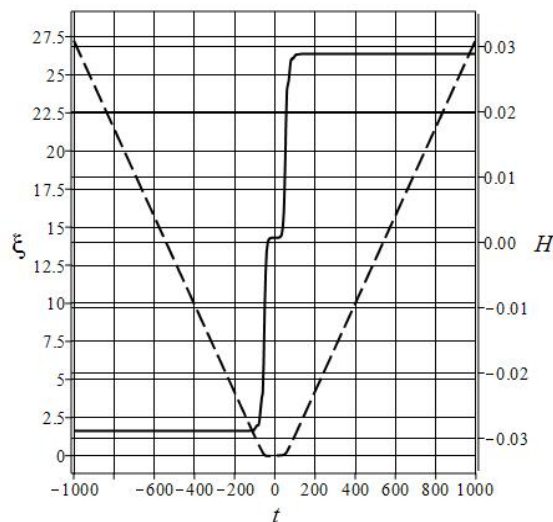


Рис. 1. Эволюция геометрических факторов в модели с параметрами \mathbf{P} и начальными условиями \mathbf{I} : $\xi(t)$ – штриховая и $H(t)$ – сплошная линия.

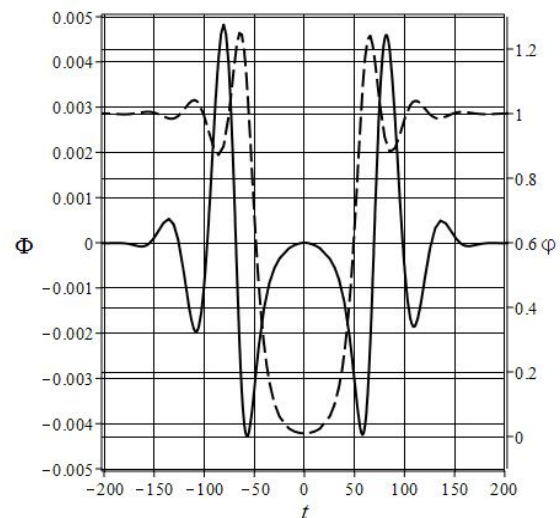


Рис. 2. Эволюция скалярных полей в модели с параметрами \mathbf{P} и начальными условиями \mathbf{I} : $\Phi(t)$ – сплошная и $\varphi(t)$ – штриховая линия (крупный план).

Таким образом, в бесконечном прошлом Вселенная стартует из состояния, *близкого* к особой точке $M_{0,+1}^- = [0, 0, +1, 0, -0.0289]$ и находится в состоянии инфляционного сжатия. Вблизи точки отскока $t_b \approx 0$ в системе возникают колебания фантомного и классического скалярных полей, после чего система переходит в состояние инфляционного расширения, соответствующего особой точке $M_{0,+1}^+ = [0, 0, +1, 0, +0.0289]$, восстанавливая первоначальные значения потенциалов скалярных полей.

В данной модели интервал колебания потенциалов скалярных полей, на котором потенциал классического поля достигает значений порядка $|\Phi(t_b)| \sim 0.005$, а потенциал фантомного поля обращается в нуль, занимает порядка 300 планковских времён. При переходе с помощью масштабного преобразования к реальным величинам фундаментальных констант для масштабов КХД-теории этот период может растянуться до $3 \cdot 10^4$ планковских времен, а для СМ – до $3 \cdot 10^{15} t_{Pl}$.

Заключение

Подводя итоги, укажем следующие основные результаты.

- Предложена и исследована модель эволюции Вселенной, основанной на асимметричном Хиггсовом скалярном дублете с кинетической связью, пропорциональной произведению производных компонент скалярного дублета. В частности, проведён качественный анализ динамической системы модели, исследованы и доказаны свойства симметрии модели по отношению к преобразованию отражения и подобия.
- Выявлены основные типы поведения космологической модели в зависимости от фундаментальных параметров и начальных условий. Выявлены случаи наличия первоначальной и конечной космологических сингулярностей и точек отскока.
- Показано, что вблизи точек отскока фантомная компонента φ скалярного дублета генерирует его классическую компоненту Φ .
- Доказано аналитически и подтверждено численным моделированием асимптотическое поведение космологической модели вблизи точек начальной сингулярности и Большого разрыва, соответствующее коэффициенту баротропы $\kappa = 1$ ($p = \varepsilon$).
- Проведены оценки вероятности рождения фермионных пар в сильном переменном скалярном поле вблизи точек отскока.

Все выявленные особенности космологических моделей, основанных на асимметричном скалярном дублете: наличие начальных сингулярностей, точек отскока и точек большого разрыва, генерация компонент скалярного дублета и др., аналогичны особенностям космологических моделей, основанных на системах скалярно заряженных фермионов [8], что, по-видимому, даёт возможность замены математически сложной модели образования сверхмассивных чёрных дыр [10] – [11] более простой, построенной на чисто полевой основе. Кроме того, важным обстоятельством является также достаточно интенсивное рождение фермионных пар скалярным полем вблизи точек отскока. Благодаря этому фактору необходимое число скалярно заряженных фермионов может быть получено независимо от процессов гравитационного рождения пар, причём на стадии холодной Вселенной.

Список литературы

1. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Complete cosmological model based on a asymmetric scalar Higgs doublet. *Theoret. Math. Phys.*, 2021, no. 207:1, pp. 514-552; arXiv:2104.01054 [gr-qc].
2. Aref'eva I.Ya., Koshelev A.S., Vernov S.Yu. Crossing of the $w=-1$ Barrier by D3-brane Dark Energy Model. *Phys. Rev. D*, 2005, no. 72:6, 064017; arXiv: astro-ph/0507067.
3. Aref'eva I.Ya., Vernov S.Yu., Koshelev A.S. Exact solution in a string cosmological model. *Theoret. Math. Phys.*, 2006, no. 148(1), pp. 895-909; arXiv:astro-ph/0412619.

4. Vernov S.Yu. Construction of exact solutions in two-field cosmological models. *Theoret. Math. Phys.*, 2008, no. 155(1), pp. 544-556; arXiv:astro-ph/0612487.
5. Leon G., Paliathanasis A., Morales-Martinez J.L. The past and future dynamics of quintom dark energy models. *Eur. Phys. J. C*, 2018, no. 78, 753; arXiv:1808.05634 [gr-qc].
6. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Cosmological evolution of a statistical system of degenerate scalar-charged fermions with an asymmetric scalar doublet. I. Two-component system of assorted charges. *Gravit. Cosmol.*, 2021, no. 27:4, pp. 338-349; arXiv:2203.11946 [gr-qc].
7. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Cosmological Evolution of a Statistical System of Degenerate Scalarly Charged Fermions with an Asymmetric Scalar Doublet. II. One-Component System of Doubly Charged Fermions. *Gravit. Cosmol.*, 2022, no. 28:1, pp. 10-24; arXiv:2203.12766 [gr-qc].
8. Ignat'ev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Cosmological models based on a statistical system of scalar charged degenerate fermions and an asymmetric Higgs scalar doublet. *Theoret. Math. Phys.*, 2021, no. 209:1, pp. 1437-1472; arXiv:2111.00492 [gr-qc].
9. Ignat'ev Yu.G. Similarity of cosmological models and its application to the analysis of cosmological evolution. *Theoret. Math. Phys.*, 2024, no. 219:1, pp. 688-703; arXiv:2307.13761 [gr-qc].
10. Ignat'ev Yu.G. Stability of the Cosmological System of Degenerated Scalarly Charged Fermions and Higgs Scalar Fields. I. Mathematical Model of Linear Plane Perturbations. *Gravit. Cosmol.*, 2021, no. 27:1, pp. 30-35; (2021, no. 27:1, 36-41; 2022, no. 28:1, pp. 25-36; 2022, no. 28:3, pp. 275-290; 2022, no. 28:4, pp. 375-381; 2023, no. 29:2, pp. 163-176; 2023, no. 29:4, pp. 327-344; 2024, no. 30:1, pp. 40-47; 2024, no. 30:2, pp. 141-148.
11. Ignat'ev Yu.G. Evolution of spherical perturbations in the cosmological environment of degenerate scalar-charged fermions with a scalar Higgs coupling. *Theoret. Math. Phys.*, 2023, no. 215:3, pp. 862-892; arXiv:2306.17185 [gr-qc].
12. Ignat'ev Yu.G. Similarity of cosmological models and its application to the analysis of cosmological evolution. *Theoret. Math. Phys.*, 2024, no. 219:1, pp. 688-703; arXiv:2307.13761v1 [gr-qc].
13. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 320 с.
14. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Cosmological models based on an asymmetric scalar doublet with kinetic coupling of components. I. General properties of the cosmological model. *Grav. and Cosmol.*, 2024, no. 30:4, pp. 408-425; arXiv:2405.13607 [gr-qc].
15. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Cosmological Models Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Kinetic Coupling of Components. II. Numerical Modeling. *Grav. and Cosmol.*, 2024, no. 30:4, pp. 426-440; arXiv:2406.00742 [gr-qc].

References

1. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Complete cosmological model based on a asymmetric scalar Higgs doublet. *Theoret. Math. Phys.*, 2021, no. 207:1, pp. 514-552; arXiv:2104.01054 [gr-qc].
2. Aref'eva I.Ya., Koshelev A.S., Vernov S.Yu. Crossing of the $w=-1$ Barrier by D3-brane Dark Energy Model. *Phys. Rev. D*, 2005, no. 72:6, 064017; arXiv: astro-ph/0507067.
3. Aref'eva I.Ya., Vernov S.Yu., Koshelev A.S. Exact solution in a string cosmological model. *Theoret. Math. Phys.*, 2006, no. 148(1), pp. 895-909; arXiv:astro-ph/0412619.
4. Vernov S.Yu. Construction of exact solutions in two-field cosmological models. *Theoret. Math. Phys.*, 2008, no. 155(1), pp. 544-556; arXiv:astro-ph/0612487.
5. Leon G., Paliathanasis A., Morales-Martinez J.L. The past and future dynamics of quintom dark energy models. *Eur. Phys. J. C*, 2018, no. 78, 753; arXiv:1808.05634 [gr-qc].
6. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Cosmological evolution of a statistical system of degenerate scalar-charged fermions with an asymmetric scalar doublet. I. Two-component system of assorted charges. *Gravit. Cosmol.*, 2021, no. 27:4, pp. 338-349; arXiv:2203.11946 [gr-qc].
7. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Cosmological Evolution of a Statistical System of Degenerate Scalarly Charged Fermions with an Asymmetric Scalar Doublet. II. One-Component System of Doubly Charged Fermions. *Gravit. Cosmol.*, 2022, no. 28:1, pp. 10-24; arXiv:2203.12766 [gr-qc].

8. Ignat'ev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Cosmological models based on a statistical system of scalar charged degenerate fermions and an asymmetric Higgs scalar doublet. *Theoret. Math. Phys.*, 2021, no. 209:1, pp. 1437-1472; arXiv:2111.00492 [gr-qc].
9. Ignat'ev Yu.G. Similarity of cosmological models and its application to the analysis of cosmological evolution. *Theoret. Math. Phys.*, 2024, no. 219:1, pp. 688-703; arXiv:2307.13761 [gr-qc].
10. Ignat'ev Yu.G. Stability of the Cosmological System of Degenerated Scalarly Charged Fermions and Higgs Scalar Fields. I. Mathematical Model of Linear Plane Perturbations. *Gravit. Cosmol.*, 2021, no. 27:1, pp. 30-35; (2021, no. 27:1, 36-41; 2022, no. 28:1, pp. 25-36; 2022, no. 28:3, pp. 275-290; 2022, no. 28:4, pp. 375-381; 2023, no. 29:2, pp. 163-176; 2023, no. 29:4, pp. 327-344; 2024, no. 30:1, pp. 40-47; 2024, no. 30:2, pp. 141-148.
11. Ignat'ev Yu.G. Evolution of spherical perturbations in the cosmological environment of degenerate scalar-charged fermions with a scalar Higgs coupling. *Theoret. Math. Phys.*, 2023, no. 215:3, pp. 862-892; arXiv:2306.17185 [gr-qc].
12. Ignat'ev Yu.G. Similarity of cosmological models and its application to the analysis of cosmological evolution. *Theoret. Math. Phys.*, 2024, no. 219:1, pp. 688-703; arXiv:2307.13761v1 [gr-qc].
13. Bogoyavlensky O.I. *Metody kachestvennoj teorii dinamicheskikh sistem v astrofizike i gazovoj dinamike* [The methods of the qualitative theory of dynamic systems in astrophysics and gas dynamics.] Nauka. Moscow, 1980.
14. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Cosmological models based on an asymmetric scalar doublet with kinetic coupling of components. I. General properties of the cosmological model. *Grav. and Cosmol.*, 2024, no. 30:4, pp. 408-425; arXiv:2405.13607 [gr-qc].
15. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Cosmological Models Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Kinetic Coupling of Components. II. Numerical Modeling. *Grav. and Cosmol.*, 2024, no. 30:4, pp. 426-440; arXiv:2406.00742 [gr-qc].

Авторы

Игнат'ев Юрий Геннадиевич, д.ф.-м.н., профессор, НИЛ Космология, институт физики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: yurii.ignatev.1947@yandex.ru

Кох Ирина Александровна, ассистент, институт математики и механики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: irina.alexandrovna.kokh@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Игнат'ев Ю. Г., Кох И. А. Космологические модели, основанные на асимметричном скалярном дублете с кинетической связью компонент. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2025. № 1. С. 88–93.

Authors

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Dr. Sci., Professor, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya st., 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: yurii.ignatev.1947@yandex.ru

Kokh Irina Alexandrovna, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya st., 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: irina.alexandrovna.kokh@gmail.com

Please cite this article in English as:

Ignat'ev Yu. G., Kokh I. A. Cosmological models based on asymmetric scalar doublet with kinetic coupling of components. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 88–93.