УДК 524.834

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ *

Камалитдинов Р. И.[a,1], Сушков С. В.[a,2]

[a] Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Мы рассматриваем космологические возмущения в теории гравитации с неминимальной кинетической связью. С этой целью нами выводятся уравнения для скалярных, векторных и тензорных мод возмущений. Анализ эволюции векторных мод проводится для случая произвольной пространственной кривизны, а тензорные и скалярные моды рассматриваются в модели плоской Вселенной ($K = 0$). Показано, что их поведение в эре квази - де Ситтера кардинально отличается от аналогичного поведения в классической космологии.

Ключевые слова: космологические возмущения; инфляция; гравитационные волны.

COSMOLOGICAL PERTURBATIONS IN THE THEORY OF GRAVITY WITH NON-MINIMAL KINETIC COUPLING

Kamalitdinov R. I.[a,1], Sushkov S. V.[a,2]

[a] Kazan State University, Kazan, 420008, Russia.

In this paper, we consider cosmological perturbations in a theory with non-minimal kinetic coupling. We derive a set of equations for scalar, vector and tensor modes. The vector modes are analyzed for arbitrary curvature. The tensor modes and the scalar modes are analyzed for the open Universe model ($K = 0$). It is shown that their behavior in quasi - de Sitter differs cardinally from the analogous behavior of modes in classical cosmology.

Keywords: cosmological perturbations; inflation; gravitational waves.

PACS: 04.50.Kd, 04.30.-w
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.101-107

Введение

Одной из возможных модификаций общей теории относительности (ОТО) является скалярно-тензорная теория гравитации с неминимальной кинетической связью. В этом случае лагранжиан теории содержит слагаемое вида $\xi G_{\mu\nu}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}$, которое описывает неминимальную связь производных скалярного поля с кривизной. Различные космологические аспекты теории гравитации с неминимальной кинетической связью детально обсуждались в литературе (в частности, см. [1], [2]). В качестве важного результата стоит отметить существование стадии первичной кинетической инфляции, которая определяется параметром неминимальной связи ξ. В большинстве работ, посвященных космологическим моделям в теории гравитации с неминимальной кинетической связью, рассматривались однородные изотропные, а также анизотропные космологические модели. Однако для того, чтобы раскрыть полную структуру и физические следствия теории, необходимо перейти

*Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» №24-1-1-39-4.

[1]E-mail: rikamalitdinov@gmail.com
[2]E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

к детальному исследованию возмущений. Подробный анализ возмущений в стандартной ΛCDM космологии представлен, например, в [3]. Цель настоящей работы — исследовать скалярные, векторные и тензорные возмущения в теории гравитации с неминимальной кинетической связью. В данной работе строим уравнения для скалярных, векторных и тензорных возмущений и проводим их предварительный анализ.

В работе используется планковская система единиц, в которой $\hbar = c = G = 1$, т.е. масса Планка $M_{Pl} = 1$ и гравитационная постоянная Эйнштейна $\kappa = 8\pi$.

1. Уравнения поля

Действие скалярно-тензорной теории гравитации, в которой скалярное поле имеет неминимальную кинетическую связь с кривизной, имеет вид:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{8\pi} - (g_{\mu\nu} + \xi G_{\mu\nu})\,\phi^{;\mu}\phi^{;\nu} - 2V(\phi)\right] + S_m\ , \tag{1}$$

где ξ – параметр неминимальной связи, имеющий размерность $(\text{length})^2$. В работе будем полагать $V(\phi) \equiv 0$. Рассмотрим изотропную однородную космологическую модель с метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right], \tag{2}$$

где $K = \{-1, 0, 1\}$, η – конформное время, $a(\eta)$ – масштабный фактор, $\mathcal{H}(\eta) = a'(\eta)/a(\eta)$ – конформный параметр Хаббла, где штрих означает производную по конформному времени, т.е. $' = d/d\eta$. Вследствие однородности и изотропности пространства $\phi = \phi(\eta)$ – фоновое скалярное поле и тензор энергии-импульс материи задан в форме идеальной жидкости ${T^{(m)\mu}}_{\nu} = \mathrm{diag}\,(-\rho, p, p, p)$, где $\rho = \rho(\eta)$ – плотность энергии и $p = p(\eta)$ – давление.

Модифицированное уравнение Фридмана и уравнение на скалярное поле в метрике (4) принимают вид:

$$h^2 = \frac{\Omega_\psi\left[a^2 - 3\zeta\left(3h^2 + \Omega_k\right)\right]}{a^2\left[a^2 - 3\zeta\left(h^2 + \Omega_k\right)\right]^2} - \Omega_k + \left(\frac{\Omega_m}{a} + \frac{\Omega_r}{a^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\psi\left(a^2 - 3\zeta\left[h^2 + \Omega_k\right]\right)\right] = 0. \tag{4}$$

Из уравнения 4 легко получить первый интеграл:

$$\psi\left(a^2 - 3\zeta\left[h^2 + \Omega_k\right]\right) = Q, \tag{5}$$

где Q– константа интегрирования. В уравнениях выше введены безразмерные переменные:

$$\tau = \eta\mathcal{H}_0,\ \alpha = \frac{a}{a_0},\ h = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0},\ \zeta = \frac{\xi\mathcal{H}_0^2}{a_0^2}, \tag{6}$$

$$\Omega_k = \frac{K}{\mathcal{H}_0^2},\ \psi = \frac{\phi'}{\mathcal{H}_0},\ \Omega_i = \frac{8\pi}{3}\frac{a_0^2}{\mathcal{H}_0^2}\rho_i,\ \Omega_\psi = \frac{4\pi Q^2}{3\mathcal{H}_0^2 a_0^4}. \tag{7}$$

Уравнения (3), (4) были подробно изучены в работе [4], показано существование двух асимптотических эпох: эпохи квази-де Ситтера:

$$\alpha = \frac{1}{1 - H_\zeta\eta},\ h = \frac{H_\zeta}{1 - H_\zeta\tau},\ H_\zeta = \frac{1}{\sqrt{9\zeta}} \tag{8}$$

и эпохи доминирования скалярного поля:

$$\alpha = \sqrt{1 + 2\tau},\ h = \frac{1}{1 + 2\tau}. \tag{9}$$

2. Космологические возмущения

В калибровке Пуассона (см. [5]) возмущенная метрика имеет вид:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2\left(1+2\Phi\right) - 2Q_i d\eta dx^i + \left[\left(1-2\Psi\right)\overline{\gamma}_{ij} + h_{ij}\right] dx^i dx^j\right], \tag{10}$$

где $\Phi \equiv \Phi\left(\eta, \mathbf{x}\right) \ll 1$, $\Psi \equiv \Psi\left(\eta, \mathbf{x}\right) \ll 1$ – скалярные возмущения, $Q_i \equiv Q_i\left(\eta, \mathbf{x}\right) \ll 1$ – векторные возмущения, $h_{ij} \equiv h_{ij}\left(\eta, \mathbf{x}\right) \ll 1$ – тензорные возмущения. Векторные и тензорные моды удовлетворяют условиям бесследовости и поперечности: $\overline{D}^i Q_i = 0$, $\overline{D}^i h_{ij} = 0_j$, $h^i_i = 0$, где $\overline{D}_i$ – ковариантная производная, индуцированная пространственной статической метрикой $\overline{\gamma}_{ij}$ (см. (10)). Возмущенное скалярное поле имеет вид:

$$\phi(\eta, \mathbf{x}) = \phi(\eta) + \delta\phi(\eta, \mathbf{x}), \tag{11}$$

где $\delta\phi(\eta, \mathbf{x})$ – возмущение такое, что $\delta\varphi \equiv \dfrac{\delta\phi(\eta, \mathbf{x})}{\phi(\eta)} \ll 1$. Далее мы будем рассматривать Фурье образ произвольной скалярной величины $A(\eta, \mathbf{x})$:

$$A(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int A_k e^{i\mathbf{kx}} d\mathbf{k}, \tag{12}$$

где $A_k \equiv A(\eta, \mathbf{k})$ называется модой с волновым числом k.

2.1. Векторные моды

Векторные возмущения Q_i, $q_i \equiv \left(\overline{\rho} + \overline{p}\right)\left(v_i - Q_i\right)$ разложим по собственному вектору Лапласиана, т.е. $q_i = qS_i$, $Q_i = QS_i$, где $S_i : \nabla S_i = -k^2 S_i$, тогда уравнения на векторные моды примут вид:

$$q'_k + 4hq_k = 0 \Rightarrow q_k \propto \alpha^{-4}, \tag{13}$$

$$Q'_k\left(1 + 4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2}\right) + 2Q_k\left(h + 4\pi\zeta\psi'\psi\alpha^{-2}\right) = 0. \tag{14}$$

Уравнение (13) легко интегрируется. Численное интегрирование уравнения (14) для разных значений ζ представлено на графике 1. Для уравнения (14) можно получить аналитическую зависимость в двух предельных случаях.

2.1.1 Эра квази - де Ситтера: $4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2} \gg 1$.

В уравнении (14) оставим вклад скалярного поля и разделим на $4\pi\psi^2\zeta\alpha^{-2}$. Имеем:

$$Q'_k + 2Q_k\frac{\psi'}{\psi} = 0,\ Q'_k - 4Q_k h = 0 \Rightarrow Q_k \propto \alpha^4 \tag{15}$$

2.1.2 Эра доминирования вещества: $4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2} \ll 1$.

Уравнение (14) примет стандартный для ОТО вид; мода затухает по квадратичному закону:

$$Q'_k + 2Q_k h = 0 \ \Rightarrow\ Q_k \propto \alpha^{-2} \tag{16}$$

2.2. Тензорные моды

Уравнение тензорных возмущений для нулевой пространственной кривизны (K=0) имеет вид:

$$h''_{ij} + 2hh'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = -4\pi\psi^2\zeta\alpha^{-2}\left[h''_{ij} + 2h'_{ij}\frac{\psi'}{\psi} + \nabla^2 h_{ij}\right]. \tag{17}$$

Представим тензорные возмущения h_{ij} как линейную комбинацию мод по базису ϵ_{ij}: $h_{ij} = \sum_{\lambda=+,\times} h_\lambda \epsilon^\lambda_{ij}$, причем базис удовлетворяет условиям поперечности и бесследовости $\overline{D}^i \epsilon_{ij} = 0_j$, $\epsilon^i_i = 0$. Уравнения на моды $\{+, \times\}$ одинаковы и имеют вид:

$$\left(1 + 4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2}\right) h''_\lambda + 2\left(h + 4\pi\zeta\psi'\psi\alpha^{-2}\right) h'_\lambda + \beta^2 \left(1 - 4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2}\right) h_\lambda = 0, \tag{18}$$

где $\beta \equiv \dfrac{k}{\mathcal{H}_0}$. Результат численного интегрирования уравнения (18) представлен на графике 2.

2.2.1 Эра квази - де Ситтера: $4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2} \gg 1$.

Уравнение (18) примет вид:

$$\frac{d^2h_\lambda}{dx^2} - \frac{4\vartheta}{1-\vartheta x}\frac{dh_\lambda}{dx} - h_\lambda = 0, \tag{19}$$

где $\vartheta = \dfrac{H_\zeta}{\beta}$ и $x = \beta\tau$. Решение представляет сумму затухающей и возрастающей мод, соответственно:

$$\begin{aligned} h_\lambda =& c_1 e^{\frac{1}{\vartheta}-x} \frac{\frac{1}{\vartheta} - x - 1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\vartheta}-x\right)^{3/2}(2-2\vartheta x)^{3/2}} + c_2 e^{x-\frac{1}{\vartheta}} \frac{\frac{1}{\vartheta} - x + 1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\vartheta}-x\right)^{3/2}(2-2\vartheta x)^{3/2}} = \\ &= d_1 e^{\frac{1}{\vartheta\alpha}}\alpha^2(1-\alpha\vartheta) + d_2 e^{-\frac{1}{\vartheta\alpha}}\alpha^2(1+\alpha\vartheta). \end{aligned} \tag{20}$$

Для режима, в котором мода находится под горизонтом Хаббла ($k \gg h$) моды представляют сумму экспонент:

$$h_\lambda = c_1 e^{-x} + c_2 e^x. \tag{21}$$

2.2.2 Эра доминирования вещества: $4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2} \ll 1$.

Для стадии доминирования вещества уравнение гравитационных волн совпадает с уравнением, полученным в ОТО:

$$\frac{d^2h_\lambda}{dx^2} + 2\frac{h}{\beta}\frac{dh_\lambda}{dx} + h_\lambda = 0. \tag{22}$$

Используя степенной анзац $\alpha = \tau^\nu$, получим стандартное аналитическое решение:

$$h_\lambda = x^{1/2-\nu}\left[c_1 J_{\nu-\frac{1}{2}}(x) + c_2 Y_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\right]. \tag{23}$$

2.3. Скалярные моды

В отсутствии материи (в частности анизотропного вклада) уравнения на скалярные моды примут вид:

$$\Psi'_k + h\Phi_k = 4\pi\psi^2\phi\psi^{-1}\delta\varphi_k + 4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2}\left(-\Psi'_k + h\left(2\phi\psi^{-1}\delta\varphi'_k + 2\delta\varphi_k - 3\Phi_k\right) - 3\phi\psi^{-1}h^2\delta\varphi_k\right), \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \beta^2\Psi_k + 3h\left(\Psi'_k + h\Phi_k\right) =& -4\pi\psi^2\left(\phi\psi^{-1}\delta\varphi'_k + \delta\varphi_k - \Phi_k\right) \\ & - 4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2}\left(\beta^2\Psi_k + h\left(9\Psi'_k - 2\beta^2\phi\psi^{-1}\delta\varphi_k\right) - 9h^2\left(\phi\psi^{-1}\delta\varphi'_k + \delta\varphi_k - 2\Phi_k\right)\right), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\Psi_k - \Phi_k = 4\pi\zeta\psi^2\alpha^{-2}\left(2\phi\psi'\psi^{-2}\delta\varphi_k + (\Phi_k + \Psi_k)\right). \tag{26}$$

Уравнения (24), (25) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно старших производных Ψ_k', $\delta\varphi_k$, уравнение (26) – алгебраическое. Разрешая эти уравнения относительно старших производных и выражая Φ_k, мы получаем:

$$\delta\varphi_k' = \left[-\frac{\psi}{\phi}\left(1+\frac{8\pi\zeta\phi\psi'}{\Upsilon}\right)+\frac{2\zeta h\beta^2}{\alpha^2-3\zeta h^2\frac{\Sigma}{\Upsilon}}-3h\frac{\Sigma_+}{\Upsilon}\frac{\alpha^2-3\zeta h^2}{\alpha^2-3\zeta h^2\frac{\Sigma}{\Upsilon}}\right]\delta\varphi_k+ \\ +\left[\frac{\psi}{\phi}\frac{\Upsilon_-}{\Upsilon}-\frac{\Upsilon\beta^2}{4\pi\phi\psi}\frac{1}{\alpha^2-3\zeta h^2\frac{\Sigma}{\Upsilon}}\right]\Psi_k, \tag{27}$$

$$\Psi_k' = \left[\frac{4\pi\psi\phi}{\Upsilon}\frac{\left(\alpha^2-3\zeta h^2\right)\left(\alpha^2-9\zeta h^2\right)+4\zeta^2h^2\beta^2}{\alpha^2-3\zeta h^2\frac{\Sigma}{\Upsilon}}+\frac{8\pi\zeta\phi h\psi'}{\Upsilon}\right]\delta\varphi_k-\left[h\frac{\Upsilon_-}{\Upsilon}+\frac{2\zeta h\beta^2}{\alpha^2-3\zeta h^2\frac{\Sigma}{\Upsilon}}\right]\Psi_k, \tag{28}$$

$$\Phi_k = \frac{\Upsilon_-}{\Upsilon}\Psi_k-\frac{8\pi\zeta\phi\psi'}{\Upsilon}\delta\varphi_k, \tag{29}$$

где введены переменные

$$\Upsilon=\left(\alpha^2+4\pi\zeta\psi^2\right),\ \Upsilon_-=\left(\alpha^2-4\pi\zeta\psi^2\right),\ \Sigma=\left(\alpha^2-12\pi\zeta\psi^2\right),\ \Sigma_+=\left(\alpha^2+12\pi\zeta\psi^2\right). \tag{30}$$

Анализ скалярных возмущений представляет собой более трудоемкую работу, поэтому будет проведен нами в следующей работе.

3. Обсуждение результатов

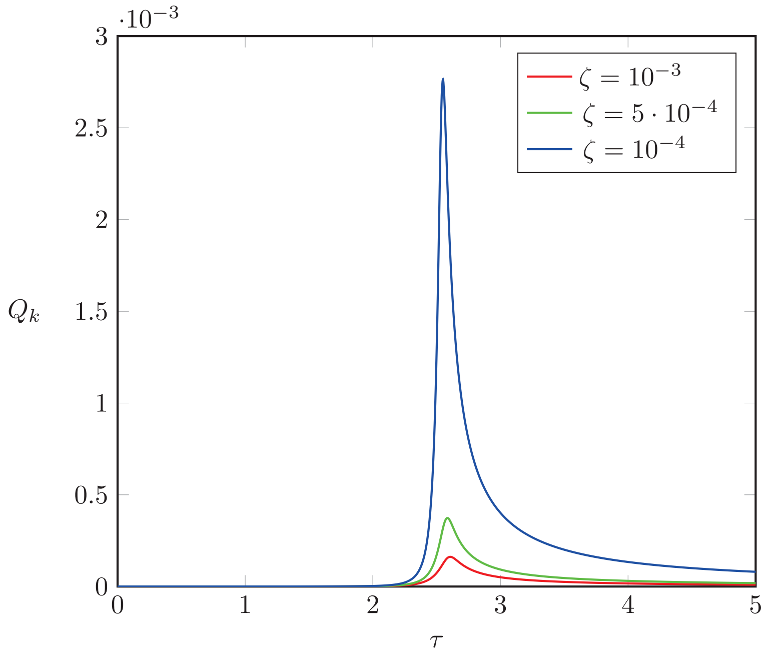

Рис. 1. Эволюция векторных возмущений для разных значений ζ ($Q_k(0) = 10^{-8}$)

Отметим, что для эры доминирования вещества (скалярного поля) эволюция тензорных и векторных мод совпадает с результатами ОТО.

Векторные моды в эре квази - де Ситтера возрастают, достигая некоторого максимального значения, которое тем больше, чем меньше параметр ζ.

Тензорные моды в эре квази - де Ситтера меняются экспоненциально (для сильно отрицательных времен). Моды под горизонтом Хаббла меняются экспоненциально на протяжении всей эры де Ситтера.

Скалярные моды требуют дальнейшего анализа.

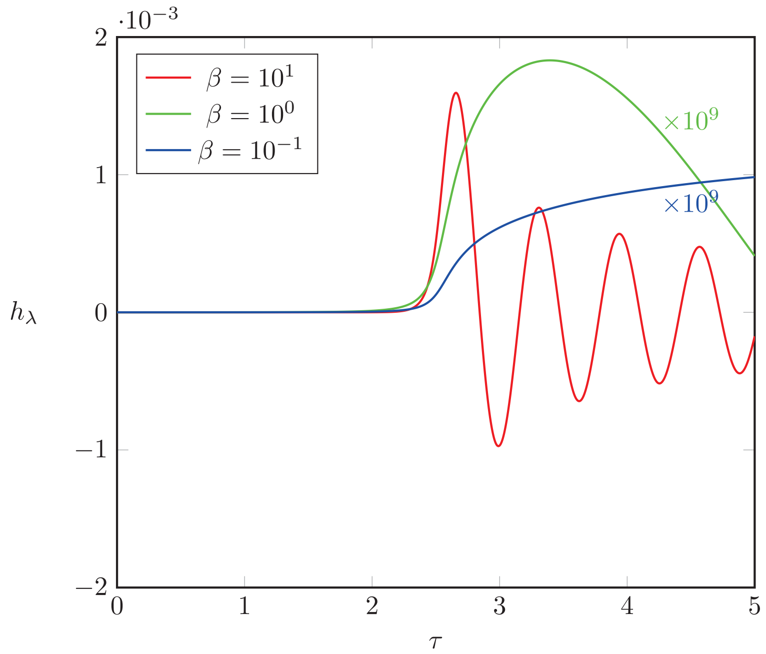

Рис. 2. Эволюция тензорных возмущений для разных значений β при $\zeta = 10^{-3}$ ($h_\lambda(0) = h'_\lambda(0) = 10^{-16}$). Зависимости для $\beta = 10^0, 10^{-1}$ увеличены в 10^9 раз.

Заключение

Полученные зависимости для эры квази - де Ситтера кардинально отличаются от результатов классической космологии. В дальнейшем мы продолжим исследования для модели Вселенной с ненулевой кривизной.

Список литературы

1. S. Sushkov, Realistic cosmological scenario with non-minimal kinetic coupling. *Phys. Rev. D* **85**, 123520 (2012).

2. J. Matsumoto, S. Sushkov, General dynamical properties of cosmological models with nonminimal kinetic coupling. *JCAP* **01**, 040 (2018).

3. D. Baumann. *Cosmology.* Cambridge University Press (2022).

4. S. V. Sushkov and R. Galeev, Cosmological models with arbitrary spatial curvature in the theory of gravity with nonminimal derivative coupling. *Phys. Rev. D* **108**, 044028 (2023).

5. G. F. R. Ellis, R. Maartens R, M. A. H. MacCallum. *Relativistic Cosmology.* Cambridge University Press (2012).

Авторы

Камалитдинов Руслан Ильдарович, Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: rikamalitdinov@gmail.com

Сушков Сергей Владимирович, д-р. физ.-мат. наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Камалитдинов Р. И., Сушков С. В. Космологические возмущения в теории гравитации с неминимальной кинетической связью. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 1. С. 101—107.

Authors

Kamalitdinov Ruslan Ildarovich, Kazan State University, Kremlevskaya st. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: rikamalitdinov@gmail.com

Sushkov Sergey Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Docent, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Please cite this article in English as:
Kamalitdinov R. I., Sushkov S. V. Cosmological perturbations in the theory of gravity with non-minimal kinetic coupling. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 101–107.