УДК 000.000, 000.000

© Кашаргин П. Е., Лебедев А. А., Сушков С. В., 2025

НЕЙТРОННЫЕ ЗВЕЗДЫ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ СВЯЗЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАРЯДА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ И РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ*

Кашаргин П. Е.[a,1], Лебедев А. А.[a,2], Сушков С. В.[a,3]

[a] Казанский федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Рассматриваются модели нейтронных звезд в теории гравитации с неминимальной производной связью скалярного поля и тензора Эйнштейна при наличии заряда Q скалярного поля. В качестве уравнения состояния используется не только модельное политропное, но также реалистичные уравнения состояния нейтронного вещества. В данной работе показано, что вне зависимости от вида уравнения состояния, скалярное поле становится комплексным при $Q \neq 0$, что возможно свидетельствует о неустойчивости решения с заряженным скалярным полем. В данной работе также обсуждаются свойства уравнений состояния, связанные с ограничениями на скорость распространения звука.

Ключевые слова: нейтронные звезды, модифицированные теории гравитации, заряд скалярного поля, реалистичные уравнения состояния.

NEUTRON STARS IN THE THEORY OF GRAVITY WITH NON-MINIMAL DERIVATIVE COUPLING IN THE PRESENCE OF A SCALAR FIELD CHARGE. ANALYSIS OF THE EQUATIONS OF STATE AND SOLUTIONS FOR THE SCALAR FIELD

Kashargin P. E.[a,1], Lebedev A. A.[a,2], Sushkov S. V.[a,3]

[a] Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

We consider neutron stars in the theory of gravity with a non-minimal derivative coupling of the scalar field and the Einstein tensor in the presence of a charge Q of the scalar field. In this paper we consider model polytropic and realistic equations of state of neutron matter. It is shown that regardless of the type of the equation of state, the scalar field becomes complex in the case $Q \neq 0$, which possibly indicates about instability of the solution with a charged scalar field. This paper also discusses the properties of the equations of state related to restrictions on the sound speed.

Keywords: neutron stars, modified theories of gravity, charge of the scalar field, realistic equations of state.

PACS: 00.00, 00.00
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.108-113

Введение

Нейтронные звёзды принадлежат к классу компактных звезд [1]. Их радиус принимает значения в интервале 10 – 13 км, масса в интервале 1.4 – 2 $M_{\odot}$ масс Солнца, а плотность вещества внутри нейтронной звезды превосходит ядерную в 5-10 раз. Изучение нейтронных звезд позволяет получить информацию о ядерных взаимодействиях при больших плотностях, а также проверить

*Работа выполнена при поддержке РНФ, №25-22-00163, https://rscf.ru/project/25-22-00163/.

[1]E-mail: pkashargin@mail.ru
[2]E-mail: lebedev.aleks2012konnor@yandex.ru
[3]E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

эффекты теории гравитации и протестировать ее различные модификации. Нейтронные звезды рассматривались в различных альтернативных теориях гравитации. В данной работе рассматриваются модели нейтронных звезд в теории гравитации с неминимальной производной связью скалярного поля Φ и тензора Эйнштейна [2–6]

$$S = \int \sqrt{-g} \left[k\big(R - 2\Lambda\big) - \frac{1}{2} \left(\alpha g^{ij} - \eta G^{ij}\right) \Phi_{;i}\Phi_{;j} \right] d^4x + S^{(m)}, \tag{1}$$

где $d^4x = cdtdV$, Λ – космологическая постоянная, $k = \frac{c^3}{16\pi G}$, R – скалярная кривизна, η и α – вещественные параметры модели. Размерность η равна квадрату длины ($\eta > 0$), а α – безразмерна. $S^{(m)}$ – действие для материи, которое описывает идеальную жидкость с тензором энергии-импульса вида

$$T^{(m)}_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где u_μ — 4-вектор скорости, а плотность материи ρ и давление p связаны некоторым уравнением состояния. В качестве уравнения состояния в работе нами используется не только модельное политропное, но также реалистичные уравнения состояния нейтронного вещества.

В данной работе будут рассмотрены сферически симметричные конфигурации с метрикой пространства-времени вида:

$$ds^2 = -A(r)d(ct)^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{3}$$

где $A(r)$, $B(r)$ – функции радиальной координаты r. Плотность материи ρ и давление p являются функциями координаты r и связаны уравнением состояния вещества. Функцию скалярного поля выберем линейно зависящей от времени в виде $\Phi(t, r) = F(r) + Qt$, где Q – заряд скалярного поля [3–5]. Снаружи нейтронной звезды решение описывается внешним вакуумным решением ($p = \rho = 0$). В случае $\Lambda = -\frac{\alpha}{\eta}\left(1 - \frac{\eta Q^2}{2kc^2}\right)$ вакуумное решение может быть представлено в явном виде [5], в этом случае метрика имеет асимптотику анти - де - Ситтера: $A(r) = B(r) = 1 - \frac{\mu}{r} + \frac{\alpha r^2}{3\eta}$. Далее мы ограничимся этим частным случаем.

Детально параметры нейтронных звезд будут представлены нами в следующей работе. Данная работа посвящена анализу решения для скалярного поля, а также особенностям уравнений состояния, описывающих материю таких звёзд. В §1 будут записаны уравнения для гравитационного и скалярного полей. Будет показано, что вне зависимости от вида уравнения состояния, скалярное поле становится комплексным при $Q \neq 0$, что возможно свидетельствует о неустойчивости решения с заряженным скалярным полем. В §2 обсуждаются свойства уравнений состояния, связанные с ограничениями на скорость распространения звука. В последнем разделе будет сделано заключение.

1. Базовые уравнения

Независимые уравнения гравитационного поля и закон сохранения тензора энергии-импульса в модели (1) могут быть записаны в виде [4, 5]:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{(E+P)}{2xB}\bigg(\alpha x^2 + 1 - B\bigg), \tag{4}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{A}{xB}\bigg(\alpha x^2 + 1 - B\bigg), \tag{5}$$

$$\psi^2 = \frac{q^2\Big(1 - B + \alpha x^2\big(1 - A\big)\Big) + 2Px^2A}{2AB\big(1 + \alpha x^2\big)}, \tag{6}$$

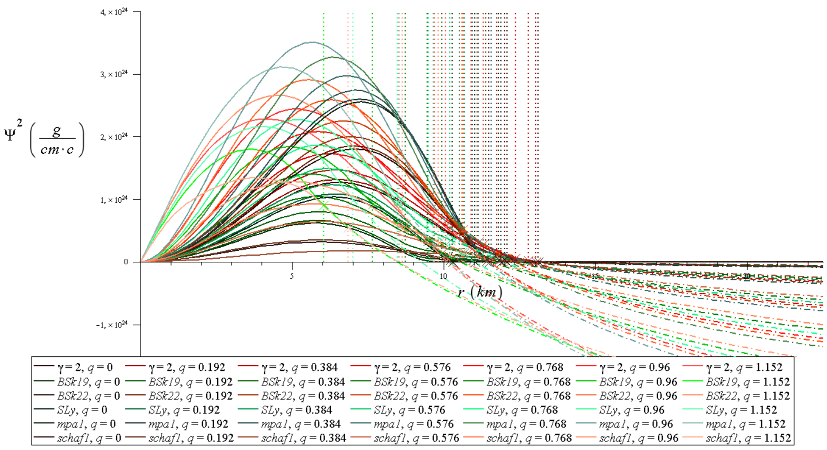

Рис. 1. Кривые разного цвета соответствуют графикам $\Psi^2(r)$ для различных значений параметра q и различных уравнений состояния (BSk19, BSk22, SLy, mpa1, schaf1, уравнению политропы с показателем $\gamma = 2$). Сплошная кривая соответствует внутреннему, а штрихпунктирная – внешнему вакуумному решению. Вертикальная прямая соответствует радиусу $r = R$ нейтронной звезды.

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dx} \quad = \quad & -\frac{1}{\delta}\Bigg[q^2\bigg(B\Big(\alpha x^2(\alpha x^2+5)A-(\alpha x^2-3)B\Big)-(\alpha x^2+1)^2(\alpha x^2A+3B)\bigg)+ \\ & +A\bigg(4\Big(3\alpha x^2(\alpha x^2+1)-B(\alpha x^2+1)^2+\alpha^3x^6+1\Big)-4Px^2B(\alpha x^2+3)- \\ & -2Ex^2\Big(B(\alpha x^2+1)+\alpha x^2(\alpha x^2+2)\Big)\bigg)\Bigg], \qquad (7)\end{aligned}$$

где использованы безразмерные величины

$$r = x\sqrt{\eta},\ p = \frac{2kcP}{\eta},\ \rho = \frac{2kcE}{\eta},\ Q^2 = \frac{kc^2q^2}{\eta},\ \Psi^2 = \frac{2k}{\eta}\psi^2,$$

и $\delta = x\left(1+\alpha x^2\right)\left[q^2\left(\alpha x^2A+3B\right)-2A\left(2\left(1+\alpha x^2\right)+Px^2\right)\right]$, а $\Psi(r) = F'(r) = \Phi'(r)$ – производная скалярного поля по r. Чтобы избежать сингулярности решения, знаменатель в уравнении для скалярного поля (6) должен быть отличен от нуля, т.е. $1+\alpha x^2 \neq 0$, следовательно параметр α должен быть положительным.

Используя систему уравнений, получим разложение $P(x)$ по степеням x

$$P(x) = P_0 - \frac{E_0+P_0}{6}\,\frac{2(E_0+3P_0)+\alpha(4-3q^2)}{4-3q^2}x^2 + o(x^2), \qquad (8)$$

где $P_0 = P(0)$ и $E_0 = E(0)$. В центре звезды $x = 0$ давление $P(x)$ должно быть максимальным, следовательно коэффициент перед x^2 в разложении (8) должен быть меньше нуля. Откуда получаем, что величина q^2 может принимать значения в двух диапазонах:

$$\begin{aligned}&1)\ \ q^2 < \frac{4}{3}, \\ &2)\ \ q^2 > \frac{4}{3} + \frac{2(E_0+3P_0)}{3\alpha}.\end{aligned} \qquad (9)$$

Первое условие не зависит от уравнения состояния. Второе условие можно рассматривать как ограничение на максимально возможное давление в центре.

На границе нейтронной звезды $r = R$ давление обращается в ноль, и внутреннее решение сшивается с внешним вакуумным решением, исследованным в работе [5]. В случае вакуумного решения $A(x) = B(x)$. С учетом $P(x) = 0$ и $A(x) = B(x)$, уравнение (6) для внешнего вакуумного решения дает выражение для квадрата скалярного поля при $r > R$

$$\psi^2_{vac} = -\frac{q^2(A-1)}{2A^2}. \tag{10}$$

Поскольку метрическая функция $A \geq 1$, то правая часть в (10) становится отрицательной при любых $q \neq 0$, а скалярное поле для вакуумного решения – комплексным. Положительность ψ^2 нарушается не только для внешнего вакуумного, но может нарушаться и для внутреннего решения, что подтверждается численным результатом представленным на Рис. (1). В случае $q = 0$ вакуумное решение ψ^2_{vac} обращается в нуль, и функция скалярного поля будет действительной.

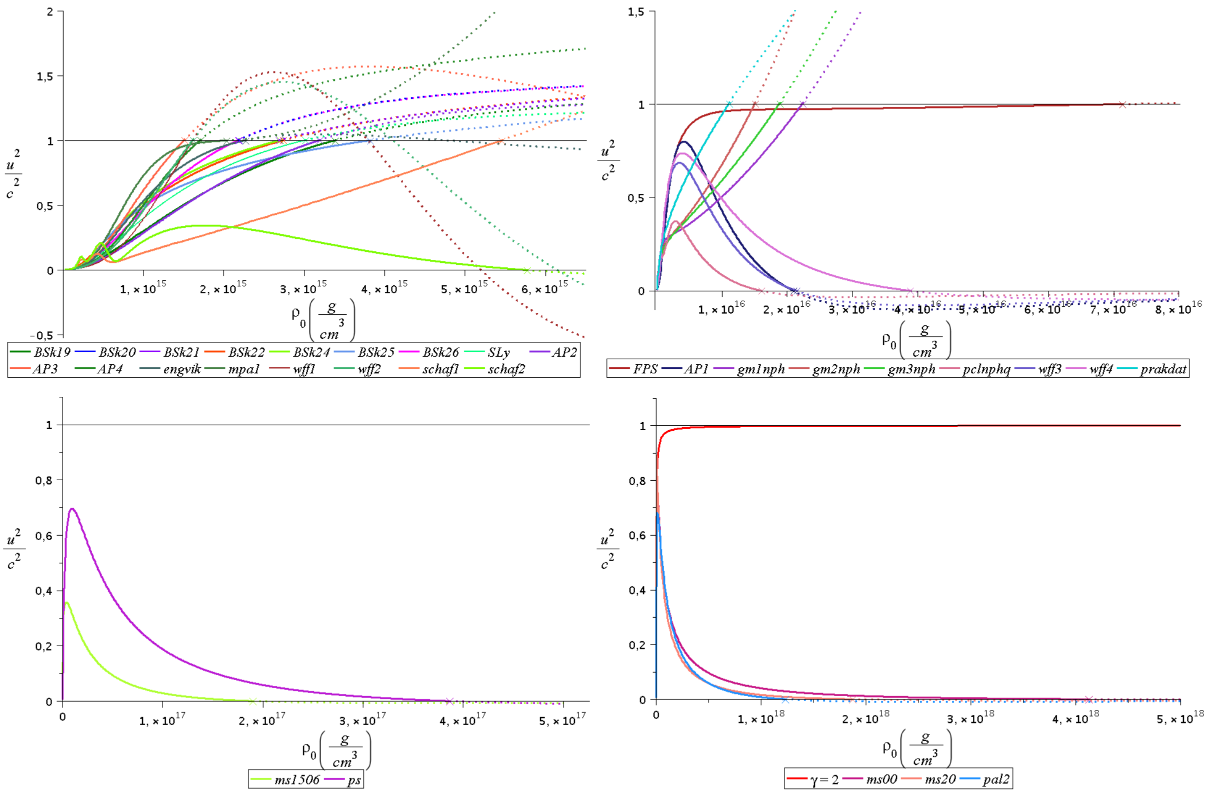

Рис. 2. Графики квадрата скорости звука (в единицах квадрата скорости света) в зависимости от плотности вещества для различных уравнений состояния (политропного уравнения с $\gamma = 2$, а также реалистичных уравнений состояния нейтронного вещества). Сплошные кривые соответствуют $u^2 < c^2$, кресты — $u^2 = c^2$, пунктирные кривые — $u^2 > c^2$, либо $u^2 < 0$.

2. Особенности уравнений состояния

В этом разделе рассмотрим скорость распространения звука для различных уравнений состояния нейтронного вещества. На Рис. 2 представлены графики квадрата скорости звука $u^2 = c^2(\frac{\partial p}{\partial \epsilon})_s$ в зависимости от плотности вещества. В качестве уравнений состояния рассмотрено уравнение политропы [6], а также ряд более реалистичных функционалов [7–10]. Все реалистичные функционалы имеют особенности, связанные с величиной скорости звука. Для некоторых уравнений состояния существуют значения плотности ρ_0, выше которых акустические колебания начинают распространяться быстрее скорости света. Сверхсветовые скорости в теории относительности приводят к нарушению причинности и, видимо, означают о неприменимости данных уравнений при столь высоких плотностях. С другой стороны, для определённых уравнений u^2 может оказаться отрицательной величиной, а скорость звука – комплексной, что также в природе неосуществимо.

Таким образом это еще раз подтверждает, что рассматриваемые функционалы относят к реалистичному классу уравнений состояния, а сверхплотное состояние материи в нейтронных звездах не позволяет нам неограниченно увеличивать плотность в звезде. Наконец, для политропы таких ситуаций вовсе не наблюдается во всём диапазоне плотностей вплоть до $5 \cdot 10^{18} \frac{g}{cm^3}$.

Заключение

В данной работе были рассмотрены модели нейтронных звезд в теории гравитации с неминимальной производной связью скалярного поля и тензора Эйнштейна при наличии заряда Q скалярного поля. В качестве уравнения состояния используется не только модельное политропное, но также реалистичные уравнения состояния нейтронного вещества. Было показано, что вне зависимости от вида уравнения состояния, скалярное поле становится комплексным при $Q \neq 0$. Возможно это свидетельствует о неустойчивости решения с заряженным скалярным полем. Также были рассмотрены свойства уравнений состояния, связанные с ограничениями на скорость распространения звука.

Список литературы

1. The Physics and Astrophysics of Neutron Stars, ed L. Rezzolla et al. Springer Cham. 457 (2018).

2. Babichev E., Charmousis C., Lehebel A., Black holes and stars in Horndeski theory, *Class. Quant. Grav.*, 2016, 33, no.15, 154002; arXiv:1604.06402.

3. A. Cisterna, T. Delsate, M. Rinaldi, Neutron stars in general second order scalar-tensor theory: the case of non-minimal derivative coupling, Phys. Rev. D **92**, iss.4, 044050 (2015).

4. A. Cisterna, T. Delsate, L. Ducobu, M. Rinaldi, Slowly rotating neutron stars in the nonminimal derivative coupling sector of Horndeski gravity. *Phys. Rev. D* **93**, 084046 (2016).

5. E. Babichev, C. Charmousis, Dressing a black hole with a time-dependent Galileon. *General Relativity and Quantum Cosmology* (gr-qc), 1408 (2014).

6. P. E. Kashargin, S. V. Sushkov, Anti – de Sitter neutron stars in the theory of gravity with nonminimal derivative coupling. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2205.08949 (2023).

7. A. Y. Potekhin et.al., Analytical representations of unified equations of state for neutron – star matter. *Astronomy and Astrophysics* **560**, (2013).

8. J. M. Pearson et.al., Unified equations of state for cold non – accreting neutron stars with Brussels-Montreal functionals. I. Role of symmetry energy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **481(3)**, pp. 2994-3026 (2019).

9. P. Haensel, A. Y. Potekhin, Analytical representations of unified equations of state of neutron-star matter. *Astronomy and astrophysics* **428**, pp. 191 – 197, (2004).

10. C. Gungor, K. Y. Eksi, Analytical Representation for Equations of State of Dense Matter. *Solar and Stellar Astrophysics*, 1108.2166 (2011).

Авторы

Кашаргин Павел Евгеньевич, к.ф.-м.н., преподаватель, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, д.18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: pkashargin@mail.ru

Лебедев Александр Анатольевич, аспирант, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, д.18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: lebedev.aleks2012konnor@yandex.ru

Сушков Сергей Владимирович, д-р. физ.-мат. наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Кашаргин П. Е., Лебедев А. А., Сушков С. В. Нейтронные звезды в теории гравитации с неминимальной производной связью при наличии заряда скалярного поля. Анализ уравнений состояния и решения скалярного поля. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 1. С. 108—113.

Authors

Kashargin Pavel Evgenievich, candidate of sciences, lecturer, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya street, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: pkashargin@mail.ru

Lebedev Aleksandr Anatolievich, graduate student, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya street, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: lebedev.aleks2012konnor@yandex.ru

Sushkov Sergey Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Docent, Kazan State University, Kremlevskaya str. 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Please cite this article in English as:
Kashargin P. E., Lebedev A. A., Sushkov S. V. Neutron stars in the theory of gravity with non-minimal derivative coupling in the presence of a scalar field charge. Analysis of the equations of state and solutions for the scalar field. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 108–113.