УДК 524.8, 530.12

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ВЕЧНАЯ ИНФЛЯЦИЯ

Юров А. В.[a,1], Юрова А. А.[a,2], Чириков Р. В.[a,3]

[a] Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.

При описании вечной инфляции существенного продвижения можно добиться в рамках стохастического подхода, основанного на том, что локальная эволюция включает в себя влияние квантовых флуктуаций, которые вводятся через уравнение Ланжевена, из которого, на следующем шаге, выводится уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова. Мы обсуждаем детали этого вывода, а также проблему отсутствия стационарных распределений. Используя ранее установленную в наших работах связь с уравнением Абеля первого рода, мы показываем, что существует естественное обобщение данного уравнения за пределы приближения медленного скатывания, причем итоговое уравнение допускает стационарное распределение.

Ключевые слова: вечная инфляция, стохастические процессы, уравнение Фоккера-Планка, уравнение Ланжевена.

STOCHASTIC DYNAMICS AND ETERNAL INFLATION

Yurov A. V.[a,1], Yurova A. A.[a,2], Chirikov R. V.[a,3]

[a] Immanuel Kant Baltic Federal University,Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.

In describing eternal inflation, significant progress can be made within the stochastic approach, based on the fact that local evolution includes the influence of quantum fluctuations, which are introduced through the Langevin equation, from which, in the next step, the Fokker-Planck-Kolmogorov equation is derived. We discuss the details of this derivation, as well as the problem of the absence of stationary distributions. Using the connection with the Abel equation of the first kind, established in our earlier work, we show that there is a natural generalization of this equation beyond the slow-roll approximation, and the resulting equation admits a stationary distribution.

Keywords: eternal inflation, stochastic processes, Fokker-Planck equation, Langevin equation.

PACS: 98.80.Cq, 98.80.-k
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.174-179

Введение

Инфляционная стадия [5] метастабильного основного состояния [?] заканчивается распадом вакуума, что приводит к появлению расширяющихся пузырьков новой фазы низкоэнергетического вакуума [?]. Этот распад может быть описан с помощью инстантонов Коулмена – Лючии [4]. Пузырьки продолжают расширяться с практически световой скоростью, но область нераспавшегося метастабильного вакуума раздувается гораздо быстрее, поэтому в итоговом балансе инфляция оказывается вечной [?]. Для наблюдателей внутри пузырьков, вселенная разглаженная фазой инфляции является однородной, изотропной (модель Фридмана) и практически плоской, хотя итоговая

[1]E-mail: aiurov@kantiana.ru
[2]E-mail: aiurova@kantiana.ru
[3]E-mail: rchirikov1@kantiana.ru

кривизна должна быть все таки отрицательной. Однако глобальная структура вечно раздувающейся вселенной является в высшей степени неоднородной [6]. Для вычисления фундаментальных космологических параметров (спектрального индекса, температуры CMB и т.д.) необходимо определить меру, что оказывается чрезвычайно трудной задачей, поскольку вечная инфляция означает бесконечное число пакетных вселенных. Существенного продвижения можно добиться в рамках стохастического подхода, основанного на том, что локальная эволюция включает в себя влияние квантовых флуктуаций, которые вводятся через уравнение Ланжевена, из которого, на следующем шаге, выводится уравнение Фоккера-Планка (для инфляционной, деситтеровской фазы это впервые было сделано А.А. Старобинским в 1986 году) [**?**]. Мы обсуждаем детали этого вывода, а также проблему отсутствия стационарных распределений. Используя ранее установленную в наших работах связь с уравнением Абеля первого рода, мы показываем, что существует естественное обобщение данного уравнения за пределы приближения медленного скатывания, причем итоговое уравнение допускает стационарное распределение

1. Уравнение Фоккера-Планка

Вечно раздувающаяся вселенная, сильно неоднородна на больших ма штабах. Для описания её структуры, удобно разбить вселенную на набор областей, причинно не связанных друг с другом. Если моделировать поля материи, как некоторое скалярное поле ϕ, то размер каждой из областей определяет "параметр Хаббла"$H^{-1}(\phi(\tilde{\mathbf{r}},t))$. При этом, внутри каждой области, зависимостью от $\vec{r}$ пренебрегают, считая такую область фридмановской вселенной. На масштабах же много больших H^{-1}, метрику можно также записать приближенно, как однородную, вблизи каждой точки $\vec{r}$ [6]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}^2, \qquad a(t,\mathbf{r}) = \exp\left(\int dt\, H(\phi(\mathbf{r},t))\right). \tag{1}$$

Даже рассматривая эволюцию поля независимо в указанных областях, а глобальная картина восстанавливается на последнем участке с помощью (1) [6]. В дальнейшем мы будем рассматривать локальную эволюцию поля в области размером H^{-1}, поэтому зависимость от $\vec{r}$ у нас не появится. Эта эволюция описывается уравнением Эйнштейна-Смолуховского [**?**]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{8\pi^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(H^3 P\right) + \frac{V'(\phi)}{3H}P\right). \tag{2}$$

где $P(\phi,t)$ - распределение вероятности, найти величину поля ϕ в данной области, в момент времени t.

Динамика крупномасштабного квазиоднородного скалярного поля, создающего стадию де Ситтера (инфляционную) в ранней Вселенной, сильно зависит от мелкомасштабных квантовых флуктуаций скалярного поля и, таким образом, становится стохастической. Эволюция соответствующей крупномасштабной пространственно-временной метрики следует за эволюцией скалярного поля и также является стохастической.

Уравнение (2) выводится из уравнения Крамерса-Мояла

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^k}{\partial\, x^k}\left\{D_k(x,t)P(x,t)\right\}, \tag{3}$$

где

$$D_k(x,t) \equiv \lim_{\delta t\to 0}\frac{\langle(\Delta x)^k\rangle_{x,t}}{\delta t}, \tag{4}$$

$D_{1,2}$ коэффициенты дрейфа и диффузии. Если $D_k \to 0$ для некоторого $k > 2$ то все $D_k \to 0$. Уравнение (3) связано с уравнением Ланжевена

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x,t) + \eta(t), \tag{5}$$

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \qquad \langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle = q(t_1)\delta(t_2 - t_1). \tag{6}$$

Отсюда

$$\Delta x(t) = x(t+\delta t) - x(t) = A(x,t)\delta t + \int_t^{t+\delta t} dt'\eta(t'),$$

$$D_1 = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\langle \Delta x \rangle_{x,t}}{\delta t} = A(x,t), \tag{7}$$

$$D_2 = \lim_{\delta t \to 0} \left\{ A^2 \delta t + 2\int_t^{t+\delta t} dt' \langle \eta(t') \rangle A(x,t') + \int_t^{t+\delta t} \int_t^{t+\delta t} dt_1 dt_2 \langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle \right\}. \tag{8}$$

2. Уравнение Старобинского

В приближении медленного скатывания, космологические уравнения имеют вид

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V'}{3H}, \qquad H^2 \simeq \frac{8\pi}{3} V(\phi) \tag{9}$$

в единицах $G = M_p^{-1} = c = 1$. Сравнивая первое уравнение с (5), отождествляем ϕ с "координатой"$x(t)$, а $-V'/3H$ с систематической силой. Тогда, учет влияния раздуваемых инфляцией квантовых флуктуаций производится добавлением правой части слагаемого с шумом $\eta(t)$, с некоторым подлежащим определению коэффициентом. Для его нахождения, Старобинский использовал следующее представление для скалярного поля :

$$\phi = \bar{\phi} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \theta(k - \epsilon a(t)H) \left(\phi_k(t)\hat{a}_k \mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}} + \phi_k^*(t)\hat{a}_k^+ \mathrm{e}^{i\mathbf{kr}} \right) + \delta\phi,$$

где $k = |\mathbf{k}|$, $\epsilon \ll 1$, $\bar{\phi}$ – длинноволновые моды ($k \ll Ha$) и

$$\langle f(t)f(t') \rangle = \frac{H^3}{(2\pi)^2} \delta(t - t').$$

В результате определяется искомый коэффициент в уравнении Ланжевена:

$$\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H(\phi)} + \frac{H^{3/2}(\phi)}{2\pi} \eta(t). \tag{10}$$

Наконец, используя (1.3)-(1.8) получаем уравнение Старобинского, с постоянным параметром Хаббла:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{H_0^3}{8\pi^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + \frac{1}{3H_0} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{dV}{d\phi} P \right). \tag{11}$$

Стационарное решение имеет вид, формально эквивалентный волновой функции Хартля-Хокинга:

$$P = H^{-3/2} \exp\left(\frac{\pi}{H^2}\right) \sim \exp\left(\frac{3}{8V(\phi)}\right). \tag{12}$$

Это распределение существует благодаря балансу дрейфовых и диффузионных членов. Второй дает вклад из области $\phi \le M_p$ в область $\phi \ge M_p$. Но условие медленного скатывания не работает в первом области, что составляет проблему используемого приближения. [?], [?], [?]

3. Уравнение Абеля

Определим суперпотенциал [11]

$$W(\phi) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \qquad V(\phi) = W(\phi) - \frac{(W'(\phi))^2}{18W(\phi)},$$

Тогда пренебрегая слагаемым с кривизной получаем

$$\dot{\phi} = -\frac{W'(\phi)}{3H(\phi)}. \tag{13}$$

причем суперпотенциал параметризован произвольной константой: $W(\phi) \to W(\phi, C)$. Это определяется следующей теоремой [?], [?]:

Теорема. Пусть $x = 3\sqrt{2}\phi$, $\chi = \log|V|$, $\kappa = \pm 1$. Для данного $V(x)$, величина $W(x, C)$ выражается соотношением

$$W(x,C) = V(x)\left(\frac{\left(y(x,C) + \sqrt{y^2(x,C) - 1}\right)^2 + 1}{1 - \left(y(x,C) + \sqrt{y^2(x,C) - 1}\right)^2}\right)^2,$$

где $y(x, C) \neq \pm 1$ общее решение уравнения Абеля 1 рода

$$y' = -\frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)(\kappa - \chi' y),$$

и специальный случай $V = 0$ имеет место если и только если $y = \pm 1$ и $W = C\exp(\kappa x)$. Таким образом получаем уравнения Ланжевена и Эйнштейна-Смолуховского

$$\dot{\phi} = -\frac{W'(\phi)}{3H(\phi)} + \frac{H^{3/2}(\phi)}{2\pi}\eta(t), \tag{14}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{H^{3/2}}{8\pi^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(H^{3/2}P\right) + \frac{W'(\phi)}{3H}P\right). \tag{15}$$

Стационарное решение последнего оказывается нормируемым в случае исчезающего потенциала:

$$P = \exp\left(\frac{3}{8W(\phi)}\right). \tag{16}$$

Заключение

Таким образом, переход к суперпотенциалу, по видимому, позволяет построить стационарное распределение, свободное от проблемы меры, поскольку последняя возникает именно в связи с высокой чувствительностью меры к выбору временной переменной. Мы намерены более подробно изучить этот вопрос в дальнейших публикациях.

Список литературы

1. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B* 1980; pp. 99-102.

2. Guth A.H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D* 1981; p. 347.

3. Vilenkin A. Birth of inflationary universes. *Phys. Rev. D* 1983; p. 2848.

4. Coleman, S. and De Luccia, F. Gravitational Effects on and of Vacuum Decay. *Phys. Rev. D* 1980; D21, pp. 3305-3315.

5. Linde A.D. Eternal Chaotic Inflation. *Mod. Phys. Lett. A* 1986; p. 81.

6. Линде А.Д. *Физика элементарных частиц и инфляционная космология* М.: Наука. 1990.

7. Starobinsky A.A. Stochastic de Sitter (inflationary) stage in the early universe, 1988 Field Theory. *Quantum Gravity and Strings. Lecture Notes in Physics,* vol 246. Springer, Berlin, Heidelberg.

8. Mezhlumian A.S. Towards the Theory of Stationary Universe [arXiv:gr-qc/9302009].

9. Linde A.D., Mezhlumian A.S. Stationary Universe *Phys. Lett.* 1993; B307 pp. 25-33.

10. Linde A.D.,Linde D.A. Mezhlumian A.S. From the Big Bang Theory to the Theory of a Stationary. Universe *Phys. Rev.* 1994; D49 pp. 1783-1826

11. Юров А.В., Юров В.А., Червон С.В., Сами М. Потенциал полной энергии как суперпотенциал в интегрируемых космологических моделях. *ТМФ.* 2011; 166:2 стр. 299-311.

12. Yurov A. V., Yurov V. A. Friedman vs Abel equations: A connection unraveled. *J.Math.Phys.* 2010; 51:082503.

13. Yaparova A.V, Yurov A. V., Yurov V. A. Application of the Abel Equation of the 1st kind to an inflation analysis of non-exactly solvable cosmological models. *Grav.Cosmol.* 2014; 20 (2), pp. 106-115.

References

1. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B* 1980; pp. 99-102.

2. Guth A.H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D* 1981; p. 347.

3. Vilenkin A. Birth of inflationary universes. *Phys. Rev. D* 1983; p. 2848.

4. Coleman, S. and De Luccia, F. Gravitational Effects on and of Vacuum Decay. *Phys. Rev. D* 1980; D21, pp. 3305-3315.

5. Linde A.D. Eternal Chaotic Inflation. *Mod. Phys. Lett. A* 1986; p. 81

6. Linde A.D. *Fizika ehlementarnihkh chastic i inflyacionnaya kosmologiya* M.: Nauka. 1990.

7. Starobinsky A.A. Stochastic de Sitter (inflationary) stage in the early universe, 1988 Field Theory. *Quantum Gravity and Strings. Lecture Notes in Physics,* vol 246. Springer, Berlin, Heidelberg.

8. Mezhlumian A.S. Towards the Theory of Stationary Universe [arXiv:gr-qc/9302009].

9. Linde A.D., Mezhlumian A.S. Stationary Universe *Phys. Lett.* 1993; B307 pp. 25-33.

10. Linde A.D.,Linde D.A. Mezhlumian A.S. From the Big Bang Theory to the Theory of a Stationary. Universe *Phys. Rev.* 1994; D49 pp. 1783-1826

11. Yurov A.V., Yurov V.A., Chervon S.V., Samy M. Total energy potential as a superpotential in integrable cosmological models. *Theoret. and Math. Phys.* 2011; 166:2 pp. 259-269

12. Yurov A. V., Yurov V. A. Friedman vs Abel equations: A connection unraveled. *J.Math.Phys.* 2010; 51:082503.

13. Yaparova A.V, Yurov A. V., Yurov V. A. Application of the Abel Equation of the 1st kind to an inflation analysis of non-exactly solvable cosmological models. *Grav.Cosmol.* 2014; 20 (2), pp. 106-115.

Авторы

Юров Артём Валерианович, д.ф.-м.н., профессор, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия.
E-mail: aiurov@kantiana.ru

Юрова Алла Александровна, к.ф.-м.н., доцент, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия
E-mail: aiurova@kantiana.ru

Чириков Роман Викторович, старший преподаватель, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, ул. Невского, 14, 236041, Россия
E-mail: rchirikov1@kantiana.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Юров А. В., Юрова А. А., Чириков Р. В. Стохастическая динамика и вечная инфляция. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 1. С. 174—179.

Authors

Yurov Artyom Valerianovich, Doctor of Physico-mathematical Sciences, professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.
E-mail: aiurov@kantiana.ru

Yurova Alla Alexandrovna, PhD, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.
E-mail: aiurova@kantiana.ru

Chirikov Roman Victorovich, Senior Lecturer, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, st. Nevsky, 14, 236041, Russia.
E-mail: rchirikov1@kantiana.ru

Please cite this article in English as:
Yurov A. V., Yurova A. A., Chirikov R. V. Stochastic Dynamics and Eternal Inflation. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 174–179.