

УДК 530.12, 530.122

© Баранов А. М., Савельев Е. В., 2025

ОТКРЫТАЯ МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ КАК ЗАДАЧА ОБ ОСЦИЛЛЯТОРЕ В ОДНОРОДНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Баранов А. М.^{a,1}, Савельев Е. В.^{b,2}^a ФГБОУ ВПО Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева (КГПУ), г. Красноярск, 660049, Россия.^b ООО «ПРОФИЛЬ - 2С», Москва, 123007, Россия.

Рассмотрена возможность нахождения точных космологических решений уравнений Эйнштейна без космологической постоянной для открытой модели Вселенной путем сведения проблемы к эквивалентной задаче об осцилляторе в однородном силовом поле («механический подход»). Взятая космологическая модель заполнена материей в приближении идеальной жидкости с не равным нулю давлением и на галлеевой асимптотике переходит в открытую космологическую модель Фридмана. Обнаружено влияние «силового поля» на поведение модели. Получена эволюция расширения полной модели открытой безмассовой Вселенной от вакуумного состояния релятивистских струн до ультрарелятивистского режима.

Ключевые слова: открытые космологические модели, «механический» подход к конструированию космологических моделей, обобщение открытой модели Фридмана.

THE OPEN UNIVERSE MODEL AS AN OSCILLATORY TASK IN A HOMOGENOUS FORCE FIELD

Baranov A. M.^{a,1}, Saveljev E. V.^{b,2}^a Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astafyev, Krasnoyarsk, 60049, Russia.^b LLC "PROFILL - 2S", Moscow, 123007, Russia.

The possibility of finding the exact cosmological solutions of the Einstein equations without cosmological constant for open model of the Universe is considered within the framework of an equivalent oscillatory task in a homogeneous force field ("a mechanical approach"). The taken cosmological model is filled with the matter in approach of perfect fluid with a pressure not equal to zero. On the asymptotic infinity this model is the open cosmological model of Friedman. The influence of the "force field" on behavior of model is discovered. The evolution of the expansion of the open massless Universe complete model from the vacuum state of relativistic strings to the ultra-relativistic regime has also been obtained.

Keywords: the open universe models, a "mechanical" approach to the construction of cosmological models, a generalization of the open model Friedman.

PACS: 04.20.Jb, 98.80.Jk

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.4.5-12

Введение

В работах [1] и [2] иллюстрируется подход к моделированию открытой Вселенной как задачи о «механическом» движении частицы под действием силового поля. Другими словами, демонстрируется замена проблемы решения космологической задачи на проблему решения «механической»

¹E-mail: alex_m_bar@mail.ru²E-mail: profill07@mail.ru

задачи. При этом такой подход позволяет получить точные космологические решения уравнений Эйнштейна [3], обобщающие решение Фридмана [4] для открытой Вселенной. В настоящей работе будет продолжен такой подход, но с использованием задачи для осциллятора в некотором однородном силовом поле.

Исходный вид метрики запишем как метрику, конформную метрике Минковского (подход Фока [5], [6])

$$ds^2 = \exp(2\sigma) \cdot \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

с конформным множителем $\exp(2\sigma)$, являющимся функцией переменной S , квадрат которой равен $S^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - r^2$; $\sigma = \sigma(S)$; $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1; -1; -1; -1)$ – метрический тензор Минковского; скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная равны единице, а эйнштейновская гравитационная постоянная равна здесь $\varkappa = 8\pi$. Греческие индексы пробегают значения: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Уравнения Эйнштейна используются в следующей записи:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu} \quad (2)$$

с тензором энергии-импульса (ТЭИ) в приближении идеальной паскалевой жидкости

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p) \cdot u_\mu u_\nu - p \cdot g_{\mu\nu} = \varepsilon \cdot u_\mu u_\nu + p \cdot b_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна; $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи; R – скалярная кривизна; ε – плотность энергии; p – давление; 4-скорость $u_\mu = \exp(\sigma) S_{,\mu}$; $u_\mu u^\mu = 1$. Здесь введен 3-проектор $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ на 3-пространство, который одновременно является и 3-метрическим тензором, ортогональным 4-скорости ($b_{\mu\nu} u^\nu = 0$), можно спроектировать гравитационные уравнения (2) на временноподобную мировую линию и пространственноподобную площадку, то есть расщепить уравнения как это делается, например, в [7]:

$$G_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\varkappa T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\varkappa \varepsilon,$$

$$G_{\mu\nu} b^\mu{}_\rho b^{\nu\sigma} = -\varkappa T_{\mu\nu} b^\mu{}_\rho b^{\nu\sigma} = p \cdot b_{\rho\sigma}.$$

В результате (1+3)-расщепления система уравнений (2) при учете паскалевости сведется к системе двух дифференциальных уравнений в полных производных

$$3 \left(2 \frac{\sigma'}{S} + (\sigma')^2 \right) = \varkappa \varepsilon \cdot \exp(2\sigma),$$

$$2 \left(\sigma'' + 2 \frac{\sigma'}{S} + \frac{(\sigma')^2}{2} \right) = -\varkappa p \cdot \exp(2\sigma),$$

где штрихом обозначена производная d/dS .

Эта же система уравнений может быть представлена (после замены $\sigma(S) = 2 \ln y(S)$) в виде

$$12 \frac{dy}{dS} \left(\frac{dy}{dS} + \frac{y}{S} \right) = \varkappa \varepsilon \cdot y^6, \quad (4)$$

$$4 \left(\frac{d^2 y}{dS^2} + \frac{2}{S} \frac{dy}{dS} \right) = -\varkappa p \cdot y^5. \quad (5)$$

1. «Механический» подход

Далее при выборе новой переменной $x = \frac{1}{S}$ уравнение (4) переписется как

$$12 x^4 \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} \right) = \varkappa \varepsilon \cdot y^6. \quad (6)$$

Уравнение (5) представим в записи, аналогичной второму закону Ньютона для частицы единичной массы,

$$F(x, y, p) = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\varkappa p \frac{y^5}{4x^4}, \quad (7)$$

где F – аналог «механической силы».

Такая запись одного из уравнений тяготения позволяет использовать различные потенциальные «механические силы» и заменить решение космологической проблемы на «механическую». В частности, отсутствие силы ($F = 0$, инерциальное движение) приводит к открытой космологической модели Фридмана в форме Фока ([5], [6]):

$$\exp(2\sigma_F) = \left(1 - \frac{A}{S}\right)^4 = (1 - Ax)^4, \quad (8)$$

где обозначим в дальнейшем через A_F фридмановскую постоянную A , входящую в конформный множитель (8), а также связанную с плотностью энергии некогерентной пыли, заполняющей открытую космологическую модель Фридмана (например, [5], с.482; [6], с.75),

$$\varkappa \varepsilon = \frac{12A}{S^3 \left(1 - \frac{A}{S}\right)^6}.$$

Если выбрать силу Гука ($F_H \propto y$), реализующейся для гармонического осциллятора без трения, то получим открытую космологическую модель, заполненную веществом и излучением ([1], [2]). Дальнейшее исследование будет связано с суперпозицией силового поля Гука и однородного силового поля $F_0 = const$

$$F = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} B^2 y^2 - F_0 y \right) = -B^2 y + F_0, \quad (9)$$

где B^2 – аналог коэффициента жесткости осциллятора или квадрата собственной частоты осциллятора с единичной массой.

В этом случае уравнение, отвечающее выбранной силе (9), примет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + B^2 y = F_0. \quad (10)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$y(x) = C_0 \cos(Bx + \alpha) + \frac{F_0}{B^2}, \quad (11)$$

где C_0 и α суть постоянные интегрирования.

Одновременно эта функция $y(x) = \exp(\sigma/2)$ является решением космологических уравнений тяготения.

Нахождение постоянных связано с поведением функции $y(x)$ при $S \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow 0$). Будем считать, что решение (11) проходит через решение Фридмана на асимптотике для открытой космологической задачи: $y(x) = 1 - A_F x$.

В итоге находим:

$$C_0 = \sqrt{\left(1 - \frac{F_0}{B^2}\right)^2 + \left(\frac{A_F}{B}\right)^2}; \quad \tan \alpha = \frac{A_F/B}{(1 - F_0/B^2)}. \quad (12)$$

2. Функция состояния

1. Можно ввести функцию состояния как $\beta = p/\varepsilon$, которая в каждый момент S есть уравнение состояния (p – давление, ε – плотность энергии), и безразмерную переменную $z = B \cdot x$. Тогда функция состояния записывается в виде

$$\beta = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z \cdot \cot(\varphi(z)) \cdot X(z)}{X(z) + z \cdot \tan(\varphi(z))}, \quad (13)$$

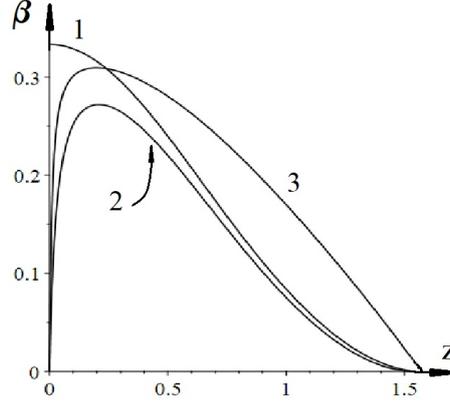


Рис. 1. График поведения функции состояния β в зависимости от значений параметров α и f_0 .

где $\varphi(z) = z + \alpha$,

$$X(z) = 1 + f_0 \sqrt{1 + \cot(\varphi(z))^2}; \quad f_0 = \frac{F_0}{C_0 B^2}. \quad (14)$$

При $F_0 = 0$ получаем $X(z) = 1$ и

$$\beta = \frac{1}{3} \cdot \frac{z \cdot \cot(\varphi(z))}{1 + z \cdot \tan(\varphi(z))}, \quad (15)$$

совпадающую с функцией состояния из работ [1] и [2].

Полученная с помощью «механического подхода» открытая космологическая модель имеет два управляющих параметра α и f_0 , позволяющих менять поведение модели (Рис.1). Например, для кривой 1 в точке $z = 0$ (начало процесса расширения Вселенной) выполняется ультрарелятивистское уравнение состояния ($p = \varepsilon/3$), то есть массовая материя отсутствует и реализуется модель «электромагнитной Вселенной» (Вселенной, заполненной безмассовой материей), когда оба параметра равны нулю. Если «включить» параметр, отвечающий за наличие массовой материи, то есть взять $\alpha > 0$, то такая модель, заполненная как массовой, так и безмассовой материей, соответствует кривой 2 с максимумом ниже ультрарелятивистского состояния. Однако «включение» еще и положительного «силового параметра» $f_0 > 0$ (кривая 3) приводит к эффекту «компенсации» присутствия массовой материи (сравни кривые 2 и 3).

2. Чтобы в большей степени прояснить ситуацию, попробуем подойти к проблеме с другой стороны. Для этого перейдем к новой переменной $z \rightarrow \zeta = 1/z = 1/Bx = S/B$. После этого выражение (13) переписывается в виде

$$\beta = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cot(\psi(\zeta)) \cdot Y(\zeta)}{\tan(\psi(\zeta)) + \zeta \cdot Y(\zeta)}, \quad (16)$$

где $\psi(\zeta) = 1/\zeta + \alpha$, а $Y(\zeta)$ есть

$$Y(\zeta) = 1 + f_0 \sqrt{1 + \tan^2(1/\zeta + \alpha)}. \quad (17)$$

При $f_0 = 0$, $Y(\zeta) = 1$ и $\beta = 0$ в точке $\zeta_0 = \frac{2}{(\pi - 2\alpha)}$.

Далее приведено поведение функции состояния β на Рис.2 – Рис.5 для различных ситуаций, связанных с управляющими параметрами f_0 и α .

На Рис.2 демонстрируется влияние «силового» параметра f_0 , когда $\alpha = 0$, то есть массивная материя отсутствует и реализуется космологическая модель, заполненная безмассовой материей. Сначала $f_0 = 0$ и $\alpha = 0$ (кривая 1). Видно, что когда «силовой» параметр «включается» ($f_0 > 0$),

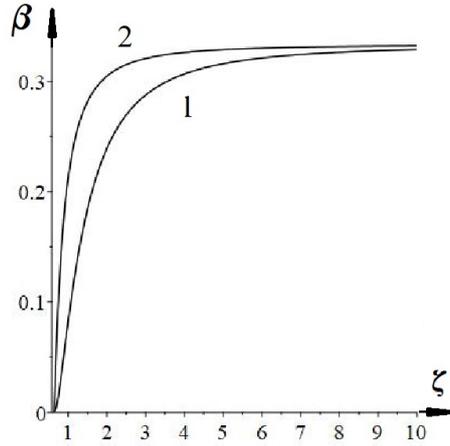


Рис. 2. Демонстрация сокращения продолжительности начальной стадии расширения Вселенной, заполненной безмассовой материей с $\alpha = 0$ (кривая 1), когда при «включении» положительного «силового» параметра $f_0 > 0$ происходит более быстрый переход к ультрарелятивистскому режиму (кривая 2).

продолжительность начального процесса расширения Вселенной, заполненной безмассовой материей («электромагнитная Вселенная»), сокращается (кривая 2 с $f_0 > 0$ и $\alpha = 0$). Это приводит к более быстрому переходу к ультрарелятивистской стадии. Асимптотически, когда $f_0 > 0$ и $\alpha = 0$, кривая 2 достигает режима с уравнением состояния $\varepsilon = 3p$, как и в случае с $f_0 = 0$, $\alpha = 0$, и обе кривые 1 и 2 сближаются. Для очень больших ζ они практически сливаются. Например, разница между значениями кривых 1 и 2 в точке $\zeta = 8 \cdot 10^4$ и $f_0 = 5$ с большой точностью есть $\Delta\beta_{21} = 0$ (в безразмерных единицах).

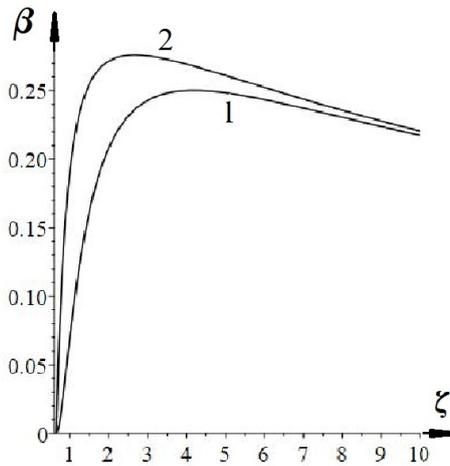


Рис. 3. Демонстрация сокращения продолжительности начальной стадии процесса расширения Вселенной, заполненной массовой материей ($\alpha \neq 0$,) когда реализуется более быстрый переход к режиму эволюционного расширения при «включении» параметра $f_0 > 0$.

3. В случае присутствия массовой материи с $\alpha \neq 0$ получаем подобную ситуацию как это отражено на Рис.3, когда «включен» «силовой» параметр $f_0 > 0$. Асимптотически кривые 1 и 2 также сближаются. Например, $\Delta\beta_{12} = 0$ с большой точностью для $\alpha = 0.05$, $f_0 = 5$ в точке $\zeta = 7,99995 \cdot 10^{10}$ (в безразмерных единицах).

4. Естественно, возникает вопрос: что произойдет, если мы «включим» отрицательные значения «силового» параметра f_0 , то есть возьмем $f_0 < 0$? Получается, что для больших отрицатель-

ных значений параметра f_0 ($|f_0| \gg 1$) поведение функции состояния β существенно не меняется для обоих случаев: $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$.

Однако, для $f_0 = -1$, получаем интересное поведение функции состояния β (см. Рис.4) при отсутствии безмассовой материи ($\alpha = 0$).

На Рис.4 изображены две кривые с $f_0 = 1$ (кривая 1) и $f_0 = -1$ (кривая 2). Эти кривые являются почти зеркальными отражениями друг друга относительно оси ζ .

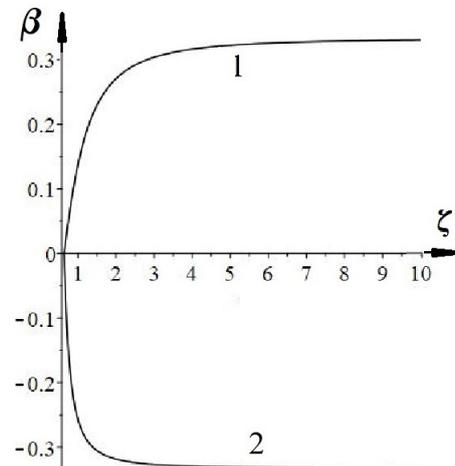


Рис. 4. Поведение функции состояния β для Вселенной с ($f_0 = 1$ (кривая 1 при отсутствии массовой материи) и $f_0 = -1$ (кривая 2 при наличии вакуумного состояния). Кривые 1 и 2 являются почти зеркальным отражением друг друга относительно оси ζ .

Кривая 2 соответствует вакуумному состоянию Вселенной с уравнением состояния $\varepsilon = -3p$, в то время как кривая 1 описывает эволюцию бесмассовой Вселенной с ультрарелятивистским уравнением состояния $\varepsilon = 3p$.

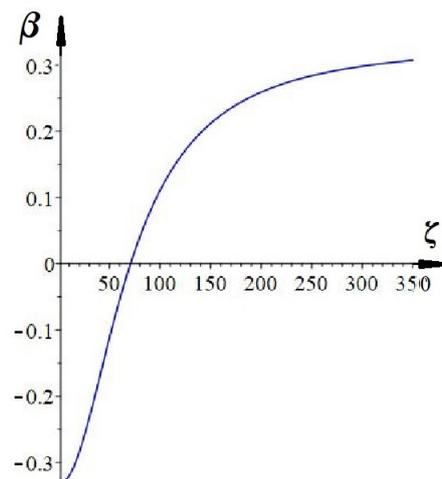


Рис. 5. Полное поведение эволюции открытой Вселенной, заполненной безмассовой материей.

Оказывается, что для $f_0 = -0.9999$ и начальной точки $\zeta_0 = 2/(\pi - 2.6)$ функция состояния β в отсутствие массовой материи на Рис.5 описывает полную эволюцию открытой безмассовой Вселенной, начинающейся с вакуумного состояния космических релятивистских струн ($\beta = -1/3$) и заканчивающейся ультрарелятивистской стадией ($\beta = 1/3$).

Заключение

В рамках «механического подхода» была рассмотрена проблема нахождения открытой космологической модели Вселенной как задача о гармоническом осцилляторе, помещенном в однородное силовое поле. При этом решение уравнений Эйнштейна удалось свести к решению аналога уравнения Ньютона (2-й закон динамики). Полученное решение гравитационных уравнений с источником в приближении паскалевой идеальной жидкости и метрикой в форме Фока содержит два контрольных параметра. Один параметр α связан с материей (безмассовой или массовой), а другой f_0 – с «силовым полем».

Для анализа эволюции полученной космологической модели была введена функция состояния β как отношение давления к плотности энергии материи. Поведение этой функции отражено на Рис.1-Рис.5. Проведенный анализ для различных значений контрольных параметров для модели, заполненной как безмассовой, так и массовой материей, показывает наличие влияния «силового параметра» f_0 как на эволюцию модели, так и на начальную стадию процесса расширения Вселенной.

В частности, для конкретного значения параметра, который является аналогом «силы», в рамках поведения функции состояния, начиная от вакуумной стадии с $\beta = -1/3$ и заканчивая ультрарелятивистским режимом с $\beta = 1/3$, получена полная эволюция открытой безмассовой модели Вселенной.

Список литературы

1. Баранов А. М., Савельев Е. В. Точные решения для конформно-плоской вселенной. I. Эволюция модели как задача о движении частицы в силовом поле. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2014. № 1. С. 37–46.
2. Baranov A. M., Saveljev E. V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field. *Space, Time and Fundamental Interactions*. 2020, no. 3. pp. 27–36.
3. Эйнштейн А. *Собрание научных трудов*. М.: Наука, 1966. Т. I, с. 448–451.
4. Friedman A. A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Z. Phys.*, 1924, vol. 21, iss. 1, pp. 326–333.
5. Фок В. А. *Теория пространства, времени и тяготения*. М.: ГИЗФМЛ, 1961, 563 с.
6. Мицкевич Н. В. *Физические поля в общей теории относительности*. М.: Наука, 1969. 563 с.
7. Владимиров Ю. С. *Системы отсчета в теории гравитации*. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.

References

1. Baranov A. M., Saveljev E. V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2014, no. 1, pp. 37–46 (in Russian).
2. Baranov A. M., Saveljev E. V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 3, pp. 27–36.
3. Einstein A. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Akad. Wiss., phys-math.*, 1915, vol. 48, no. 2, pp. 484–451.
4. Friedman A. A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Z. Phys.*, 1924, vol. 21, iss. 1, pp. 326–333.
5. Fock V. A. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. New York: Pergamon Press, 1964. 460 p.
6. Mitskievich N. V. *Physical Fields in General Relativity*. Moscow: Nauka, 1969. 563 p. (in Russian).
7. Vladimirov Yu. S. *Reference Frames in the Gravitation Theory*. Moscow: Energoizdat, 1982. 256 p. (in Russian).

Авторы

Баранов Александр Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ФГБОУ ВПО Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева (КГПУ), ул. Ады Лебедевой, 89, г. Красноярск, 660049, Россия.

E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Савельев Евгений Викторович, к.ф.-м.н., доцент, ООО "ПРОФИЛЬ - 2С", 78, Хорошевское шоссе, Москва, 123007, Россия.

E-mail: profill07@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Баранов А. М., Савельев Е. В. Открытая модель Вселенной как задача об осцилляторе в однородном силовом поле. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2025. № 4. С. 5–12.

Authors

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P.Astafyev, 89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 660049, Russia.

E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Saveljev Evgeniy Viktorovich, Candidate of Phys.-Mat. Sci, Assistant Professor, LLC "PROFILL - 2S", 78, Khoroshevskoe sh., Moscow, 123007, Russia.

E-mail: profill07@mail.ru

Please cite this article in English as:

Baranov A. M., Saveljev E. V. The open Universe model as an oscillatory task in a homogenous force field. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 4, pp. 5–12.