УДК 521.184

ДЕВИАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЯХ

Павлов Ю. В.[a,1], Вандеев В. П.[b,2]

[a] Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Россия.
[b] Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова, г. Гатчина, Ленинградская обл., 188300, Россия.

Исследуются особенности девиации круговых траекторий в центральном поле в нерелятивистском и релятивистском случаях. Получены формулы для девиации траекторий и эффекта Широкова с учетом космологической постоянной и даны оценки ее влияния на смещение перицентра при вращении в гравитационном поле Шварцшильда.

Ключевые слова: девиация геодезических, смещение перигелия, космологическая постоянная.

TRAJECTORY DEVIATION IN RELATIVISTIC AND NON-RELATIVISTIC CASES

Pavlov Yu. V.[a,1], Vandeev V. P.[b,2]

[a] Institute of Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 199178, Russia.
[b] Petersburg Nuclear Physics Institute of National Research Centre “Kurchatov Institute”, Gatchina, 188300, Russia.

Features of deviation of circular trajectories in the central field in non-relativistic and relativistic cases are investigated. Formulas for the deviation of trajectories and the Shirokov effect are obtained taking into account the cosmological constant and estimates of its influence on the shift of the pericenter are given during rotation in the Schwarzschild gravitational field.

Keywords: geodesic deviation, perihelion shift, cosmological constant.

PACS: 04.20.-q, 95.10.Ce, 04.70.Bw
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.4.90-97

Введение

Целью работы является исследование влияния космологической постоянной на девиацию траекторий в статическом сферически-симметричном пространстве-времени и на величину эффекта Широкова. В 1973 году Широковым [1] было обнаружено различие частот ортогональных колебаний пробных тел на круговой орбите в поле Шварцшильда. Соответствующие колебания в ньютоновской теории происходили с одинаковой частотой, равной частоте обращения тела по орбите. Это явление исследовалось позднее рядом авторов (см., например, [2-8]). Явление несовпадения частот колебаний связано со смещением перицентра возмущенной орбиты. В случае движения

[1]E-mail: yuri.pavlov@mail.ru
[2]E-mail: vandeew.vyacheslav@yandex.ru

вокруг Солнца смещение перигелия относиться к классическим эффектам Общей теории относительности и является одним из первых ее экспериментальных подтверждений. На этот эффект могут оказывать влияние различные поправки, обусловленные свойствами притягивающего объекта (вращение, его сплюснутость) и наличием окружающей материи и космологической постоянной.

В первом разделе рассмотрена девиация для круговых траекторий в нерелятивистском случае для центрально-симметричного потенциала общего вида и показано, что совпадение частот колебаний имеет место только для случая притяжения точечной массы. Во втором разделе получены общие формулы девиации круговых траекторий для статического сферически-симметричного случая. Конкретные оценки возможности экспериментального наблюдения эффекта от присутствия космологической постоянной даны для случая гравитационного поля точечной массы.

1. Нерелятивистский случай

Обозначим через $U(\mathbf{r})$ потенциальную энергию пробной частицы массой m в заданном консервативном силовом поле. Уравнения движения такой частицы в декартовых координатах

$$m\ddot{x}^k = -\partial^k U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Здесь и далее производные по времени обозначаем точкой над символом. Пусть $x^k(t)$ — траектория первой частицы в рассматриваемом силовом поле, а $X^k(t)$ — близкая к данной траектория частицы с такой же массой

$$X^k(t) = x^k(t) + \eta^k(t), \tag{2}$$

где η^k — координаты вектора девиации. Если уравнения движения в силовом поле не зависят от массы пробного тела, как, например, в гравитационном поле, то $x^k(t)$ и $X^k(t)$ — близкие траектории двух произвольных пробных тел. Из уравнений движения получим

$$m\ddot{X}^k = m\ddot{x}^k + m\ddot{\eta}^k = -\partial^k U(\mathbf{x}+\eta). \tag{3}$$

Раскладывая потенциал с точностью $O(\eta^2)$

$$U(\mathbf{x}+\eta) = U(\mathbf{x}) + \eta^n \partial_n U(\mathbf{x}) + O(\eta^2) \tag{4}$$

и учтя (1), получим из (3) уравнение девиации траекторий в декартовых координатах

$$m\ddot{\eta}^k = -\eta^n \partial^k \partial_n U(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Рассмотрим далее центральное поле $U(\mathbf{r}) = U(r)$ и обозначим $\varphi(r) = U(r)/m$. В случае гравитационного поля $\varphi(r)$ — это гравитационный потенциал. Тогда уравнение девиации (5) траекторий для центрального потенциала в декартовых координатах примет вид

$$\frac{d^2\eta^i}{dt^2} = -\eta^i \frac{\varphi'}{r} - x^i \eta^k x_k \left(\frac{\varphi''}{r^2} - \frac{\varphi'}{r^3}\right), \tag{6}$$

где штрих обозначает производную по r. Отметим что поднятие и опускание индексов в нерелятивистском случае в декартовых координатах осуществляется единичной матрицей поэтому $x_k = x^k$ и далее в этом разделе мы не будем различать их.

Для решения уравнений девиации в случае круговой орбиты используем сферические координаты

$$x^1 = r\sin\theta\cos\phi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\phi, \quad x^3 = r\cos\theta. \tag{7}$$

Пусть $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ — единичные векторы в направлениях r, θ, ϕ соответственно. Тогда

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \mathbf{i}\cos\phi\sin\theta + \mathbf{j}\sin\phi\sin\theta + \mathbf{k}\cos\theta, \\ \mathbf{e}_\theta = \mathbf{i}\cos\phi\cos\theta + \mathbf{j}\sin\phi\cos\theta - \mathbf{k}\sin\theta, \\ \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{i}\sin\phi + \mathbf{j}\cos\phi, \end{cases} \tag{8}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — декартовы орты. Координаты произвольного вектора $\mathbf{V}$ в декартовом и сферическом базисах связаны следующими из (8) соотношениями

$$\begin{cases} V^1 = V^r \cos\phi \sin\theta + V^\theta \cos\phi \cos\theta - V^\phi \sin\phi, \\ V^2 = V^r \sin\phi \sin\theta + V^\theta \sin\phi \cos\theta + V^\phi \cos\phi, \\ V^3 = V^r \cos\theta - V^\theta \sin\theta. \end{cases} \tag{9}$$

Параметры орбит в центральном поле могут быть найдены с помощью эффективного потенциала [9]

$$\varphi_{\mathrm{eff}}(r) = \varphi(r) + \frac{L^2}{2m^2 r^2}, \tag{10}$$

где L — момент импульса материальной точки относительно центра притяжения $r = 0$. Из выражения для энергии частицы в центральном поле [9]

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + m\varphi_{\mathrm{eff}}(r) \tag{11}$$

получим условие существования круговых орбит

$$\varphi_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{E}{m}, \qquad \varphi'_{\mathrm{eff}}(r) = \varphi'(r) - \frac{L^2}{m^2 r^3} = 0. \tag{12}$$

Поэтому на круговой орбите $\varphi'(r) > 0$ и для угловой скорости вращения $\omega = L/(mr^2)$ получаем из (12)

$$\omega = \sqrt{\frac{\varphi'(r)}{r}}. \tag{13}$$

Круговая орбита с данным r устойчива, если

$$\varphi''_{\mathrm{eff}}(r) > 0. \tag{14}$$

Поэтому на устойчивой круговой орбите

$$\Omega^2 = \varphi'' + 3\frac{\varphi'}{r} > 0. \tag{15}$$

Далее напишем уравнение девиации траектории относительно круговой орбиты радиуса r, лежащей в плоскости $\theta = \pi/2$. В этом случае

$$x^1 = r\cos\phi, \quad x^2 = r\sin\phi, \quad x^3 = 0, \tag{16}$$

$$\eta^1 = \eta^r \cos\phi - \eta^\phi \sin\phi, \quad \eta^2 = \eta^r \sin\phi + \eta^\phi \cos\phi, \quad \eta^3 = -\eta^\theta, \tag{17}$$

и из системы уравнений (6) для вектора девиации получим для $i = 3$

$$\frac{d^2\eta^\theta}{dt^2} = -\eta^\theta \frac{\varphi'}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\eta^\theta}{dt^2} + \omega^2 \eta^\theta = 0, \tag{18}$$

и для компонент $i = 1, 2$:

$$\frac{d^2\eta^r}{dt^2}\cos\phi - 2\frac{d\eta^r}{dt}\omega\sin\phi - \frac{d^2\eta^\phi}{dt^2}\sin\phi - 2\frac{d\eta^\phi}{dt}\omega\cos\phi = -\eta^r\left(\varphi'' - \frac{\varphi'}{r}\right)\cos\phi, \tag{19}$$

$$\frac{d^2\eta^r}{dt^2}\sin\phi + 2\frac{d\eta^r}{dt}\omega\cos\phi + \frac{d^2\eta^\phi}{dt^2}\cos\phi - 2\frac{d\eta^\phi}{dt}\omega\sin\phi = -\eta^r\left(\varphi'' - \frac{\varphi'}{r}\right)\sin\phi. \tag{20}$$

Умножая уравнение (19) на $\cos\phi$, а уравнение (20) на $\sin\phi$, и складывая их, получим

$$\frac{d^2\eta^r}{dt^2} + \eta^r\left(\varphi'' - \frac{\varphi'}{r}\right) - 2\omega\frac{d\eta^\phi}{dt} = 0. \tag{21}$$

Умножая уравнение (19) на $(-\sin\phi)$, а уравнение (20) на $\cos\phi$, и складывая их, получим

$$\frac{d^2\eta^\phi}{dt^2} + 2\omega\frac{d\eta^r}{dt} = 0. \tag{22}$$

Приведем общее решение уравнения (18) и системы линейных дифференциальных уравнений (21), (22) для круговой орбиты в центральном поле в нерелятивистском случае, при $\Omega^2 > 0$ (т.е. для устойчивой круговой орбиты):

$$\begin{cases} \eta^\theta = C_{1\theta}\sin\omega t + C_{2\theta}\cos\omega t, \\ \eta^r = C_1\sin\Omega t + C_2\cos\Omega t + C_3, \\ \eta^\phi = 2\frac{\omega}{\Omega}C_1\cos\Omega t - 2\frac{\omega}{\Omega}C_2\sin\Omega t + \frac{\Omega^2-4\omega^2}{2\omega}C_3 t + C_4, \end{cases} \tag{23}$$

где $C_{1\theta}, C_{2\theta}$, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Поэтому колебания вектора девиации в направлении азимутального угла θ происходит с той же частотой ω, что и вращение тела на траектории. Колебания в направлениях r, ϕ происходят с частотой Ω, отличающейся, вообще говоря, от ω. Условие совпадения частот колебаний:

$$\Omega = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'' + 2\frac{\varphi'}{r} = 0, \quad \varphi' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = -\frac{C_1'}{r} + C_2', \tag{24}$$

где $C_1' > 0$, C_2' — произвольные постоянные.

Итак, *для центральных потенциалов колебания девиации для круговой траектории в нерелятивистском случае в направлении θ всегда происходят с той же частотой, что и частота кругового вращения ω. Колебания в направлениях r, ϕ происходят с частотой Ω, совпадающей с ω только в случае притяжения с потенциалом $\sim 1/r$.*

2. Девиация геодезических в ОТО и эффект Широкова

Относительное ускорение двух частиц, свободно движущихся в гравитационном поле, описывается уравнением девиации геодезических [10]

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i_{klm}u^k u^m \eta^l, \tag{25}$$

где

$$R^{\,i}_{\ klm} = \partial_l\Gamma^{\,i}_{\ km} - \partial_m\Gamma^{\,i}_{\ kl} + \Gamma^{\,i}_{\ nl}\Gamma^{\,n}_{\ km} - \Gamma^{\,i}_{\ nm}\Gamma^{\,n}_{\ kl} \tag{26}$$

— тензор кривизны,

$$\frac{D\eta^i}{ds} = (\nabla_k\eta^i)u^k, \tag{27}$$

∇_k — ковариантная производная, u^k — 4-скорость на геодезической. Вычисляя ковариантные производные

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = \frac{d^2\eta^i}{ds^2} + 2\Gamma^{\,i}_{\ kl}u^k\frac{d\eta^l}{ds} + \frac{\partial\Gamma^{\,i}_{\ kl}}{\partial x^m}u^m u^k\eta^l + \Gamma^{\,i}_{\ ml}\Gamma^{\,l}_{\ kn}u^m u^k\eta^n - \Gamma^{\,i}_{\ kl}\Gamma^{\,k}_{\ mn}u^m u^n\eta^l \tag{28}$$

и учтя, что для геодезических

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^{\,i}_{\ kl}u^k u^l = 0, \tag{29}$$

получим уравнение девиации геодезических в виде

$$\frac{d^2\eta^i}{ds^2} + 2\Gamma^{\,i}_{\ kl}u^k\frac{d\eta^l}{ds} + \frac{\partial\Gamma^{\,i}_{\ kl}}{\partial x^m}u^k u^l\eta^m = 0. \tag{30}$$

Рассмотрим статическое, сферически-симметричное пространство-время вида

$$ds^2 = f(r)\,c^2dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right). \tag{31}$$

Обозначаем координаты далее $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$. Ненулевые символы Кристоффеля равны

$$\Gamma^0_{10} = \frac{f'}{2f}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{f'}{2}B, \quad \Gamma^1_{11} = -\frac{B'}{2B}, \quad \Gamma^1_{22} = -rB, \quad \Gamma^1_{33} = -rB\sin^2\theta, \tag{32}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{\sin(2\theta)}{2}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{33}$$

Рассмотрим свободное движение массивной частицы по круговой орбите в гравитационном поле с метрикой (31). Для соответствующей времениподобной геодезической $ds = cd\tau$, τ — собственное время движущейся частицы. Выберем координаты так, чтобы плоскость орбиты частицы соответствовала значению $\theta = \pi/2$. Тогда компонента 4-скорости частицы $u^2 = 0$. На круговых орбитах в поле (31) $u^1 = 0$. Для нахождения компонент u^0, u^3 поделим обе части (31) на ds^2:

$$f(u^0)^2 - r^2(u^3)^2 = 1. \tag{34}$$

Из уравнения геодезической (29) для r-компоненты получим

$$\frac{f'B}{2}(u^0)^2 - rB(u^3)^2 = 0. \tag{35}$$

Решая систему (34), (35), получим для круговых орбит

$$(u^0)^2 = \frac{2}{2f - rf'}, \tag{36}$$

$$(u^3)^2 = \frac{f'}{2rf - r^2f'}. \tag{37}$$

Для круговых орбит с $\theta = \pi/2$ в статическом сферически-симметричном пространстве-времени (31) уравнения девиации принимают вид

$$\frac{d^2\eta^0}{ds^2} + A\frac{d\eta^1}{ds} = 0, \tag{38}$$

$$\frac{d^2\eta^1}{ds^2} + B_1\frac{d\eta^0}{ds} + B_2\frac{d\eta^3}{ds} + B_3\eta^1 = 0, \tag{39}$$

$$\frac{d^2\eta^2}{ds^2} + C\eta^2 = 0, \qquad C = (u^3)^2, \tag{40}$$

$$\frac{d^2\eta^3}{ds^2} + D\frac{d\eta^1}{ds} = 0, \tag{41}$$

где

$$A = \frac{f'}{f}u^0, \quad B_1 = f'Bu^0, \quad B_2 = -2rBu^3, \quad B_3 = \frac{(u^0)^2}{2}(f'B)' - (u^3)^2(rB)', \quad D = \frac{2}{r}(u^3). \tag{42}$$

Решение уравнения (40) для θ-компоненты

$$\eta^2 = \theta = C_1\cos\omega\tau + C_2\sin\omega\tau \qquad \tau = s/c, \tag{43}$$

представляет собой гармоническое колебание с циклической частотой ω, равной частоте вращения по круговой орбите:

$$\omega^2 = \frac{c^2f'}{2rf - r^2f'}. \tag{44}$$

Уравнения (38), (39), (41) для остальных компонент представляют собой собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений. Будем искать решение системы в виде

$$\eta^0 = \eta^0_{(0)}\exp(i\Omega s/c), \qquad \eta^1 = \eta^1_{(0)}\exp(i\Omega s/c), \qquad \eta^3 = \eta^3_{(0)}\exp(i\Omega s/c). \tag{45}$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} -\Omega^2\eta^0_{(0)} + i\Omega cA\eta^1_{(0)} = 0, \\ i\Omega cB_1\eta^0_{(0)} + (c^2B_3 - \Omega^2)\eta^1_{(0)} + i\Omega cB_2\eta^3_{(0)} = 0, \\ i\Omega cD\eta^1_{(0)} - \Omega^2\eta^3_{(0)} = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Для существования ненулевых решений этой линейной системы уравнений необходимо и достаточно равенство нулю определителя системы:

$$\Omega^4(B_3 - B_2D - AB_1 - \Omega^2/c^2) = 0. \tag{47}$$

Ненулевым решением будет

$$\Omega^2 = \frac{c^2B}{2rf - r^2f'}\left(f''r - 2r\frac{(f')^2}{f} + 3f'\right). \tag{48}$$

Различие Ω и ω приводит к смещению перицентра возмущенной орбиты. Расстояние до центра притяжения возмущенной орбиты определяется значением η^1 и колеблется с частотой Ω. Период обращения тела на невозмущенной орбите $T = 2\pi/\omega$. Смещение перицентра за это время определится формулой

$$\Delta\phi = 2\pi - T\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right). \tag{49}$$

Рассмотрим метрику Коттлера — решение для точечной массы M с космологической постоянной

$$ds^2 = f(r)\,c^2dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{50}$$

где

$$f(r) = 1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \tag{51}$$

$r_g = 2GM/c^2$, G — гравитационная постоянная, Λ — космологическая постоянная. В данном случае

$$\omega^2 = \frac{r_gc^2}{2r^3}\cdot\frac{1 - \frac{2\Lambda r^3}{3r_g}}{1 - \frac{3r_g}{2r}}, \tag{52}$$

$$\Omega^2 = \frac{r_gc^2}{2r^3}\cdot\frac{1 - \frac{3r_g}{r} - \frac{8\Lambda r^3}{3r_g}\left(1 - \frac{15r_g}{8r}\right)}{1 - \frac{3r_g}{2r}}. \tag{53}$$

Для метрики Шварцшильда, когда $\Lambda = 0$ различие частот Ω и ω впервые это было обнаружено Широковым [1] и часто называют эффектом Широкова. В нерелятивистском случае для поля тяготения точечной массы частоты, как было показано, частоты Ω и ω равны.

Смещение перицентра орбиты для метрики (50) за один оборот в приближении первого порядка по r_g/r и $\Lambda r^3/r_g$ составит

$$\Delta\phi = \pi\left(\frac{3r_g}{r} + \frac{2\Lambda r^3}{r_g}\right). \tag{54}$$

При $\Lambda = 0$ этот результат воспроизводит известную формулу (101,7) для смещения перигелия [10], если эксцентриситет орбиты стремится к нулю.

Поправки Общей теории относительности при наблюдениях орбит планет и спутников малы, но измеряемы. Хорошо известен эффект смещения перигелия Меркурия, составляющий приблизительно 43" за столетие. Влияние космологической постоянной, обусловленное формулой (54), будет проявляться в наблюдениях, когда поправка больше или имеет тот же порядок величины, что и классический эффект ОТО, то есть

$$\Lambda \geq \frac{r_g^2}{r^4}. \tag{55}$$

Так, для орбит спутников вблизи Земли космологическая постоянная могла бы проявляться в эффектах смещения перигея орбиты, при значениях $\Lambda \geq 10^{-32}\,\text{м}^{-2}$. Для орбит объектов вокруг Солнца проявления космологической постоянной можно было бы обнаружить, при значениях $\Lambda \sim 10^{-37}\,\text{м}^{-2}$ (для $r \sim 10^{11}$ м).

Наблюдаемое значение космологической постоянной много меньше: $\Lambda \sim 10^{-52}\,\text{м}^{-2}$. Ее эффекты в смещении перицентра движениях спутников Земли или Солнца далеко за пределами возможностей экспериментального обнаружения.

Заключение

Таким образом, если наблюдаемое ускорение Вселенной обусловлено космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна, то ее значение $\Lambda \sim 10^{-52}\,\text{м}^{-2}$ не будет появляться в смещении перицентра возмущенных орбит. Однако, как отмечено, в книге [11] "Природа темной энергии – одна из главных загадок современного естествознания". Если ускоренное расширение обусловлено неким скалярным полем, "квинтэссенцией", то допустимо предположить разные значения квинтэссенции в различных областях. Тогда данные по смещениям перицентров орбит могли бы служить индикатором величины этой квинтэссенции в области вблизи Земли или в Солнечной системе.

Полученные в разделе 1 результаты показывают, что различие частот колебаний возмущенной орбиты в разных направлениях имеют место и в нерелятивистском случае, при отличии потенциала, от случая точечной массы. В таких ситуациях также имело бы место смещение перицентра возмущенной орбиты. В Общей теории относительности частоты колебаний в ортогональных направлениях возмущенной орбиты для случаев точечной массы и точечной массы с космологической постоянной различны. Получены точные формулы и даны приближенные оценки.

Благодарности: Работа Павлова Ю.В. осуществлена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИПМаш РАН (тема № 124041500009-8).

Список литературы

1. Shirokov M. F. On one new effect of the Einsteinian theory of gravitation. *Gen. Relativ. Gravit.* 1973, vol. 4, no. 2, p. 131. https://doi.org/10.1007/BF00762799.

2. Greenberg P. J. The equation of geodesic deviation in Newtonian theory and the oblateness of the Earth. *Nuovo Cimento B*, 1974, vol. 24, no. 2, p. 272. https://doi.org/10.1007/BF02725960.

3. Nduka A. On Shirokov's "One new effect of the Einsteinian theory of gravitation". *Gen. Relativ. Gravit.*, 1977, vol. 8, no. 5, p. 347. https://doi.org/10.1007/BF00771144.

4. Владимиров Ю. С., Родичев С. В. Малые колебания пробных тел на круговых орбитах в метриках Шварцшильда и Керра (Эффект Широкова). *Известия вузов СССР, серия Физика.* 1981. Т. 10. С. 63.

5. Fuchs H. Solutions of the equations of geodesic deviation for static spherical symmetric space-times. *Ann. Phys. Leipz*, 1983, vol. 495, p. 231. https://doi.org/10.1002/andp.19834950408.

6. Fuchs H. Deviation of circular geodesics in static spherically symmetric space-times. *Astron. Nachr.*, 1990, vol. 311, no. 5, p. 271. https://doi.org/10.1002/asna.2113110504.

7. Philipp D., Perlick V., Lämmerzahl C., Deshpande K. On geodesic deviation in Schwarzschild spacetime. *Metrology for Aerospace (MetroAeroSpace)*, 2015, pp. 198–203. https://doi.org/10.1109/MetroAeroSpace.2015.7180653.

8. Philipp D., Puetzfeld D., Lämmerzahl C. On the applicability of the geodesic deviation equation in General Relativity. *Relativistic Geodesy*, 2019, pp. 419–451. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11500-5_13.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика.* М.: Наука. 1988. 216 с.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* М.: Наука. 1988. 512 с.

11. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. *Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва.* М.: ЛЕНАНД. 2016. 616 с.

References

1. Shirokov M. F. On one new effect of the Einsteinian theory of gravitation. *Gen. Relativ. Gravit.* 1973, vol. 4, no. 2, p. 131. `https://doi.org/10.1007/BF00762799`.

2. Greenberg P. J. The equation of geodesic deviation in Newtonian theory and the oblateness of the Earth. *Nuovo Cimento B*, 1974, vol. 24, no. 2, p. 272. `https://doi.org/10.1007/BF02725960`.

3. Nduka A. On Shirokov's "One new effect of the Einsteinian theory of gravitation". *Gen. Relativ. Gravit.*, 1977, vol. 8, no. 5, p. 347. `https://doi.org/10.1007/BF00771144`.

4. Vladimirov Yu. S, Rodichev S. V. Small oscillations of test bodies in circular orbits in the Schwarzschild and Kerr metrics (Shirokov's effect). *Soviet Physics Journal*, 1981, vol. **24**, p. 954. `https://doi.org/10.1007/BF00897559`.

5. Fuchs H. Solutions of the equations of geodesic deviation for static spherical symmetric space-times. *Ann. Phys. Leipz*, 1983, vol. 495, p. 231. `https://doi.org/10.1002/andp.19834950408`.

6. Fuchs H. Deviation of circular geodesics in static spherically symmetric space-times. *Astron. Nachr.*, 1990, vol. 311, no. 5, p. 271. `https://doi.org/10.1002/asna.2113110504`.

7. Philipp D., Perlick V., Lämmerzahl C., Deshpande K. On geodesic deviation in Schwarzschild spacetime. *Metrology for Aerospace (MetroAeroSpace)*, 2015, pp. 198–203. `https://doi.org/10.1109/MetroAeroSpace.2015.7180653`.

8. Philipp D., Puetzfeld D., Lämmerzahl C. On the applicability of the geodesic deviation equation in General Relativity. *Relativistic Geodesy*, 2019, pp. 419–451. `https://doi.org/10.1007/978-3-030-11500-5_13`.

9. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Mechanics.* Oxford: Pergamon Press. 1976. 198 p.

10. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields.* Oxford: Pergamon Press. 1983. 402 p.

11. Gorbunov D.S, Rubakov V.A. *Introduction to the Theory of the Early Universe. Hot Big Bang Theory.* Singapore: World Scientific. 2018. 577 p.

Авторы

Павлов Юрий Викторович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, институт проблем машиноведения РАН, В.О., Большой пр., д. 61, Санкт-Петербург, 199178, Россия.
E-mail: yuri.pavlov@mail.ru

Вандеев Вячеслав Павлович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова НИЦ «Курчатовский Институт», мкр. Орлова роща, д. 1, г. Гатчина, Ленинградская обл., 188300, Россия.
E-mail: vandeew.vyacheslav@yandex.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Павлов Ю. В., Вандеев В. П. Девиация траекторий в релятивистском и нерелятивистском случаях. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 4. С. 90—97.

Authors

Pavlov Yuri Viktorovich, Ph.D., Leading Researcher, Institute of Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, V.O., Bol'shoi pr., 61, St. Petersburg, 199178, Russia.
E-mail: yuri.pavlov@mail.ru

Vandeev Vyacheslav Pavlovich, Ph.D., Researcher, Petersburg Nuclear Physics Institute of National Research Centre "Kurchatov Institute", Gatchina, 188300, Russia.
E-mail: vandeew.vyacheslav@yandex.ru

Please cite this article in English as:
Pavlov Yu. V., Vandeev V. P. Trajectory Deviation in Relativistic and Non-Relativistic Cases. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 4, pp. 90–97.