УДК 530.12

ВЛИЯНИЕ КОМПАКТНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ОБЪЕКТОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЯЗАННЫХ С ПЛОСКИМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Сизов В. А.[a,1], Фомин И. В.[a,2]

[a] МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, Россия.

Рассматривается распространение связанных электромагнитных и гравитационных волн на основе решения возмущённых уравнений Эйнштейна в пространствах с метрикой Минковского и Шварцшильда. Предложено описание основных свойств связанных с плоскими электромагнитными волнами гравитационных волн. Получена оценка влияния гравитационного поля компактных астрофизических объектов на характеристики связанных гравитационных волн.

Ключевые слова: гравитация Эйнштейна, пространство Минковского, метрика Шварцшильда, связанные гравитационные волны, электромагнитные волны .

THE INFLUENCE OF A COMPACT GRAVITATING OBJECT ON THE PARAMETERS OF GRAVITATIONAL WAVES COUPLED WITH PLANE ELECTROMAGNETIC WAVES

Sizov V. A.[a,1], Fomin I. V.[a,2]

[a] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia.

The propagation of coupled electromagnetic and gravitational waves is considered based on the solution of Einstein's perturbed equations in spaces with Minkowski and Schwarzschild metrics. A description of the main properties of gravitational waves coupled with plane electromagnetic waves is proposed. An estimate of the influence of the gravitational field of compact astrophysical objects on the characteristics of coupled gravitational waves is obtained.

Keywords: Einstein gravity, Minkowski space, Schwarzschild metric, coupled gravitational waves, electromagnetic waves .

PACS: 04.30.-w, 04.20.-q
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.4.120-130

Введение

При исследовании гравитационных волн, распространяющихся в искривлённом пространстве или в плоском пространстве с криволинейными координатами, для упрощения уравнений Эйнштейна используют методы теории возмущений [1]. В этом случае гравитационные волны рассматриваются, как малые возмущения фонового пространства $h_{\mu\nu} = \delta g^0_{\mu\nu}$. Считается, что в пустом пространстве слабые гравитационные волны являются поперечными [2].

Следствием уравнений Эйнштейна является распространение гравитационных волн, индуцированных переменным электромагнитным полем и связанными с ним. Связанные гравитационные

[1]E-mail: vasizov@bmstu.ru
[2]E-mail: ingvor@inbox.ru

волны несут в себе информацию об источнике, а также о пространстве, в котором распространяются. Таким образом, оценка характеристик связанных гравитационных волн и оценка влияния массивных гравитирующих объектов на характеристики гравитационных волн являются актуальными задачами современной теории гравитации, астрофизики и гравитационно-волновых исследований.

В пространстве Минковского при распространении гравитационной волны в пустом пространстве вдоль направления $x^1 = x$ ненулевыми компонентами тензора возмущения являются только поперечно-поперечные (TT): h_{22}, h_{33}, h_{23}. Однако при наличии источника $T_{\mu\nu} \neq 0$ связанные гравитационные волны могут иметь и продольные (LL): h_{00}, h_{11}, h_{01}, и продольно-поперечные (LT): h_{01}, h_{02}, h_{12}, h_{13}, компоненты [3].

В вакууме, когда $T_{\mu\nu} = 0$, LT и LL компоненты являются калибровочными артефактами и могут быть устранены посредством преобразования координат [4]. TT компоненты имеют три поляризации: h_{23}, $h_{22} - h_{33}$, $h_{22} + h_{33}$. Однако в вакууме выполняется $h_{22} + h_{33} = 0$, поэтому TT компоненты будут иметь ровно две различные поляризации h_{23}, $h_{22} - h_{33}$ [3]. Для случая ненулевого тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu} \neq 0$ могут возникнуть связанные гравитационные волны с отличными от нуля LT и LL компонентами для которых $h_{22} + h_{33} \neq 0$.

Возможность генерации гравитационных волн при распространении сильной электромагнитной волны в постоянном магнитном поле рассматривались в работах [5–10]. В работах [5, 6] был предложен метод получения аналитических выражений для связанных гравитационных волн на основе решений линеаризованных уравнений Эйнштейна с дальнейшим восстановлением параметров свободной гравитационной волны после полного поглощения или отражения электромагнитной волны.

Целью данной работы является анализ компонент гравитационных волн, связанных с плоской электромагнитной волной, в пространствах с метрикой Минковского и Шварцшильда на основе частных решений возмущённых уравнений Эйнштейна.

1. Метод исследования

Возмущённые уравнения Эйнштейна записываются следующим образом

$$\delta^{(1)} G_{\alpha\beta} = -2\kappa \delta^{(1)} T_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

где $\delta^{(1)} G_{\alpha\beta}$ – возмущённый тензор Эйнштейна, $\kappa = 8\pi G/c^4$ – гравитационная постоянная Эйнштейна, $\delta^{(1)} T_{\alpha\beta}$ – возмущённый тензор энергии-импульса. Эти тензоры могут быть записаны в виде [1]

$$\begin{aligned}\delta^{(1)} G_{\alpha\beta} = \nabla^2 h_{\alpha\beta} - 2R_{\mu\alpha\beta\nu} h^{\mu\nu} + R h_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - h^{\nu}_{\alpha} R_{\nu\beta} - h^{\nu}_{\beta} R_{\nu\alpha} - \\ - \nabla_\beta \nabla_\nu h^{\nu}_{\alpha} - \nabla_\alpha \nabla_\nu h^{\nu}_{\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta h - g_{\alpha\beta} \left(\nabla^2 h - \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} \right),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\delta^{(1)} T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} h^{\mu\nu} + \frac{1}{4} h_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} F_{\mu\lambda} F^{\lambda}_{\nu} h^{\mu\nu} \right). \tag{3}$$

Здесь $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор фонового пространства - времени, $R_{\mu\alpha\beta\nu}$ – тензор Римана, $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, R – скалярная кривизна, $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса, ∇_μ – ковариантная производная, $\nabla^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$, $h = h^{\mu}_{\mu}$ – след тензора возмущений, μ_0 – магнитная постоянная.

Компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ задаются следующим образом

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \tag{4}$$

где A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля, для определения которого необходимо решить уравнения электродинамики в искривлённом пространстве-времени

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\sqrt{|g|} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right) \right] = -\mu_0 j^\mu, \tag{5}$$

где j^μ – 4-ток, g – определитель метрического тензора.

Зная только метрику пространства-времени, мы можем записать возмущённый тензор Эйнштейна (2). После решения уравнений электродинамики (5) можно определить тензор электромагнитного поля (4) и тем самым составить возмущённый тензор энергии-импульса (3). Далее мы можем получить решения возмущённых уравнений Эйнштейна (1) относительно компонент тензора возмущений $h_{\mu\nu}$. Если в качестве источника гравитационного возмущения рассматривать электромагнитную волну, то часть компонент тензора $h_{\mu\nu}$ будет описывать связанные гравитационные волны.

При полном поглощении электромагнитной волны некой поверхностью или при отражении от неё будет распространяться свободная гравитационная волна за этой поверхностью. Компоненты свободной волны могут быть вычислены на основе сохранения полной плотности потока энергии гравитационных волн на границе отражения или поглощения электромагнитной волны [3]

$$t^{0\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} g^{0\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\alpha h_{\rho\sigma} \partial_\beta h^{\rho\sigma}, \tag{6}$$

где индекс ν означает, что плотность потока энергии вычисляется в направлении x^ν.

2. Связанные гравитационные волны в пространстве Минковского

Рассмотрим метрику пространства Минковского в следующем виде

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad \tau = ct. \tag{7}$$

При решении уравнений электродинамики будем полагать, что $j^\mu = 0$, $A_0 = A_1 = A_3 = 0$, $A_2 = A_2(x, \tau)$. Тогда решением уравнений (5) является 4-потенциал электромагнитного поля

$$A_2(x, \tau) = A \exp(ik(x - \tau) + i\phi_0), \tag{8}$$

где постоянные интегрирования A, k, ϕ_0 имеют смысл амплитуды, волнового числа и начальной фазы соответственно. Положим $\phi_0 = 0$, тогда из выражения (4) найдём ненулевые компоненты тензора электромагнитного поля

$$F_{02} = -F_{20} = -iAk \exp\left(ik(x - \tau)\right), \tag{9}$$

$$F_{12} = -F_{21} = iAk \exp\left(ik(x - \tau)\right). \tag{10}$$

Теперь рассмотрим уравнения (1) для LL и TT компонент тензора возмущений, соответствующие гравитационным волнам, связанным с плоской электромагнитной волной. Будем полагать, что гравитационные волны также, как и электромагнитные, плоские, то есть $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x, \tau)$. А также $h_{22} = h_{33}$, поскольку нет преимущественного направления распространения между осями OY и OZ. В таком случае, возмущенные уравнения Эйнштейна (1) записываются следующим образом

$$\tilde{h}_{,11} = -\tilde{A} \exp\left(2ik(x - \tau)\right) \tilde{h}, \tag{11}$$

$$\tilde{h}_{,00} = -\tilde{A} \exp\left(2ik(x - \tau)\right) \tilde{h}, \tag{12}$$

$$\tilde{h}_{,01} = \tilde{A} \exp\left(2ik(x - \tau)\right) \tilde{h}, \tag{13}$$

$$h_{00,11} + h_{11,00} - 2h_{01,01} = 0, \tag{14}$$

$$h_{00} + 2h_{01} + h_{11} = 0, \tag{15}$$

где $\tilde{h} = h_{22} = h_{33}$, $\tilde{A} = \kappa A^2 k^2 / \mu_0$.

Из уравнений (14)-(15) следует, что на основе их решения нельзя однозначно определить связь между продольными компонентами тензора возмущений и параметрами электромагнитной волны. Более того, можно положить $h_{00} = h_{11} = h_{01} = 0$. Рассмотрим уравнения на поперечные компоненты (11)-(13), их решением является

$$\tilde{h}\left(x,\tau\right) = C_1 J_0\left(i\frac{\sqrt{\tilde{A}}}{k}e^{ik(x-\tau)}\right) + C_2 K_0\left(\frac{\sqrt{\tilde{A}}}{k}e^{ik(x-\tau)}\right), \tag{16}$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка, K_0 - модифицированная функция Бесселя второго рода, или функция Макдональда, нулевого порядка, которые вычисляются как

$$J_0\left(iz\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(m!\right)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}, \tag{17}$$

$$K_0(z) = \lim_{a\to 0}\frac{\pi}{2\sin\left(a\pi\right)}\left(e^{ia\pi/2}J_{-a}(iz) - e^{-ia\pi/2}J_a(iz)\right). \tag{18}$$

Аргументом функций Бесселя связанных гравитационных волн

$$|z| = \frac{\sqrt{\tilde{A}}}{k} = \sqrt{\frac{8\pi G}{\mu_0}\frac{E_0}{c^2\omega}} \ll 1, \tag{19}$$

является величина по модулю много меньшей единицы, поэтому воспользуемся разложением в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$

$$J_0(iz) = 1 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{64}z^4 + O(z^6), \tag{20}$$

$$K_0(z) = \ln(2) - \gamma - \ln(z) + \frac{1}{4}\left(\ln(2) - \gamma - \ln(z) + 1\right)z^2 + O(z^4), \tag{21}$$

где γ - постоянная Эйлера

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \ln(n)\right) \approx 0.58. \tag{22}$$

Поскольку при $z \to 0:\ \ln\left(z\right) \to -\infty$, то это означает, что при ослаблении электромагнитной волны связанная с ней гравитационная волна усиливается, чего быть не может, поэтому положим $C_2 = 0$. Тогда

$$\tilde{h}\left(x,\tau\right) = C_1 J_0\left(i\frac{\sqrt{\tilde{A}}}{k}e^{ik(x-\tau)}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_1}{(m!)^2}\left(\frac{\tilde{A}}{4k^2}\right)^m e^{2ikm(x-\tau)}. \tag{23}$$

Исходя из того, что гравитационные волны рассматриваются как малые возмущения метрики $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$ следует, что $|C_1| \ll 1$.

Рассмотрим гравитационную волну, распространяющуюся в пустом пространстве. Для этого решим уравнения (11)-(13) в случае, если $\tilde{A} = 0$ и $h_{22} = -h_{33} = h$. Тогда

$$h = F(x-\tau), \tag{24}$$

где $F(x-\tau)$ – произвольная функция.

Пусть электромагнитная волна полностью поглощается некоторой поверхностью с координатой $x = L$. Предполагая, что на этой границе выполняется условие сохранения плотности потока энергии гравитационной волны, можно определить компоненты свободных гравитационных волн по компонентам связанных с электромагнитной волной гравитационных волн. На основе выражения (6) плотность потока энергии связанных гравитационных волн t^{01} можно определить как

$$t^{01} = -\frac{c^4}{32\pi G}\left(\partial_0\tilde{h}\partial_1\tilde{h} + \partial_0\tilde{h}\partial_1\tilde{h}\right), \tag{25}$$

а свободных волн как

$$t^{01} = -\frac{c^4}{32\pi G}\left(\partial_0 h \partial_1 h + \partial_0 h \partial_1 h\right). \tag{26}$$

Из равенства плотностей потоков энергии гравитационных волн следует, что $h(x,\tau)$ и $\tilde{h}(x.\tau)$ отличаются друг от друга добавлением константы, что не влияет на волновые компоненты, то есть

$$h(x,\tau) = C_1 J_0\left(I\frac{\sqrt{\tilde{A}}}{k}e^{ik(x-\tau)}\right) + C_2 \simeq C_1 + C_2 + \frac{C_1\tilde{A}}{4k^2}e^{2ik(x-\tau)} + \frac{C_1\tilde{A}^2}{64k^4}e^{4ik(x-\tau)}. \tag{27}$$

Для $C_1 = -C_2$ перепишем последнее выражение в действительной форме

$$h(x,\tau) = C_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m!)^2}\left(\frac{2\pi G E_0^2}{\mu_0 c^4\omega^2}\right)^m \cos\left(2mk(x-\tau)\right). \tag{28}$$

Поскольку факториал $m!$ растёт быстрее показательной функции C^m, то решение (28) ограничено.

В работе [4] рассматривались аналогичные гравитационные волны путём решения линеаризованных уравнений Эйнштейна. Было получено, что после поглощения электромагнитной волны распространяется следующая свободная гравитационная волна

$$h(x,\tau) = \frac{2\pi G E_0^2}{\mu_0 c^4\omega^2}\cos\left(2k(x-\tau)\right). \tag{29}$$

Таким образом, первое слагаемое решения (28) совпадает с ранее известным (29) с точностью до произвольного множителя. Различие в решениях заключается в появлении волн на больших частотах, однако амплитуда каждой последующей волны меньше

$$\frac{h_{0,n+1}}{h_{0,n}} = \frac{2\pi G E_0^2}{\mu_0 c^4\omega^2(n+1)} \simeq 4\times 10^{-38}\frac{E_0^2}{\omega^2(n+1)}. \tag{30}$$

Исходя из малости амплитуд на больших частотах, можно рассматривать только гравитационные волны, распространяющиеся на удвоенной частоте электромагнитной волны.

3. Связанные гравитационные волны в пространстве с метрикой Шварцшильда

Теперь рассмотрим влияние гравитационного поля компактных астрофизических объектов на характеристики гравитационных волн, связанных с электромагнитными волнами, на основе статических сферически симметричных вакуумных фоновых решений уравнений Эйнштейна в виде метрики Шварцшильда.

Метрику Шварцшильда также можно записать в декартовых координатах следующим образом [11]

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1-\frac{r_s}{r}\right)d\tau^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{x^2}{1-r_s/r} + y^2 + z^2\right)dx^2 - \frac{1}{r^2}\left(x^2 + \frac{y^2}{1-r_s/r} + z^2\right)dy^2 - \\ &\frac{1}{r^2}\left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1-r_s/r}\right)dz^2 - \frac{2r_s}{r^2(r-r_s)}(xydxdy + xzdxdz + yzdydz), \end{aligned} \tag{31}$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r_s = 2GM/c^2$ - радиус Шварцшильда, или гравитационный радиус, M – масса чёрной дыры.

Определим компоненты плоской электромагнитной волны, распространяющейся в этом пространстве путём решения уравнений электродинамики для случая $j^\mu = 0,\ A_0 = A_1 = A_3 = 0,\ A_2 = A_2(x,\tau)$.

В данном случае, уравнения (5) записываются как

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{|g|}g^{\mu 2}g^{00}\frac{\partial A_2}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{|g|}g^{\mu 1}g^{12}\frac{\partial A_2}{\partial x} - \sqrt{|g|}g^{\mu 2}g^{11}\frac{\partial A_y}{\partial x}\right) + \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{|g|}g^{\mu 1}g^{22}\frac{\partial A_2}{\partial x} - \sqrt{|g|}g^{\mu 2}g^{21}\frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial 3}\left(\sqrt{|g|}g^{\mu 1}g^{32}\frac{\partial A_2}{\partial x} - \sqrt{|g|}g^{\mu 2}g^{31}\frac{\partial A_2}{\partial x}\right) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Покомпонентная запись уравнений (32) приводит к трём различным уравнениям для индексов $\mu = \{1, 2, 3\}$ и одному тождеству $0 = 0$ для индекса $\mu = 0$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{|g|}(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12})) + \frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{|g|}(g^{11}g^{32} - g^{12}g^{31}))\right] = \sqrt{|g|}g^{12}g^{00}\frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{|g|}(g^{12}g^{12} - g^{22}g^{11})\frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{|g|}(g^{12}g^{32} - g^{22}g^{31})) = \sqrt{|g|}g^{22}g^{00}\frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{|g|}(g^{31}g^{12} - g^{32}g^{11})\frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{|g|}(g^{31}g^{22} - g^{32}g^{12})) = \sqrt{|g|}g^{32}g^{00}\frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2}. \tag{35}$$

Рассмотрим эти уравнения в направлении $y = 0$, $z = 0$, для которого метрический тензор метрики (31) обладает следующими свойствами

$$\frac{\partial}{\partial y}det(g_{\mu\nu}(x,y,z))\bigg|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial z}det(g_{\mu\nu}(x,y,z))\bigg|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial x}det(g_{\mu\nu}(x,y,z))\bigg|_{y=0,\, z=0} = 0, \tag{36}$$

$$g^{0i} = g^{i0} = 0, \quad i = \{1, 2, 3\}, \tag{37}$$

$$\{\mu\nu\} \neq \{12,\, 21\} : \frac{\partial}{\partial y}g^{\mu\nu}(x,y,z)\bigg|_{y=0} = 0, \tag{38}$$

$$\{\mu\nu\} = \{12,\, 21\} : \frac{\partial}{\partial y}g^{\mu\nu}(x,y,z)\bigg|_{y=0,\, z=0} = \frac{2r_s}{x^2}, \tag{39}$$

$$\{\mu\nu\} \neq \{13,\, 31\} : \frac{\partial}{\partial y}g^{\mu\nu}(x,y,z)\bigg|_{z=0} = 0, \tag{40}$$

$$\{\mu\nu\} = \{13,\, 31\} : \frac{\partial}{\partial z}g^{\mu\nu}(x,y,z)\bigg|_{y=0,\, z=0} = \frac{2r_s}{x^2}. \tag{41}$$

На основе выражений (36)-(41) уравнения (33)-(34) сводятся к тождеству $0 = 0$, а уравнение (35) упрощается

$$\left(1 - \frac{r_s}{x}\right)^2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - 2r_s\frac{x - r_s}{x^3}\frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2}. \tag{42}$$

Точным решением этого уравнения является

$$A_2(x,\tau) = A(x)e^{ik(x-\tau)}, \tag{43}$$

где

$$A(x) = C_1\left(\frac{x}{r_s} - 1\right)^{\frac{3}{2}+\sqrt{i^2k^2r_s^2+\frac{9}{4}}} H_C\left(-2ikr_s, \sqrt{4i^2k^2r_s^2+9}, 1, 2i^2k^2r_s^2, \frac{5}{2} + 2k^2r_s^2,\, 1 - \frac{x}{r_s}\right) +$$
$$C_2\left(\frac{x}{r_s} - 1\right)^{\frac{3}{2}-\sqrt{i^2k^2r_s^2+\frac{9}{4}}} H_C\left(-2ikr_s, -\sqrt{4i^2k^2r_s^2+9}, 1, 2i^2k^2r_s^2, \frac{5}{2} + 2k^2r_s^2,\, 1 - \frac{x}{r_s}\right). \tag{44}$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, H_C – конфлюэнтная функция Гойна [12].

С другой стороны, решение (43) может быть представлено в виде

$$A_2(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}\exp\left(ik\left(x + r_s\ln\left(\frac{x - r_s}{x_0}\right) - \tau\right)\right), \tag{45}$$

где a_n и x_0 – постоянные.

Рассмотрим влияние гравитационного поля чёрной дыры на характеристики электромагнитной волны в первом порядке. Тогда приближённым решением уравнения электродинамики (42) является

$$A_2(x,\tau) = A\left(1 - \frac{3r_s}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\exp\left(ik\left(x + r_s\ln\left(\frac{x - r_s}{x_0}\right) - \tau\right)\right). \tag{46}$$

Соответствующие ненулевые компоненты тензора электромагнитного поля для 4-потенциала (46) равны

$$F_{02} = -F_{20} = -iAk\left(1 - \frac{3r_s}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\exp\left(ik\left(x + r_s\ln\left(\frac{x-r_s}{x_0}\right) - \tau\right)\right), \tag{47}$$

$$F_{12} = -F_{21} = iAk\left(1 - \frac{r_s}{x}\right)^{-1}\left(1 - \frac{3r_s}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\exp\left(ik\left(x + r_s\ln\left(\frac{x-r_s}{x_0}\right) - \tau\right)\right). \tag{48}$$

Будем полагать, что гравитационные волны также, как и электромагнитные, плоские, то есть $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x,\tau)$. А также $h_{22} = h_{33}$, поскольку нет преимущественного направления распространения между осями OY и OZ. Заранее учтём, что компоненты тензора возмущения, а также их производные, описывают слабые волны $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$, поэтому они должны быть заданы функциями, которые имеют порядок $O(1)$ или меньше. С учётом вышеперечисленного запишем уравнения (1) для LL и TT компонент тензора возмущений, соответствующих гравитационным волнам, связанными с плоской электромагнитной волной, для тензора электромагнитного поля (47)-(48) в следующем виде

$$\left(1 - 2\frac{r_s}{x}\right)\tilde{h}_{,11} + \tilde{A}\left(1 - 3\frac{r_s}{x}\right)\exp\left(2ik\left(x + r_s\ln\left(\frac{x-r_s}{x_0}\right) - \tau\right)\right)\tilde{h} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{49}$$

$$\tilde{h}_{,00} + \tilde{A}\left(1 - 3\frac{r_s}{x}\right)\exp\left(2ik\left(x + r_s\ln\left(\frac{x-r_s}{x_0}\right) - \tau\right)\right)\tilde{h} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{50}$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{x}\right)\tilde{h}_{,01} - \tilde{A}\left(1 - 3\frac{r_s}{x}\right)\exp\left(2ik\left(x + r_s\ln\left(\frac{x-r_s}{x_0}\right) - \tau\right)\right)\tilde{h} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{51}$$

$$h_{00,11} + h_{11,00} - 2h_{01,01} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{52}$$

$$h_{00} + 2h_{01} + h_{11} = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{53}$$

Аналогично случаю для пространства Минковского однозначную связь между продольными компонентами тензора возмущения и характеристиками электромагнитной волны на основе уравнений (52)-(53) получить нельзя, поэтому положим $h_{00} = O(1/x^2)$, $h_{11} = O(1/x^2)$, $h_{01} = O(1/x^2)$. Решением уравнений на поперечные компоненты (49)-(51) является

$$\tilde{h}(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_1}{(n!)^2}\left(\frac{\tilde{A}}{4k^2}\right)^n\left(1 - 3n\frac{r_s}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)e^{2ikn\left(x + r_s\ln\left(\frac{x-r_s}{x_0}\right) - \tau\right)}, \tag{54}$$

где из условия $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$ следует, что $|C_1| \ll 1$.

Рассмотрим свободную гравитационную волну. Для этого запишем уравнения (1) для TT компонент тензора возмущения в случае $\tilde{A} = 0$, $h_{22} = -h_{33} = h$ и $h_{00} = h_{11} = h_{01} = 0$ как

$$\left(1 - \frac{r_s}{x}\right)^{-1}h_{,00} - \left(1 - \frac{r_s}{x}\right)h_{,11} - \frac{r_s(x-r_s)}{x^2}h_{,1} + 10\frac{r_s(x-r_s)}{x^3}h = 0. \tag{55}$$

Из условия $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$ следует, что $h \sim h_{,00} \sim h_{,11} \sim O(1)$.

Теперь перепишем уравнение (55) до слагаемых порядка $O(1/x)$

$$h_{,00} - \left(1 - 2\frac{r_s}{x}\right)h_{,11} = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{56}$$

Решение этого уравнения запишем следующим образом

$$h(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(B_{0n} + \frac{B_{1n}}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)e^{2ikn\left(x + r_s\ln\left(\frac{x-r_s}{x_0}\right) - \tau\right)}, \tag{57}$$

где B_{0n} и B_{1n} – произвольные постоянные.

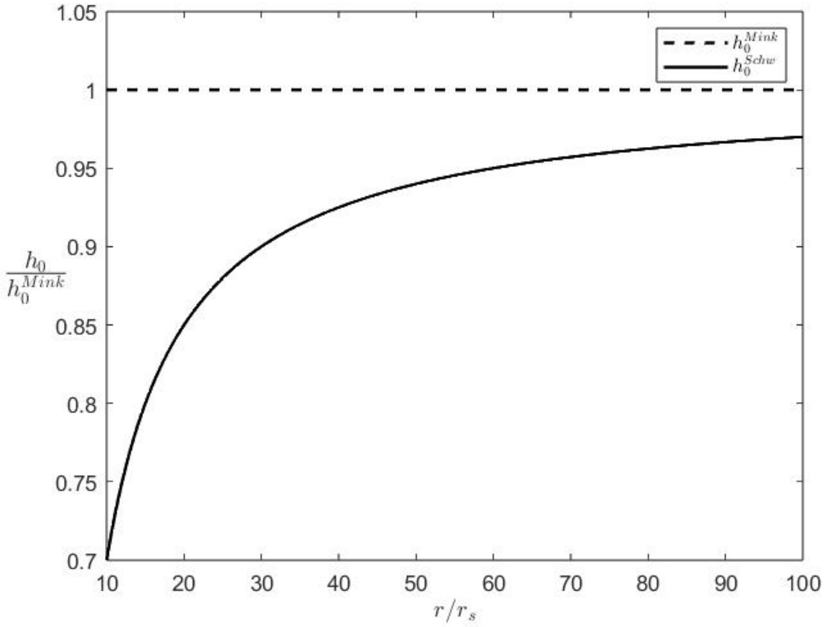

Рис. 1. Сравнение амплитуд свободных гравитационных волн после полного поглощения или отражения электромагнитной волны в зависимости от расстояния до чёрной дыры в безразмерных координатах для случая распространения волн в пространствах с метрикой Минковского и Шварцшильда.

Плотность потока энергии t^{01} поперечных гравитационных волн определяется как

$$t^{01} = \frac{c^4}{32\pi G}(\partial_0 h_{22}\partial_1 h^{22} + \partial_0 h_{33}\partial_1 h^{33}). \tag{58}$$

Это выражение симметрично относительно преобразований $h_{22} = h_{33} = \tilde{h}$ и $h_{22} = -h_{33} = h$, соответствующих связанным гравитационным волнам с электромагнитной плоской волной (54) и свободным гравитационным волнам (57). Поскольку эти волны имеют одинаковую функциональную зависимость, то после полного поглощения или отражения электромагнитной волны будет распространяться свободная гравитационная волна, компоненты которой отличаются от связанной на константу $h = \tilde{h} + C_2$. Тогда из условия сохранения полной плотности потока энергии гравитационных волн на границе отражения или поглощения электромагнитной волны запишем действительную часть компонент свободной гравитационной волны

$$h(x,\tau) = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{2\pi G E_0^2}{\mu_0 c^4 \omega^2}\right)^n \left(1 - 3n\frac{r_s}{x}\right)\cos\left(2kn\left(x + r_s \ln\left(\frac{x - r_s}{x_0}\right) - \tau\right)\right). \tag{59}$$

Здесь было учтено, что $C_2 = -C_1$, и были опущены члены порядка $O(1/x^2)$ и ниже.

Для определения влияния гравитационного поля компактных астрофизических объектов на характеристики гравитационных волн, связанных с электромагнитными волнами, рассмотрим выражения (28) и (59). Поправки на амплитуду гравитационной волны, связанной с плоской электромагнитной, для случая распространения в окрестности компактного гравитирующего объекта представлены на Рис.1. Амплитуды гравитационных волн будут нарастать по мере удаления от чёрной дыры до значения, соответствующего случаю пространства Минковского.

Также отметим, что гравитационное поле компактных астрофизических объектов дает поправку как к фазе гравитационной волны $\delta\phi = r_s \ln((x - r_s)/x_0)$, так и к амплитуде, которая меньше в $1 - 3r_s/r$ раза по сравнению с амплитудой аналогичной гравитационной волны, распространяющейся в пространстве Минковского.

Заключение

На основе точных решений возмущённых уравнений Эйнштейна было показано, что плоская электромагнитная волна индуцирует гравитационные волны, частота которых кратна удвоенной частоте электромагнитной волны. Амплитуды каждых последующих гармоник на порядки ниже предыдущих и связаны соотношением (30), поэтому из-за малости амплитуд высших гармоник можно считать, что плоская электромагнитная волна индуцирует связанную с ней гравитационную волну только на удвоенной частоте.

На основе приближённых решений возмущённых уравнений Эйнштейна была сделана оценка поправок к характеристикам связанных гравитационных волн, индуцированных влиянием компактного гравитирующего объекта. Показано, что амплитуда гравитационных волн, распространяющихся на удвоенной частоте электромагнитной волны, меньше в $1 - 3r_s/r$. Также возникает поправка к фазе гравитационных волн $\delta\phi = r_s \ln((x - r_s)/x_0)$. По мере удаления гравитационной волны от компактного гравитирующего объекта её амплитуда увеличивается и стремится к значению, соответствующему случаю распространения в пространстве Минковского.

В качестве дальнейшего развития предложенного подхода планируется оценка влияния расширения вселенной на характеристики гравитационных волн, связанных с электромагнитными волнами.

Список литературы

1. Fanizza G. et al. Linearized propagation equations for metric fluctuations in a general (non-vacuum) background geometry. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021, vol. 2021, iss. 07, 021. https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/07/021.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Теория поля.* М.: Наука, 1988, С. 512.

3. Maggiore M. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments.* Oxford University Press, 2008, p. 547.

4. Einstein A. *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 1.* Princeton University Press, 1987, p. 522.

5. Морозов А.Н., Пустовойт В.И., Фомин И.В. О гравитационных волнах, связанных с электромагнитными волнами. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2020. № 2. С. 53–63. https://doi:10.17238/issn2226-8812.2020.2.53-63.

6. Morozov A. N., Pustovoit V. I., Fomin I. V. Bound gravitational waves in a dielectric medium and a constant magnetic field. *Eur. Phys. J. Plus*, 2020, vol. 135, 950. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00961-0.

7. Morozov A. N., Pustovoit V. I. and Fomin I. V. Generation of Gravitational Waves by a Standing Electromagnetic Wave, *Grav. Cosmol.*, 2021, vol. 27, 24–29. https://doi.org/10.1134/S020228932101014X.

8. Гладышев В. О., Кауц В. Л., Каютенко А. В., Морозов А. Н., Николаев П. П., Фомин И. В., Шарандин Е. А. Анализ связанных гравитационных и электромагнитных волн. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2023. № 3–4. С. 99–107. https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2023.3-4.99-107.

9. Морозов А. Н., Фомин И. В., Гладышев В. О. и др. Метод генерирования гравитационных волн посредством системы стоячих электромагнитных волн. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2022. № 6 (105), с. 90–105. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-90-105.

10. Villarreal Fasanelli M. R., Seo. J. Complex electromagnetism and coupled gravitational-electromagnetic waves in the interstellar medium, *Phys. Scripta.* 2024, vol. 99, no. 10, 105544. https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad75d1.

11. Mueller T., Grave F. Catalogue of Spacetimes. 2010. https://doi.org/10.48550/arXiv.0904.4184.

12. Slavyanov S. Y., Lay W. *Special functions: a unified theory based on singularities.* Oxford University Press, 2000, p. 293.

References

1. Fanizza G. et al. Linearized propagation equations for metric fluctuations in a general (non-vacuum) background geometry. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021, vol. 2021, iss. 07, 021. https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/07/021.

2. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields.* Oxford: Pergamon Press, 1975, p. 402.

3. Maggiore M. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments.* Oxford University Press, 2008, p. 547.

4. Einstein A. *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 1.* Princeton University Press, 1987, p. 522.

5. Morozov A. N., Pustovoit V. I., Fomin I. V. On the gravitational waves coupled with electromagnetic waves. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 2, pp. 53–63. https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2020.2.53-63.

6. Morozov A. N., Pustovoit V. I., Fomin I. V. Bound gravitational waves in a dielectric medium and a constant magnetic field. *Eur. Phys. J. Plus*, 2020, vol. 135, 950. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00961-0.

7. Morozov A. N., Pustovoit V. I. and Fomin I. V. Generation of Gravitational Waves by a Standing Electromagnetic Wave, *Grav. Cosmol.*, 2021, vol. 27, 24–29. https://doi.org/10.1134/S020228932101014X.

8. Gladyshev V. O., Kauts V. L., Kayutenko A. V., Morozov A. N., Nikolaev P. P., Fomin I. V., Sharandin E. A. The analysis of coupled gravitational and electromagnetic waves. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2023, no. 3-4, pp. 99–107. https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2023.3-4.99-107.

9. Morozov A. N., Fomin I. V., Gladyshev V. O., et al. Method for generating gravitational waves by means of a standing electromagnetic wave system. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, vol. 105, no. 6, pp. 90–105 (in Russ.). https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-90-105.

10. Villarreal Fasanelli M. R., Seo. J. Complex electromagnetism and coupled gravitational-electromagnetic waves in the interstellar medium, *Phys. Scripta.* 2024, vol. 99, no. 10, 105544. https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad75d1.

11. Mueller T., Grave F. Catalogue of Spacetimes. 2010. https://doi.org/10.48550/arXiv.0904.4184.

12. Slavyanov S. Y., Lay W. *Special functions: a unified theory based on singularities.* Oxford University Press, 2000, p. 293.

Авторы

Сизов Вячеслав Андреевич, аспирант, ассистент, МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).
E-mail: vasizov@bmstu.ru

Фомин Игорь Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).
E-mail: ingvor@inbox.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Сизов В. А., Фомин И. В. Влияние компактных гравитирующих объектов на характеристики связанных с плоскими электромагнитными волнами гравитационных волн. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2025. № 4. С. 120—130.

Authors

Sizov Vyacheslav Andreevich, postgraduate student, assistant, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).
E-mail: vasizov@bmstu.ru

Fomin Igor Vladimirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).
E-mail: ingvor@inbox.ru

Please cite this article in English as:
Sizov V. A., Fomin I. V. The influence of a compact gravitating object on the parameters of gravitational waves coupled with plane electromagnetic waves. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 4, pp. 120–130.