

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ и МЕХАНИКИ  
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

---

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ

НЕРАВНОВЕСНАЯ ВСЕЛЕННАЯ:  
КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ



Казанский университет  
2013

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

ББК 22.632

И26

Печатается по рекомендации Ученого Совета Института математики и механики  
им. Н.И. Лобачевского  
Казанского (Приволжского) федерального университета

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор **В.Н. Мельников**

доктор физико-математических наук, профессор **Д.В. Гальцов**

**Игнатъев Ю.Г.**

**И 26 Неравновесная Вселенная: Кинетические модели космологической эволюции/**

Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Казан. ун-т, 2013, - 316 с.: ил. 57, библиогр. 235 назв.

**ISBN 978-5-00019-096-8**

Цель книги - последовательное изложение теории неравновесных кинетических процессов в сильных полях гравитации с использованием широкого арсенала методов современной теоретической физики, в частности, релятивистской теории гравитации, теории непрерывных групп, статистической физики, кинетической теории, физики плазмы, теории элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий. Особое внимание уделяется кинетическим моделям Вселенной. В книге обобщаются результаты работ автора и его учеников в области общерелятивистской кинетической теории и космологии, полученных на протяжении последних 30 лет. Книга будет полезна студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической физики.

---

**Yurii G. Ignatyev. The Nonequilibrium Universe: The Kinetics Models of the Cosmological Evolution.** The book's goal is a consistent statement of the theory of non-equilibrium kinetic processes in strong gravitation fields using the broad store of modern theoretical physics methods, specifically relativistic theory of gravitation, theory of continuous groups, statistical physics, kinetic theory, physics of plasma, theory of elementary particles and fundamental interactions. Special consideration is given to the kinetics theory of the Universe. The results of author's and his pupils' works in the field of general-relativistic theory, obtained by the last 30 years, are generalized in the given book. The book will be useful for the senior students, undergraduates and postgraduates, specializing in the field of a theoretical physics.

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

ББК 22.632

ISBN 978-5-00019-096-8

©Казанский университет, 2013

©Игнатъев Ю.Г., 2013

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>6</b>
От Автора . . . . .	6
Необходимость общерелятивистской кинетической теории . . . . .	7
Краткий очерк общерелятивистской кинетической теории . . . . .	9
Договоренности и благодарности . . . . .	15
<b>I      <b>Формализм кинетической теории</b></b>	<b>16</b>
I.1      Среда в гравитационном поле . . . . .	16
I.2      Канонический формализм . . . . .	20
I.3      Релятивистское фазовое пространство . . . . .	23
I.4      Инвариантная функция распределения . . . . .	31
I.5      Микроскопическая фазовая плотность . . . . .	38
I.6      Релятивистские кинетические уравнения . . . . .	46
I.7      Уравнения переноса . . . . .	54
I.8      Законы сохранения . . . . .	55
I.9      Самосогласованная кинетическая модель . . . . .	59
I.10     Общерелятивистские уравнения Власова . . . . .	61
<b>II     <b>Равновесие плазмы в гравитационном поле</b></b>	<b>63</b>
II.1     ЛТР плазмы в гравитационном поле . . . . .	63
II.2     Уравнения релятивистской гидродинамики . . . . .	67
II.3     Глобальное термодинамическое равновесие . . . . .	70
II.4     ГТР самогравитирующей плазмы . . . . .	73
II.5     ГТР систем со скалярным взаимодействием . . . . .	79
<b>III    <b>Кинетика ранних стадий космологического расширения</b></b>	<b>82</b>
III.1    Конформная инвариантность кинетической теории . . . . .	82
III.2    Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц . . . . .	86
III.3    Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР . . . . .	90
III.4    Кинетика расширения радиационно доминированной плазмы . . . . .	96
III.5    Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной . . . . .	100
<b>IV     <b>Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием</b></b>	<b>112</b>
IV.1     Каноническая формулировка классического скалярного взаимодействия . . . . .	112

## Оглавление

IV.2	Статистические системы частиц со скалярным взаимодействием . . . . .	118
IV.3	Самосогласованная модель плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием . . . . .	123
IV.4	Космологическая модель для равновесной плазмы со скалярным взаимодействием . . . . .	126
IV.5	Полностью вырожденный Ферми-газ со скалярным взаимодействием . . . . .	129
IV.6	Космологическая вырожденная плазма со скалярным взаимодействием . . . . .	130
IV.7	Численное решение для вырожденной плазмы со скалярным полем . . . . .	131
IV.8	Решения со вторичным ускорением . . . . .	141
IV.9	Статистические систем частиц с притяжением одноименных скалярных зарядов . . . . .	143
IV.10	Космологическая модель с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц . . . . .	147
IV.11	Математическая модель двухкомпонентной бoльцмановской плазмы . . . . .	148
IV.12	Упрощение и анализ математической модели . . . . .	150
<b>V</b>	<b>Релятивистская кинетика космологического бариогенезиса</b>	<b>152</b>
V.1	Механизм нарушения барионной симметрии Вселенной . . . . .	152
V.2	Алгебра взаимодействий $SU(5)$ . . . . .	154
V.3	Релятивистские кинетические уравнения в $SU(5)$ . . . . .	155
V.4	Кинетические уравнения для фермионов . . . . .	158
V.5	Кинетические уравнения для $X$ - бозонов . . . . .	160
V.6	Законы сохранения . . . . .	161
V.7	Слабое нарушение зарядовой симметрии в стандартной $SU(5)$ модели . . . . .	163
V.8	Исследование решения . . . . .	166
V.9	Функция $\Phi$ в бoльцмановском приближении . . . . .	167
V.10	Отклонение $X$ -бозонов от равновесия . . . . .	168
V.11	Преобразование к безразмерным переменным . . . . .	169
V.12	Функции $\Psi(t)$ и $\Theta(t)$ . . . . .	170
V.13	Отклонение от равновесия, $\delta f(\eta, \xi)$ . . . . .	173
V.14	Результаты . . . . .	175
<b>VI</b>	<b>Кинетическая модель неравновесной Вселенной</b>	<b>178</b>
VI.1	Стандартная точка зрения на установление ЛТР во Вселенной . . . . .	178
VI.2	Поучительный пример . . . . .	180
VI.3	Идеология стандартного космологического сценария . . . . .	181
VI.4	Более детальный анализ ЛТР . . . . .	188
VI.5	Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц . . . . .	193
VI.6	Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц . . . . .	201
VI.7	Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах . . . . .	205
VI.8	Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах . . . . .	212
VI.9	Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами . . . . .	216
VI.10	Закономерности слабонеравновесной космологической модели . . . . .	225
VI.11	Интеграл столкновений в форме Фоккера - Планка . . . . .	232
VI.12	Диффузионное уравнение для сверхтепловых частиц . . . . .	234

VI.13	Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием . . . . .	236
VI.14	Кинетические уравнения для плазмы в гравитационном поле . . . . .	252
VI.15	Усреднение локальных флуктуаций метрики . . . . .	254
VI.16	Кинетическое уравнение для безмассовых частиц . . . . .	258
VI.17	Изотропизация фотонов гравитационными взаимодействиями . . . . .	266
<b>VII</b>	<b>Установление термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной</b>	<b>268</b>
VII.1	Условия локального термодинамического равновесия космологической плазмы . . . . .	268
VII.2	Унифицированное асимптотическое сечение рассеяния . . . . .	271
VII.3	Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц . . . . .	273
VII.4	Построение и решение уравнения энергобаланса . . . . .	279
VII.5	Кинетическое уравнение для неравновесных частиц . . . . .	283
VII.6	Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную	289
VII.7	Численная модель восстановления LTE в ускоренной Вселенной . . . . .	292
	<b>Литература</b>	<b>298</b>

# Предисловие

## От Автора

В 2010 году вышла монография Автора [1], посвященная систематическому изложению общерелятивистской кинетической теории и ее приложениям к проблемам теории гравитации, гравитационного эксперимента, релятивистской астрофизике и космологии. Монография вышла небольшим, «пилотным» тиражом и, по-видимому, поэтому быстро разошлась. Несмотря на то, что монография была опубликована Автором на различных веб-сайтах<sup>1</sup>, существует устойчивый спрос на эту книгу в «твердом» формате, поскольку ее можно использовать и в качестве учебника и справочника, который всегда удобно иметь под рукой. Кроме того, за последние 3 года Автором был получен ряд серьезных результатов в области общерелятивистской кинетической теории, связанных с обобщением некоторых теоретических моделей на космологические модели с ускорением. В связи с этим возникла идея переработки предыдущей монографии с опусканием некоторых вопросов, не имеющих пока наблюдательного и экспериментального подтверждения и расширением монографии в направлении проблем космологии, которая сейчас переживает настоящий бум в связи с рядом революционных открытий внегалактической астрономии: ускорение Вселенной, темная материя и черная энергия и т.п. В данной монографии по сравнению с [1] опущены главы, посвященные взаимодействию гравитационного излучения с релятивистской плазмой, и добавлены главы, посвященные кинетическим моделям ускорения Вселенной и кинетике восстановления термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной.

Автор благодарен своим рецензентам, профессорам Виталию Николаевичу Мельникову и Дмитрию Владимировичу Гальцову за конструктивные замечания, способствующие улучшению качества книги. Также Автор благодарен академику Старобинскому Алексею Александровичу за полезное и плодотворное обсуждение проблем современной космологии. Кроме того, Автор благодарен своей жене, Валентине Ивановне Ковтун, за большую помощь по подготовке книги к изданию и своему ученику, к.ф.-м.н. Агафонову Александру Алексеевичу, за подготовку макета обложки книги и выполнение ряда сложных рисунков.

Ниже принята, если это не оговорено особо, система единиц, в которой  $G = c = \hbar = 1$ ; сигнатура метрики  $(- - - +)$ , латинские индексы пробегают значения от 1 до 4, греческие - от 1 до 3. Ковариантные производные обозначаются запятой либо, где это удобно, символом  $\nabla_i$ . Тензор Риччи определен через свертку тензора Римана по первому

---

<sup>1</sup>см., например, <http://cm., например, rgs.vniims.ru/books/kinetics.pdf>

## Предисловие

и третьему индексам, как и в книге [47];

$$(p, q) = g_{ik} p^i q^k$$

скалярное произведение векторов  $p^i$  и  $q^k$ . Соотношение:  $A \stackrel{*}{=} B$  будет обозначать, что равенство  $A = B$  имеет место в данной системе координат.

Автор

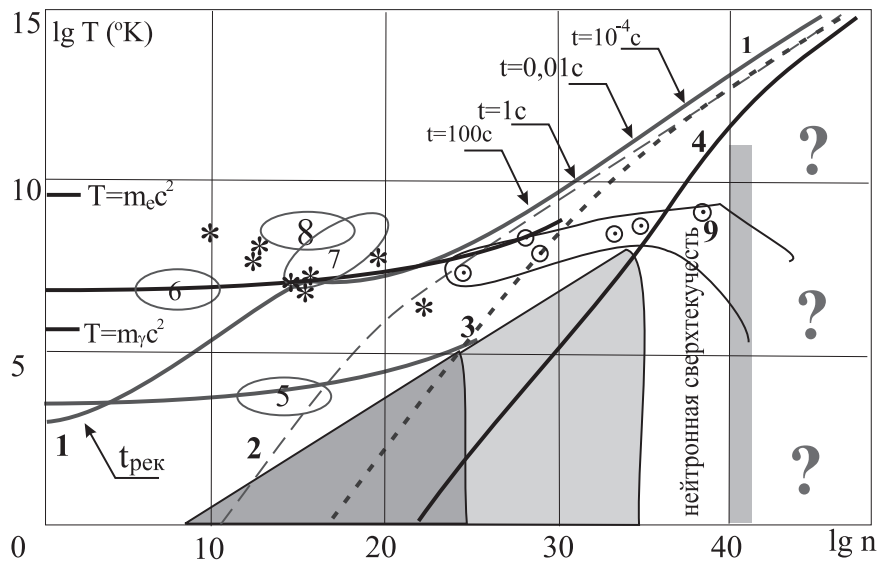
---

## Необходимость общерелятивистской кинетической теории

В последние три десятилетия в общей теории относительности (ОТО) выделилось и развивается самостоятельное направление - общерелятивистская кинетическая теория газов и плазмы, основы которой были сформулированы в 60-е годы в работах Н.А. Черникова [2], Г. Таубера и Дж. Вайнберга [3], Н.А. Черникова [4] - [7], А.А. Власова [8], Р. Линдквиста [9] и других (см., например, [10] - [13]). Имеется несколько причин для развития кинетической модели вещества в ОТО. Во - первых, кинетическая теория вследствие своего микроскопического характера является теорией более глубокого уровня, чем гидродинамика. Только на основе кинетической теории возможно строгое динамическое обоснование релятивистской гидродинамики, выяснение границ ее применения, а также конкретизация и вычисление различных параметров гидродинамических уравнений: коэффициентов переноса, уравнения состояния и т.п.

Во - вторых, область применимости гидродинамической модели вещества ограничена условиями существования локального термодинамического равновесия (ЛТР), которые выполняются лишь для слабонеоднородных и слабонестационарных статистических систем. Для поддержания ЛТР длина свободного пробега частиц должна быть гораздо меньше характерного размера неоднородности системы, либо среднее время между столкновениями частиц - гораздо меньше характерного времени эволюции системы. В сильных релятивистских полях тяготения указанные условия легко могут быть нарушены, в результате статистическая система окажется неравновесной. В этом случае традиционное и относительно простое гидродинамическое описание вещества становится неприемлемым, и требуется привлечение более сложной его модели, к которой приводит общерелятивистская кинетическая теория.

В настоящее время известно множество примеров таких существенно неравновесных релятивистских статистических систем. Это - гравитационные волны в горячей Вселенной, реликтовые фотоны с момента рекомбинации плазмы, реликтовые нейтрино спустя 0,1 секунду с момента Большого Взрыва, космические лучи сверхвысоких энергий внегалактического происхождения, крупномасштабная структура Вселенной, околосуперновое плазма, электроны в плазменных и металлических детекторах гравитационных волн и т.д. (см. Рис. 1).



**Рис. 1. Применимость различных моделей описания вещества.** 1- космологический трек электронной компоненты плазмы (показаны космологические времена в секундах,  $t_{рек}$ - время рекомбинации водородной плазмы в стандартном космологическом сценарии); 2- ниже этой линии космологические нейтрино необходимо описывать статистикой Ферми; 3 - ниже этой линии космологические электроны необходимо описывать статистикой Ферми; 4 - ниже этой линии космологические нуклоны необходимо описывать статистикой Ферми; 5 - электроны в Солнечной атмосфере; 6 - электроны в Солнечной короне; 7 - электроны в магнитосфере сверхплотных и нейтронных звезд; 8 - оптимальная область управляемых термоядерных реакций; 9 - эволюционный трек ядер звезд; - вне темно-серой области можно ограничиться учетом лишь парных столкновений электронов; - вне светло-серой области можно ограничиться учетом лишь парных столкновений нуклонов; выше этой линии водородная плазма ионизирована более чем на 90% ; выше этой линии в плазме содержится более 50% позитронов; \* - эксперименты по высокотемпературной плазме в лабораторных установках;  $\odot$  - расчетные данные.

Следует отметить тенденцию, наметившуюся в последние годы в космологии — обнаружение существенно неравновесных ситуаций там, где молчаливо предполагалось существование ЛТР. Эта тенденция вызвана с одной стороны более углубленным и последовательным анализом условий существования ЛТР в конкретных астрофизических и космологических ситуациях, а с другой стороны — прогрессом в области физики элементарных частиц. Указанной общей тенденции безусловно способствовали и крупнейшие астрономические открытия последних лет целого ряда мощных источников неравновесного электромагнитного излучения. Для теории образования крупномасштабной структуры Вселенной в последние годы вообще характерно введение новых гипотетических массивных слабо взаимодействующих частиц: аксионов, нестабильных нейтрино и т.п. С развитием схем великого объединения взаимодействий элементарных частиц типа  $SU(5)$  в космологию ранней Вселенной стали вводиться сверхмассивные векторные и скалярные бозоны с массой порядка  $10^{15}$  ГэВ. Нарушение ЛТР между этими бозонами и лептонно-кварковой плазмой на самых ранних стадиях космологического расширения при отсутствии  $T$ -инвариантности может привести к генерации барионного заряда [14], [15]. Важно

## Предисловие

отметить, что указанный эффект может возникать лишь при условии нарушения ЛТР [16], когда гидродинамическая модель оказывается непригодной.

Третья причина необходимости развития общерелятивистской кинетической теории заключается в следующем. Центральный объект кинетической теории, функция распределения, подчиняется интегро - дифференциальным уравнениям, в которых дифференциальный оператор определяется макроскопической метрикой пространства - времени и макроскопическими физическими полями, в то время как интегральный оператор, интеграл столкновений, определяется инвариантными амплитудами рассеяния, вычисление которых является одной из главных задач квантовой теории поля. Таким образом, кинетическая теория является своеобразным мостом, связывающим микро- и макроуровни описания вещества, и введение общерелятивистской кинетики в структуру общей теории относительности приводит к более полной, логически замкнутой картине мира.

Существует, наконец, еще одна глубокая причина необходимости развития релятивистской кинетики в рамках ОТО, касающаяся ее динамического аспекта и тесным образом связанная с внутренним развитием теории гравитации. Речь идет о гравитационном взаимодействии частиц. Вследствие нелинейного характера теории гравитации макроскопический тензор энергии - импульса не определяет макроскопическую метрику пространства - времени, что приводит к необходимости построения корректной процедуры учета корреляций локальных флуктуаций метрики и процедуры статистического измерения гравитационных полей [17] - [18].

Несмотря на возросший интерес к общерелятивистской кинетике, число публикаций по этой проблеме все еще остается слишком малым. По мнению автора этот факт во многом можно объяснить отсутствием до настоящего времени достаточно полной монографии по общерелятивистской кинетической теории, позволяющей специалистам в теории гравитации достаточно полно овладеть понятиями и методами релятивистской кинетики. Опубликованные до сих пор монографии либо посвящены лишь спецрелятивистской кинетике<sup>2</sup>, либо - использованию общерелятивистской кинетики для решения проблем общерелятивистской термодинамики и гидродинамики. Данная же монография нацелена прежде всего на исследование существенно неравновесных, кинетических процессов в релятивистских полях тяготения, в первую очередь, применительно к космологии, и призвана восполнить существующий в литературе пробел.

## Краткий очерк общерелятивистской кинетической теории с 1911 по 1976 гг

Приведем краткий исторический обзор развития релятивистской и общерелятивистской кинетической теории. По-видимому, первой работой по релятивистской статистике можно считать работу Юттнера 1911-го года [20] (см. Табл. 1). Звездочками отмечены принципиально важные для развития релятивистской кинетики работы.

---

<sup>2</sup>Как, например, классическая монография С.де Гроота, В. ван Леувена и Х. ван Верта [19]

**Таблица 1. А:** Хронология развития релятивистской кинетики: с 1911 по 1976 гг.

Год	Автор	Ссылка	Основные результаты
1911	Jüttner F. <sup>*)</sup>	[20, 21]	Релятивистское обобщение равновесной функции распределения Максвелла: $f = A \exp(-\sqrt{m^2 + p^2}/T)$
1914	Tolman R.C.	[22]	Релятивистское обобщение равновесной функции распределения Максвелла
1928	Jüttner F.	[23]	Релятивистские обобщения равновесных распределений Ферми и Бозе
1935	Walker A.G.	[24]	Вывод бесстолкновительного релятивистского кинетического уравнения для заряженных частиц
1939	D.Van Dantzing	[25]	Вычислены макроскопические моменты релятивистского распределения Максвелла
1940	Lichnerovich A., Marrot R.	[26]	Релятивистское обобщение уравнения Больцмана для случая парных упругих столкновений
1940	Marrot R.	[27]	Релятивистское обобщение уравнения Больцмана для случая парных упругих столкновений
1948	Taub A.H.	[28]	Вычислены макроскопические моменты релятивистского распределения Максвелла и энтропия
1948	Корпе Н.	[29]	Вычислены макроскопические моменты релятивистского распределения Максвелла и энтропия

**Таблица 1. В: Хронология развития релятивистской кинетики**

Год	Автор	Ссылка	Основные результаты
1950	Власов А.А.	[30]	Выведены релятивистские уравнения Ливилля и получены их трансформационные свойства при преобразованиях Лоренца
1952	Климонтович Ю.Л.	[31]	Получено релятивистское кинетическое уравнение для квантовой функции распределения. Впервые рассмотрены 8-ми мерные функции распределения
1954	Lindhard J.L.*)	[32]	Изучены электромагнитные колебания релятивистской плазмы на основе релятивистских уравнений Власова
1955	Климонтович Ю.Л.	[33]	Получено релятивистское кинетическое уравнение для классической функции распределения на основе формализма Гамильтона 8-мерного фазового пространства
1956	Беляев С.Г., Будкер Г.И.	[34]	На основе инвариантного гамильтонова формализма и формализма 8-ми мерного фазового пространства получено релятивистское обобщение кинетического уравнения Ландау (уравнение типа Фоккера - Планка)
1957	Syng J.L.	[35]	Строгое определение релятивистской функции, функция распределения Ютнера обобщена на случай ненулевой макроскопической скорости и получена как максимально вероятная, определены макроскопические потоки

\*)После работы Линдхарта [32] возник бум на исследование колебаний релятивистской плазмы, - в этом направлении работали Ю.Л. Климонтович, В.П. Силин, С.Т. Беляев, Г.И. Будкер и многие другие теоретики.

**Таблица 1. С:** Хронология развития релятивистской кинетики

Год	Автор	Ссылка	Основные результаты
1957	Черников Н.А.	[36]	Без использования формализма Гамильтона получено релятивистское кинетическое уравнения для семимерной функции распределения с интегралом упругих парных столкновений
1957	Черников Н.А.	[37]	Исследованы свойства релятивистского интеграла упругих парных столкновений
1957	Черников Н.А.	[38]	Интеграл парных столкновений приводится к форме Больцмана и доказывается, что он обращается в нуль равновесным распределением
1957	Черников Н.А.	[39]	Записывается интеграл столкновений многократных упругих столкновений
1959	Власов А.А. <sup>*)</sup>	[40]	Сформулированы бесстолкновительные релятивистские кинетические уравнения в произвольном гравитационном поле с помощью техники Картана расслоенных пространств.
1959	Климонтович Ю.Л.	[41]	Из релятивистского уравнения Лиувилля получена цепочка Боголюбова для 8N-мерных распределений

<sup>\*)</sup>Работа [40] является первой работой по общерелятивистской кинетике. Именно в этой работе в кинетику введен современный формализм Картана дифференцирования в расслоении, кинетические уравнения сформулированы в явно инвариантной форме, соответствующей современной концепции статистической теории. Работы А.А. Власова по общерелятивистской кинетической теории, как и по классической, так и специально - релятивистской, несомненно, являются пионерскими.

Таблица 1. D: Хронология развития релятивистской кинетики

1960	Syng J.L.*)	[42]	Впервые сформулированы основные понятия общерелятивистской статистической модели, определены моменты инвариантной семимерной функции распределения и макроскопические потоки.
1960	Климонтович Ю.Л.	[43]	На основе цепочки Боголюбова для $8N$ -мерных распределений выведено инвариантное релятивистское кинетическое уравнение для квантовой функции распределения
1960	Черников Н.А.*)	[2]	Впервые выведено релятивистское кинетическое уравнение с интегралом парных упругих столкновений относительно 7-мерного распределения в сферически симметричном гравитационном поле. Найдена равновесная функция распределения.
1961	Tauber.E., Weinberg J.W.*)	[3]	На основе инвариантного Гамильтонова формализма впервые сформулированы общерелятивистские кинетические уравнения с учетом электромагнитных полей, найдены необходимые условия статистического равновесия и равновесные решения.
1962	Черников Н.А.	[4]	Выведено релятивистское кинетическое уравнение с интегралом парных упругих столкновений относительно 7-мерного распределения в произвольном гравитационном поле.
1962	Черников Н.А.	[5]	Доказана H-теорема Больцмана для релятивистских упругих столкновений. Из условия равенства потока энтропии найдена равновесная функция распределения.
1962	Черников Н.А.	[6]	Получены уравнения переноса макроскопических величин, доказано сохранение числа частиц и энергии.

**Таблица 1. Е: Хронология развития релятивистской кинетики**

1965	Черников Н.А.	[7]	Обобщением метода Града получены уравнения общерелятивистской гидродинамики в 13-ти моментном приближении на основе релятивистских кинетических уравнений с интегралом парных упругих столкновений.
1966	Власов А.А.	[8]	Впервые дано последовательное изложение общерелятивистских уравнений Власова на языке производных Картана, приведены точные их решения.
1966	Lindquist E.W.	[9]	Получены общерелятивистские уравнения переноса.
1971	Stewart J.M.	[10]	Рассмотрены неравновесные кинетические процессы на основе релятивистской кинетической теории
1971	Ehlers J. <sup>*)</sup>	[11]	Впервые рассмотрены приложения релятивистской космологии, в частности, найдено решение бесстолкновительного кинетического уравнения в метрике Фридмана
1974	Ehlers J.	[12]	Систематическое изложение кинетической теории газов в общей теории относительности
1974	Игнатъев Ю.Г. <sup>**)</sup>	[44]	Впервые сформулированы основы самосогласованной кинетической теории взаимодействия гравитационных волн с релятивистским газом

<sup>\*)</sup>Работа [44] является первой работой по самосогласованной общерелятивистской кинетической теории взаимодействия гравитационных волн с плазмой.

**Таблица 1. F:** Хронология развития релятивистской кинетики

1975	Ignat'ev Yu.G.**)	[45]	Впервые сформулированы основы самосогласованной кинетической теории взаимодействия электромагнитных волн с релятивистской плазмой в гравитационном поле
1976	Игнат'ев Ю.Г.***)	[46]	Впервые сформулированы основы самосогласованной кинетической теории глобального термодинамического равновесия самогравитирующей релятивистской плазмы

С работ Автора [44], [45], [46] фактически начинаются исследования Казанской школы гравитации в области общерелятивистской кинетической теории.

---

# Глава I

## Формализм общерелятивистской кинетической теории

«Более софистическое и детальное изложение этого предмета читатель найдет...»

Из книги Ч.Мизнера, К.Торна, Дж.Уилера “Гравитация” [48]

### I.1 Статистическое описание среды в гравитационном поле

Центральным понятием общерелятивистской кинетической теории, как и классической, является *функция распределения*, с помощью которой вычисляются макроскопические значения наблюдаемых величин. Таким образом, функция распределения является макроскопической величиной и должна измеряться макроскопическим прибором.

Макроскопичность прибора в классической статистике означает, во - первых, макроскопичность его размеров: в его объеме  $\Delta V = \Delta^3 x$  в каждый момент времени должно находиться достаточно большое число частиц  $N$ :

$$N = \Delta V n \gg 1, \quad (I.1)$$

где  $n$  - плотность числа измеряемых частиц.

Условие (I.1), однако, не является достаточным условием макроскопичности прибора. Наблюдаемые макроскопические значения динамических функций не определяют полностью состояние статистической системы, для полного описания которой необходимо знание числа частиц в каждом динамическом состоянии и в каждый момент времени. Таким образом, мы приходим к понятию фазовой плотности состояний, т.е., к понятию функции распределения.

Рассмотрим случай, когда динамическим является состояние с определенным импульсом  $\mathbf{p}$ ; тогда фазовая плотность состояний есть  $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Пусть  $\Delta \mathbf{p}$  - точность измерения импульса макроскопическим прибором. Условие макроскопичности измерения состояния с импульсом  $\mathbf{p} \pm \Delta \mathbf{p}$  аналогично (I.1):

$$N_p = (2\pi)^{-3} \Delta^3 \mathbf{r} \Delta^3 \mathbf{p} F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3} \Delta \Gamma f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \gg 1, \quad (I.2)$$

### I.1. Среда в гравитационном поле

где  $\Delta\Gamma_6 = \Delta^3\mathbf{r}\Delta^3\mathbf{p}$  - 6-мерный фазовый объем прибора,  $(2\pi)^{-3}$  - нормировочный множитель (в обычной системе единиц —  $(2\pi\hbar)^{-3}$ ). Условие (I.2) и является условием макроскопичности прибора в классической статистике. При нарушении условия (I.2) число частиц в данном динамическом состоянии оказывается малым, поэтому наблюдаемые значения динамических функций сильно флуктуируют и отклоняются от своих макроскопических значений.

Соотношение неопределенности Гейзенберга приводит к ограничению на минимальный фазовый объем прибора:

$$\Delta\Gamma > (2\pi)^3. \quad (\text{I.3})$$

Вследствие принципа Паули две тождественные частицы с полуцелым спином  $S$  не могут находиться в одном состоянии, т.е., число фермионов в минимальном фазовом объеме не должно превышать  $2S + 1$ :

$$(2\pi)^{-3} \min \Delta\Gamma F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \leq 2S + 1. \quad (\text{I.4})$$

Последнее условие приводит к более жесткому, чем (I.2), определению макроскопичности прибора:

$$\Delta\Gamma \gg (2\pi)^3. \quad (\text{I.5})$$

Релятивистская теория вносит свои дополнительные штрихи к образу макроскопического прибора. Измерение любой физической величины производится в течение конечного промежутка времени,  $\Delta t$ . Ограниченность скорости распространения взаимодействий налагает ограничение сверху на линейные размеры макроскопического прибора, согласно которому любые два события в приборе, относящиеся к одному акту измерения, должны находиться внутри изотропного конуса:

$$(\Delta t)^2 - (\delta\mathbf{r})^2 > 0. \quad (\text{I.6})$$

Нижний предел  $\Delta t$  устанавливается характерным временным масштабом эволюции статистической системы,  $\tau$ , и требуемой точностью измерения, — этот предел должен быть заведомо меньше  $\tau$ . Для строго стационарных систем  $\tau \rightarrow \infty$ , и время измерения может быть выбрано сколь угодно большим. Вместе с ним согласно (I.6) сколь угодно большими могут быть выбраны и размеры макроскопического прибора, оставаясь ограниченными лишь снизу. Однако, для существенно нестационарных систем условие (I.6) становится достаточно жестким. В случае же, когда (I.5) и (I.6) противоречат друг другу, вообще невозможно построение макроскопического прибора, и введение функции распределения становится физически бессмысленной операцией.

Такая ситуация реализуется, например, на планковских стадиях горячей Вселенной, временной масштаб эволюции которой равен ее возрасту,  $t$ . Поэтому  $\Delta t \leq t$ , что вследствие (I.6) приводит к условию:

$$\Delta r < t. \quad (\text{I.7})$$

Разброс значений импульсов ультрарелятивистских частиц в горячей модели Вселенной имеет порядок  $1/\sqrt{t}$ , поэтому условие (I.5) примет вид:

$$t \gg 1 \quad (\text{I.8})$$

## Глава I. Формализм кинетической теории

и нарушается на планковских масштабах времени  $t \sim 1$ .

Таким образом, уже в специальной теории относительности макроскопический прибор занимает некоторое промежуточное положение между микроскопическим и макроскопическим масштабами, последний из которых определяется временем эволюции статистической системы. Однако, верхний предел масштаба макроскопического прибора не является еще органической чертой спецрелятивистской кинетики, а определяется конкретными свойствами статистической системы и спецификой наблюдаемых величин. Аналогичная ситуация возникает и в нерелятивистской кинетике, когда измеряются макроскопически неоднородные распределения. Для измерения этой неоднородности необходим прибор с линейными размерами значительно меньшими масштаба неоднородности.

*В общей же теории относительности промежуточность положения макроскопического прибора становится органической чертой общерелятивистской кинетики по следующим причинам. Первая из этих причин вполне аналогична рассмотренной выше: существование кривизны пространства - времени, свидетельствующей о наличии гравитационного поля, приводит к появлению пространственной или временной неоднородности с характерным масштабом равным радиусу кривизны  $r_c = K^{-1}$ , где  $K$  - кривизна пространства - времени. Четырехмерные в указанном выше смысле размеры макроскопического прибора должны быть гораздо меньше этой величины.*

Однако, есть и другая, более глубокая причина, связанная с проблемой синхронизации часов. В общей теории относительности синхронизация часов в конечном объеме пространства возможна лишь в синхронных системах отсчета (ССО) [47], которые реализуются времениподобными конгруэнциями геодезических линий. Поэтому, если мы хотим получить с помощью прибора информацию об одновременном значении наблюдаемой величины, то должны сконструировать этот прибор из не связанных между собой элементов, совершающих геодезическое движение. Однако, пространственный объем геодезической трубки прибора изменяется вдоль его траектории вследствие отклонения геодезических. Например, объем геодезической трубки прибора в расширяющемся мире Фридмана растет с течением синхронного времени, в метрике Бонди - Пирани - Робинсона после прохождения гравитационного импульса объем геодезической трубки уменьшается. Изменение объема прибора приводит к неопределенности знаний об измеряемом объекте. Чтобы избежать этой неопределенности, необходимо потребовать малость геодезического отклонения всех элементов прибора, т.е., ограниченность его четырехмерных размеров:

$$|R_{ijkl}\delta^i u^j \delta^k u^l| \ll 1, \quad (I.9)$$

где  $u^i$  - вектор скорости какого - либо элемента прибора,  $\delta^i$  - вектор геодезического отклонения каждой точки прибора относительно выбранной. Если же различные элементы макроскопического прибора не лежат на времениподобных геодезических, то вследствие рассинхронизации часов в различных точках прибора наблюдаемая динамическая величина будет измеряться в различные моменты времени с разбросом  $\Delta t$ , равным максимальному дефекту времени в приборе. Требование определенной точности измерения наблюдаемой величины совместно с условием времениподобности измерения (I.6) снова приводит к (I.9), т.е., к отмеченному выше условию малости четырехмерных размеров прибора по сравнению с радиусом кривизны пространства - времени.

Резюмируя, скажем, что *макроскопический прибор в общей теории относительности должен быть существенно локальным, точечноподобным объектом, а его физика*

## 1.1. Среда в гравитационном поле

должна определяться специальной теорией относительности. Эта ситуация напоминает ситуацию с прибором в квантовой механике, в которой сам прибор должен являться макроскопическим, классическим объектом, т.е., *иностраным по отношению к измеряемой системе объектов*.

Определив макроскопический прибор как локальный объект, внутри которого справедливы законы специальной теории относительности, мы тем самым получили возможность проводить измерения макроскопических наблюдаемых величин вдоль мировой трубки прибора. Измеряя макроскопические наблюдаемые динамические функции и относя их к постоянной прибора - его фазовому объему, наблюдатель приходит к понятию фазовых плотностей динамических функций и тем самым - к функции распределения. Измеряя фазовые плотности динамических функций в каждой точке пространственноподобной гиперповерхности  $\Sigma$ , наблюдатель получает возможность восстановить макроскопически наблюдаемую динамическую функцию на всей гиперповерхности. Для этого необходимо достаточно плотно заполнить гиперповерхность  $\Sigma$  мировыми трубками наблюдателей, т.е., фактически ввести поле наблюдателей, ассоциированных с времениподобным векторным полем  $u^i(x)$ , ортогональным гиперповерхности  $\Sigma$ . Чтобы иметь возможность восстанавливать одновременное макроскопическое значение наблюдаемой динамической функции, наблюдатели должны находиться в синхронной системе отсчета, т.е., векторное поле  $u^i(x)$  должно быть касательным к времениподобной геодезической конгруэнции. Если же поле  $u^i(x)$  не является геодезическим, т.е., часы наблюдателей не синхронизованы, остается лишь гадать о смысле величины, полученную интегрированием фазовых плотностей динамических величин.<sup>1</sup> Так например, измерение полного числа частиц, полученного суммированием их локальных плотностей несинхронными наблюдателями, приведет к выводу о нарушении закона сохранения числа частиц.

В данной монографии будут рассматриваться, в основном, локальные релятивистские кинетические уравнения для классических частиц. Дифференциальный оператор в этих уравнениях определяется классическими макроскопическими полями, а интегральный оператор, вычисляемый в той же пространственно - временной точке, определяется инвариантными амплитудами матрицы рассеяния. Классичность движения частицы во внешнем гравитационном поле подразумевает малость ее комптоновской длины  $\lambda_k = E^{-1}$  ( $E$  - энергия частицы) по сравнению с масштабом неоднородности гравитационного поля, т.е., по сравнению с радиусом кривизны. Этот вывод строго следует из результатов работы [49], если в последней учесть члены разложения второго порядка по постоянной Планка и сравнить их с членами нулевого порядка. При указанном условии можно одновременно пренебречь и влиянием спина на движение частицы. В инвариантной форме условие квазиклассичности движения релятивистской частицы во внешнем гравитационном поле имеет вид:

$$(u, p)K^{-1} \gg 1, \quad (I.10)$$

где  $p_i$  - импульс релятивистской частицы.

Корректное введение матрицы рассеяния частиц во внешнем гравитационном поле требует возможности локального определения чистых состояний свободных частиц "на бесконечности", т.е., вне области их взаимодействия. Таким образом, для того, чтобы

---

<sup>1</sup>Хотя не оставляет никакого сомнения возможность проведения такой вычислительной операции.

## Глава I. Формализм кинетической теории

внешнее гравитационное поле не влияло на акт взаимодействия частиц, т.е., для возможности описания статистической системы *локальными кинетическими уравнениями*, необходима малость эффективного радиуса взаимодействия этих частиц по сравнению с радиусом кривизны. Кроме того, акт взаимодействия должен быть мгновенным. В произвольной системе координат указанное условие 4 - мерной точечности акта взаимодействия частиц принимают вид [50]:

$$\sigma |R_{ijkl}v^i u^j v^k u^l| \ll 1, \quad (\text{I.11})$$

где  $v^i$  - вектор скорости релятивистской частицы,  $\sigma$  - полное сечение взаимодействия. С другой стороны, свободные состояния частиц “на бесконечности” должны реализовываться внутри макроскопического прибора, что опять - таки приводит к условию (I.11).

Таким образом, при переходе к локальным кинетическим уравнениям и макроскопический прибор и микроскопические взаимодействия элементарных частиц должны определяться физикой пространства - времени Минковского. Этот факт в сочетании с принципом локального соответствия делает возможным получение общерелятивистских кинетических уравнений с локальным интегралом столкновений путем ковариантного обобщения соответствующих уравнений спецрелятивистской теории. В монографии, однако, будут рассмотрены и нелокальные кинетические процессы.

## I.2 Гамильтонова формулировка уравнений движения частиц во внешних полях

### I.2.1 Канонические уравнения движения

*Канонические уравнения движения* релятивистской частицы имеют вид [51]:

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}; \quad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}, \quad (\text{I.12})$$

где  $\mathcal{H}(x, P)$  - инвариантная функция Гамильтона,  $s$  - канонический параметр,  $x^i$ ,  $P_i$  - динамические переменные, причем  $x^i$  - координата частицы,  $P_i$  - ее обобщенный импульс. Производная функции динамических переменных  $\Psi(x, P) = \Psi(s)$  вдоль траектории частицы  $x^i = x^i(s)$ ,  $P_i = P_i(s)$  равна:

$$\frac{d\Psi}{ds} = [\mathcal{H}, \Psi], \quad (\text{I.13})$$

где введена *инвариантная скобка Пуассона*:

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial P_i} \frac{\partial B}{\partial x^i} - \frac{\partial B}{\partial P_i} \frac{\partial A}{\partial x^i}, \quad (\text{I.14})$$

обладающая свойством кососимметрии:

$$[B, A] = -[A, B]. \quad (\text{I.15})$$

## 1.2. Канонический формализм

Вследствие (I.13) и (I.15) сама инвариантная функция Гамильтона  $\mathcal{H}(x, P)$  всегда является интегралом движения:

$$\mathcal{H}(x, P) = \text{Const} . \quad (\text{I.16})$$

Поэтому существует бесконечное множество способов выбора функции Гамильтона, связь между которыми осуществляется перенормировкой канонического параметра  $s$ . Удобно выбрать следующую нормировку функции Гамильтона:

$$\mathcal{H}(x, P) = \frac{1}{2}m^2 , \quad (\text{I.17})$$

где  $m$  - масса покоя частицы.

С помощью функции Гамильтона в нормировке (I.17) введем контрвариантный вектор *кинематического импульса* частицы,  $p^i$ :

$$p^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = \frac{dx^i}{ds} . \quad (\text{I.18})$$

Обычно кинематический импульс вводят соотношением  $p^i = m dx^i/ds$ , что соответствует нормировке функции Гамильтона в (I.16):  $\text{Const} = m$ . Однако, такая нормировка оказывается неудобной для безмассовых частиц а также при определении макроскопических средних. Переход от нормировки (I.17), (I.18) к обычной осуществляется масштабным преобразованием канонического параметра  $s \rightarrow s/m$ .

Поскольку кинематический импульс согласно (I.18) является касательным к траектории частицы, он должен удовлетворять *соотношению нормировки*:

$$(p, p) = m^2 . \quad (\text{I.19})$$

### 1.2.2 Функция Гамильтона

Функция Гамильтона массивной частицы, находящейся в гравитационном, векторном и скалярном полях, может быть записана в виде [51]:

$$\mathcal{H}(x, P) = \frac{1}{2} \left[ \frac{g^{ik}(P_i - eA_i)(P_k - eA_k)}{1 + q\Phi/m} - mq\Phi \right] , \quad (\text{I.20})$$

где  $A_i$  - векторный потенциал,  $e$  - векторный заряд частицы,  $\Phi$  - скалярный потенциал,  $q$  - соответствующий скалярный заряд частицы. Этот выбор функции Гамильтона соответствует нормировке (I.17). В присутствии нескольких векторных и скалярных полей в (I.20) необходимо произвести замену:

$$eA_i \rightarrow \sum e_a A_i^{(a)} ; \quad q\Phi \rightarrow \sum q_a \Phi_a .$$

В стандартной нормировке вместо (I.20) функцию Гамильтона следует выбрать в виде [52]:

$$\mathcal{H}(x, P) = \sqrt{g^{ik}(P_i - eA_i)(P_k - eA_k)} - q\Phi \quad (= m) . \quad (\text{I.21})$$

## Глава I. Формализм кинетической теории

Из (I.18) и (I.20) найдем связь между кинематическим и обобщенным импульсами частицы:

$$p^i = \frac{P^i - eA^i}{1 + q\Phi/m}. \quad (\text{I.22})$$

Используя связь (I.22) и явный вид функции Гамильтона (I.20) в канонических уравнениях (I.12), получим уравнения движения в Лагранжевой формулировке:

$$\left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right) \frac{Dp^i}{ds} = eF_{,k}^i p^k + q\Phi_{,k} \left(g^{ik} - \frac{p^i p^k}{m^2}\right), \quad (\text{I.23})$$

где  $D$  - символ абсолютного дифференцирования (см., например, [42]):

$$\frac{Dp^i}{ds} = \frac{dp^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i p^j \frac{dx^k}{ds}; \quad (\text{I.24})$$

$$F_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i} \quad (\text{I.25})$$

- тензор Максвелла. Заметим, что из (I.25) следует  $d(p, p) = 0$ , т.е.:

$$(p, p) = \text{Const}. \quad (\text{I.26})$$

Уравнения движения (I.25) могут быть получены также на основе вариационного формализма из функции действия:

$$S = - \int (m + q\Phi) ds - e \int A_i dx^i. \quad (\text{I.27})$$

### I.2.3 Линейные интегралы движения

Подставляя в (I.13)  $\Psi = (\xi, P)$ , где  $\xi^i(x)$  - произвольное векторное поле, и используя явный вид функции Гамильтона (I.20), найдем необходимые и достаточные условия существования *линейного интеграла движения*:

$$(\xi, P) = \text{Const} : \quad (\text{I.28})$$

$$L_{\xi} A_i = 0; \quad (\text{I.29})$$

$$L_{\xi} \frac{g_{ik}}{m + q\Phi} = 0, \quad (m \neq 0), \quad (\text{I.30})$$

где  $L_{\xi}$  - производная Ли вдоль направления  $\xi(x)$  (см., например, [53]).

Для безмассовых частиц ( $m \equiv 0$ ) условия (I.30) необходимо заменить следующими:

$$L_{\xi} g_{ik} = \sigma(x) g_{ik}; \quad (m \equiv 0), \quad (\text{I.31})$$

где  $\sigma(x)$  - произвольная скалярная функция.

## I.3 Релятивистское фазовое пространство и теорема Лиувилля

### I.3.1 Релятивистское фазовое пространство

Присоединяя к каждой точке  $x$  риманова пространства  $V_4$  пучок всевозможных ковекторов  $P$ , получим 8-ми мерное релятивистское *фазовое пространство*,  $\Gamma$ . Это пространство является векторным расслоением, причем его база  $X$  - метрическое пространство  $V_4$  (*конфигурационное пространство*), а слой  $P(x)$  - касательное в точке  $x$  *пространство импульсов*:

$$\Gamma = P(x) \times X. \quad (I.32)$$

При произвольных невырожденных преобразованиях координат базы  $X$ :

$$x'^i = f^i(x); \quad \det \left\| \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right\| \neq 0 \quad (I.33)$$

координаты в слое  $P(x)$  преобразуются как ковариантные компоненты вектора:

$$P'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} P_k. \quad (I.34)$$

Топология импульсного пространства является топологией бесконечного четырехмерного параллелепипеда. Каждая частица описывается траекторией

$$\{x^i(s), P_i(s)\} = \eta_J(s) \subset \Gamma; \quad (J = \overline{(1, 8)}) \quad (I.35)$$

в фазовом пространстве  $\Gamma$ , причем частицы движутся по гиперповерхностям (I.20) этого пространства. В терминах кинематического импульса  $p$  данные гиперповерхности в каждой точке базы  $X$  представляют пары непересекающихся псевдосфер (массовых поверхностей).

Инвариантными по отношению к преобразованиям (I.33) элементами объемов конфигурационного ( $dX$ ) и импульсного ( $dP$ ) пространств являются:

$$dX = \sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4, \quad (I.36)$$

$$dP = \frac{1}{\sqrt{-g}} dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3 \wedge dP_4. \quad (I.37)$$

В дальнейшем для простоты знак  $\wedge$  внешней дифференциальной косои формы будем опускать. Инвариантный элемент объема фазового пространства  $d\Gamma$  равен:

$$d\Gamma = dX dP = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 dP_1 dP_2 dP_3 dP_4, \quad (I.38)$$

- благодаря канонической сопряженности динамических переменных  $x^i$  и  $P_i$  явная зависимость от метрики исчезает из определения элемента объема фазового пространства.

Заметим, что вследствие канонических уравнений движения (I.12) вдоль любой фазовой траектории частицы выполняется соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} + \frac{\partial}{\partial P_i} \frac{dP_i}{ds} = 0. \quad (I.39)$$

## Глава I. Формализм кинетической теории

Если фазовым переменным (I.35) сопоставить 8-ми мерный «вектор фазовой скорости»  $V_J = d\eta_J/ds$ , то соотношение (I.39) может быть записано в более изящном виде:

$$\frac{\partial V_J}{\partial \eta_J} = 0. \quad (\text{I.40})$$

Наряду с введенным фазовым пространством можно рассматривать изоморфное ему расслоение:

$$\Gamma^- = P^-(x) \times X, \quad (\text{I.41})$$

где  $P^-(x)$  представляет собой пучок ковекторов кинематического импульса  $p_i$ , приложенного к точке  $x \in X$ . Используя связь (I.22), преобразуем элемент объема пространства импульсов (I.37):

$$dP = \frac{\left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right)^4}{\sqrt{-g}} dp_1 \wedge dp_2 \wedge dp_3 \wedge dp_4. \quad (\text{I.42})$$

Можно, наконец, совершить еще один изоморфизм и перейти к импульсному пространству контрвариантных кинематических импульсов,  $\Gamma^+$ ; инвариантный элемент объема  $dP$  тогда примет вид:

$$dP = \left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right)^4 \sqrt{-g} dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3 \wedge dp^4. \quad (\text{I.43})$$

### I.3.2 Теорема Лиувилля

Рассмотрим преобразование элемента объема фазового пространства  $d\Gamma$  при движении вдоль траектории частицы, т.е., исследуем, как деформируется трубка бесконечно близких фазовых траекторий тождественных частиц. Для этого совершим инфинитезимальный сдвиг  $\delta s$  вдоль фазовой траектории одной из частиц трубки:

$$\begin{aligned} x^i(s') &= x^i(s) + \frac{dx^i}{ds} \delta s; \\ P_i(s') &= P_i(s) + \frac{dP_i}{ds} \delta s. \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

Используя в (I.44) канонические уравнения движения (I.12) и рассматривая соотношения (I.44) как инфинитезимальные преобразования фазовых координат, получим для матрицы преобразования ( $E$  - единичная матрица):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_J}{\partial \eta_K} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} E + A\delta s & B\delta s \\ \hline C\delta s & E - A\delta s \end{array} \right]. \quad (\text{I.45})$$

### I.3. Релятивистское фазовое пространство

Таким образом, якобиан преобразования (I.44) равен:

$$\det \left\| \frac{\partial \eta_{J'}}{\partial \eta_K} \right\| = 1 + O(\delta^2 s), \quad (\text{I.46})$$

вследствие чего сохраняется элемент объема фазовой трубки:

$$d\Gamma(s') = d\Gamma(s), \quad (\text{I.47})$$

Аналогичное соотношение в классической механике называется *теоремой Лиувилля*.

Заметим, что аналогичные (I.47) соотношения для изоморфных фазовых пространств  $\Gamma^-$  и  $\Gamma^+$  не выполняются:

$$d\Gamma^\pm(s') \neq d\Gamma^\pm(s), \quad (\text{I.48})$$

так как пары  $(x^i, p_i)$  и  $(x^i, p^i)$  не являются *канонически сопряженными*.

### I.3.3 Конфигурационные производные функций динамических переменных

Тот факт, что фазовое пространство есть векторное расслоение, приводит к тому, что обычная ковариантная производная по Риччи от функций динамических переменных не является тензорной операцией в фазовом пространстве [8]. Вследствие этого дифференцирование по Риччи в фазовом пространстве должно быть заменено на дифференцирование по Картану [8], [54]:

$$\tilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma_{ij}^k P_k \frac{\partial}{\partial P_j} \quad (\text{I.49})$$

где  $\nabla_i$  - оператор ковариантного дифференцирования по Риччи. Оператор  $\tilde{\nabla}_i$ , который в дальнейшем мы будем называть *производной Картана*, определен таким образом, что:

$$\tilde{\nabla}_i P_k = 0. \quad (\text{I.50})$$

Пусть  $\Psi(x, P) \equiv \Psi(\eta)$  есть скалярная функция по отношению к преобразованиям (I.33) - (I.34) фазового пространства. Произвольная скалярная функция в фазовом пространстве может являться лишь функцией инвариантов [17]:

$$\Psi(\eta) = \Psi(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N), \quad (\text{I.51})$$

где  $\phi_s(\eta)$  есть  $s$ -линейные симметричные функции вектора импульса:

$$\phi_s(\eta) \stackrel{def}{=} \phi^{i_1 \dots i_s}(x) P_{i_1} \dots P_{i_s}, \quad (\text{I.52})$$

а  $\phi^{i_1 \dots i_s}(x)$  -  $s$ -валентные полностью симметричные контрвариантные тензоры в конфигурационном пространстве  $X$ .

Вычислим производную Картана от функции (I.51):

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(\eta) = \sum_s \frac{\partial \Psi}{\partial \phi_s} \tilde{\nabla}_i \phi_s(\eta). \quad (\text{I.53})$$

Используя (I.50), найдем:

$$\tilde{\nabla}_i \phi_s(\eta) = \phi^{i_1 \dots i_s}_{,i} P_{i_1} \dots P_{i_s}. \quad (\text{I.54})$$

Таким образом, получим следующее символическое правило вычисления производной Картана от скаляра  $\Psi$  [17], [55], [56]:

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(x, P) = \nabla_i [[\Psi(x)], P], \quad (\text{I.55})$$

которое означает, что для вычисления производной Картана от функции  $\Psi(x, P)$  достаточно вычислить от нее ковариантную производную по Риччи так, как если бы вектор импульса был ковариантно постоянным.

Поскольку любой тензор в фазовом пространстве может иметь лишь структуры вида  $a_{i_1 \dots i_k} \Psi(x, P)$  (где  $\phi(x)$  - тензор в конфигурационном пространстве, а  $\Psi$  - скаляр), либо  $P_{i_1} \dots P_{i_k} \Psi(x, P)$ , либо комбинацию таких структур, то правило вычисления производной Картана (I.55) распространяется и на любое тензорное поле  $\Psi(\eta)$  [17].

Аналогично (I.49) и (I.50) можно ввести и производные Картана в расслоении  $\Gamma^-$ . Используя связь (I.22), получим связь между этими операторами:

$$\tilde{\nabla}_i = \tilde{\nabla}_i^{(-)} - \frac{eA_{j,i}}{1 + \frac{q\Phi}{m}} \frac{\partial}{\partial p_j} + \partial_i \ln \left| 1 + \frac{q\Phi}{m} \right| p_j \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad (\text{I.56})$$

причем теперь:

$$\tilde{\nabla}_i^{(-)} p_j = 0. \quad (\text{I.57})$$

В отсутствие векторных и скалярных полей  $P_i = p_i$ , и расслоения  $\Gamma$  и  $\Gamma^-$  совпадают; вместе с тем в этом случае совпадают и соответствующие производные Картана.

Наряду с этими производными можно ввести и производную Картана в расслоении  $\Gamma^+$ , как она и была впервые введена в статистику А.А.Власовым [8]:

$$\tilde{\nabla}_i^{(+)} = \nabla_i - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial p^k}, \quad (\text{I.58})$$

причем:

$$\tilde{\nabla}_i^{(+)} p^k = 0. \quad (\text{I.59})$$

С помощью оператора  $\tilde{\nabla}_i$  каноническим уравнениям движения (I.12) и скобкам Пуассона (I.13) можно придать явно ковариантные формы, пригодные и для вычисления производных вдоль фазовых траекторий и от тензорных динамических функций [17], [18]:

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}; \quad \frac{DP_i}{ds} = - \tilde{\nabla}_i \mathcal{H}; \quad (\text{I.60})$$

$$[\mathcal{H}, \Psi] = \tilde{\nabla}_i \Psi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} - \tilde{\nabla}_i \mathcal{H} \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}. \quad (\text{I.61})$$

С учетом равенства вторых смешанных производных функции Гамильтона соотношение (I.61) может быть также записано в форме [51]:

$$[\mathcal{H}, \Psi] = \tilde{\nabla}_i \left( \Psi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \right) - \frac{\partial}{\partial P_i} \left( \Psi \tilde{\nabla}_i \mathcal{H} \right). \quad (\text{I.62})$$

Благодаря явной ковариантности выражений (I.61), (I.62) скобки Пуассона наследуют все тензорные свойства динамических функций.

### 1.3. Релятивистское фазовое пространство

#### 1.3.4 Локальные преобразования Лоренца в слое

В ряде приложений требуется записать бесстолкновительные кинетические уравнения в системе отсчета, ассоциированной с времениподобным единичным векторным полем  $v_i(x)$  ( $(v, v) = 1$ , касательным к мировой трубке наблюдателей:  $x^i = x^i(\tau')$ ). При этом, однако, требуется сохранить координатную систему  $\{x^i\}$  и связанные с ней тензорные поля. Таким образом, речь идет о выборе в пучке импульсов  $P(X)$  другого базиса, векторы которого неколлинеарны смещениям  $dx^i$  в римановой базе. Эта операция выбора нового базиса в  $P(X)$  осуществляется локальными преобразованиями Лоренца в слое:

$$p'^i = \Omega(x)'_k{}^i p^k, \quad (I.63)$$

где  $\Omega_k'^i$  - тензор в  $X_4$ , являющийся псевдоортогональной матрицей перехода (см., например, [57]) в слое  $P(X)$ :

$$\Omega_k'^i \Omega_l'^j g_{i'j'} = g_{kl}; \quad \Omega_k'^i \Omega_l'^j g^{kl} = g^{i'j'}, \quad (I.64)$$

причем матрицы  $\|g_{ij}\|$  и  $\|g_{i'j'}\|$  совпадают, так мы лишь меняем базис в  $P(X)$ , не изменяя координат точки базы  $X$ . Таким образом, имеет место соотношение:

$$g_{i'k'} = g_{ik}, \quad \text{if } i' = i, k' = k. \quad (I.65)$$

Таким образом в этой секции во избежании путаницы мы будем обозначать величины, претерпевшие локальные преобразования Лоренца, символами:

$$A'^i = \Omega_k'^i A^k,$$

согласно (I.63). Величины же, не подвергающиеся преобразованиям Лоренца, в нужных местах будем просто снабжать штрихованными индексами согласно (I.65).

Вследствие псевдоортогональности матрицы перехода имеют место соотношения:

$$\det \left\| \Omega_k'^i \right\| = \det \left\| \Omega_l^k \right\| = 1. \quad (I.66)$$

Запишем также формулы локальных преобразований Лоренца для обобщенного импульса:

$$P'_{i'} = \Omega_{i'}^j P_j, \quad (I.67)$$

где  $\Omega_{i'}^j$  - обратная матрица перехода. Так как  $\Omega_k'^i$  - псевдоортогональная матрица, то имеет место соотношение:

$$\Omega_{i'}^j = g^{jm} g_{k'l'} \Omega_m^l. \quad (I.68)$$

Заметим, что вследствие псевдоортогональности матрицы перехода имеет место соотношение:

$$(p, p) = m^2 \rightarrow (p', p') = m^2. \quad (I.69)$$

Производя локальные преобразования Лоренца в функции Гамильтона (I.20), приведем последнюю к виду:

$$\mathcal{H}(x, P) = \frac{1}{2} \left[ \frac{g^{ik} (\Omega_i'^j P_{j'} - eA_i) (\Omega_k'^l P_{l'} - eA_k)}{1 + q\Phi/m} - mq\Phi \right] = \frac{1}{2} m^2. \quad (I.70)$$

Глава I. Формализм кинетической теории

С учетом псевдоортогональности матрицы перехода (I.70) можно записать в виде, аналогичном (I.20):

$$\mathcal{H}'(x, P') = \frac{1}{2} \left[ \frac{g^{ik}(P'_i - eA'_i)(P'_k - eA'_k)}{1 + q\Phi/m} - mq\Phi \right], \quad (\text{I.71})$$

где введено:

$$A'_k(x) = g_{kj}\Omega_i'^j A^i(x). \quad (\text{I.72})$$

Таким образом, в конечном итоге функция Гамильтона принимает свой первоначальный вид, если данным локальным преобразованиям Лоренца подвергнуть и векторный потенциал.

Используя явно ковариантную форму записи скобки Пуассона (I.62), преобразуем ее к неканонической паре переменных  $\{x^i, P'_i\}$ . Вычисляя, найдем:

$$\left( \frac{\partial P'_k}{\partial x^i} \right)_P = P'_m \Omega_i'^m \partial_i \Omega_k^i; \quad (\text{I.73})$$

$$\frac{\partial P'_k}{\partial P_j} = \Omega_k^j. \quad (\text{I.74})$$

Проводя громоздкие, но несложные выкладки, можно получить соотношение:

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(x, P) = \tilde{\nabla}'_i \Psi(x, P') + \Omega_j^i \nabla_i \Omega_k^j P'_l \frac{\partial}{\partial P'_k}, \quad (\text{I.75})$$

где введена производная Картана по отношению к Лоренц-образу обобщенного импульса:

$$\tilde{\nabla}'_i = \nabla_i + \Gamma_{ik}^j P'_j \frac{\partial}{\partial P'_k}. \quad (\text{I.76})$$

Используя ковариантную форму записи скобки Пуассона (I.62) и соотношения (I.73) — (I.76), получим:

$$[\mathcal{H}, \Psi] = \Omega_l^i \left( \tilde{\nabla}'_i \Psi' \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P'_l} - \tilde{\nabla}'_i \frac{\partial \Psi'}{\partial P'_l} \right) + \Omega_j^m (\Omega_l^i \nabla_i \Omega_k^j - \Omega_k^i \nabla_i \Omega_l^j) P'_m \frac{\partial \Psi'}{\partial P'_k} \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P'_l}. \quad (\text{I.77})$$

Учитывая дифференциальное следствие псевдоортогональности матрицы перехода:

$$\nabla_i (\Omega_j^m \Omega_k^j) = 0, \quad (\text{I.78})$$

запишем (I.77) в более компактной форме:

$$[\mathcal{H}, \Psi] = \Omega_l^i \left( \tilde{\nabla}'_i \Psi' \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P'_l} - \tilde{\nabla}'_i \frac{\partial \Psi'}{\partial P'_l} \right) + \nabla_i \Omega_j^m (\Omega_k^i \Omega_l^j - \Omega_l^i \Omega_k^j) P'_m \frac{\partial \Psi'}{\partial P'_k} \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P'_l}. \quad (\text{I.79})$$

### 1.3. Релятивистское фазовое пространство

Перейдем теперь к установлению явного вида матрицы лоренцевского преобразования,  $\Omega_k^i$ . В наиболее полном виде преобразования Лоренца приведены в книге Фока [58] - переход в систему отсчета, движущуюся относительно данной с *четырёхмерной* скоростью  $v_i$ , описывается матрицей перехода:

$$\begin{aligned} \Omega_i^4 &= v_i; & \Omega_4^i &= v_i; \\ \Omega_\beta^\alpha &= \delta_\beta^\alpha - \frac{v^\alpha v_\beta}{v_4 + 1}. \end{aligned} \tag{I.80}$$

Обратная матрица  $\Omega_k^i$  получается транспонированием соответствующей матрицы перехода с последующими операциями поднятия и опускания индексов:

$$\Omega_k^i = \Omega_m^{j'} g_{j'k'} g^{mi}.$$

Для того, чтобы представить преобразования Лоренца в явно ковариантном виде, введем исходную систему отсчета, ассоциированную с единичным времениподобным векторным полем  $u^i(x)$ , касательным к линиям времени  $\tau$ , так что:

$$u^i \stackrel{*}{=} (0, 0, 0, u^4); \quad (u, u) = 1. \tag{I.81}$$

Введем оператор ортогонального проектирования на векторное поле  $u^i$ :

$$\mathcal{P}_k^i(u) = \delta_k^i - u^i u_k. \tag{I.82}$$

Очевидно, что если  $W^i$  - произвольный вектор, то в системе отсчета (I.81) имеют место соотношения:

$$\mathcal{P}_k^4(u) W^k \stackrel{*}{=} 0; \quad \mathcal{P}_k^\alpha(u) W^k \stackrel{*}{=} W^\alpha.$$

Таким образом, мы можем записать:

$$\Omega_k^i = u^{i'} v_k - \mathcal{P}_j^{i'}(u) v^j u_k + \mathcal{P}_l^{i'}(u) \mathcal{P}_k^m(u) \left[ \delta_m^l - \frac{v^l v_m}{(u, v) + 1} \right]. \tag{I.83}$$

Проводя необходимые действия, получим окончательно:

$$\Omega_k^i = \delta_k^{i'} - \frac{v^{i'} v_k + u^{i'} u_k + v^{i'} u_k}{(u, v) + 1} + u^{i'} v_k \left[ 1 + \frac{(u, v)}{(u, v) + 1} \right]. \tag{I.84}$$

Отметим, что вследствие псевдоортогональности матрицы лоренцевых преобразований:

$$\det \left\| \Omega_k^i \right\| = 1, \tag{I.85}$$

поэтому преобразования слоя типа (I.63) не изменяют фазового объема системы.

### I.3.5 Интегральные операции в фазовом пространстве

Вследствие структуры фазового пространства операция интегрирования по фазовому объему скалярной динамической функции  $\Psi(\eta) \equiv \Psi(x, P)$  должна пониматься как косое интегрирование в расслоении  $\Gamma$ :

$$\int_{\Gamma} \Psi(\eta) d\Gamma = \int_X dX \int_{P(x)} dP \Psi(x, P). \quad (I.86)$$

Операция, перестановочная по отношению к (I.86):

$$\int_{P(x)} dP \int_X dX \Psi(x, P) \quad (I.87)$$

в произвольных римановых пространствах и произвольных координатах лишена смысла, поскольку пучок импульсов  $P(x)$  приложен к точке  $x$  конфигурационного пространства, и преобразования координат (I.33) - (I.34) определены именно в этой точке. Переход от некоторой точки  $x$  конфигурационного пространства к некоторой другой точке  $x'$  сопровождается вращением импульсного пространства, причем относительный поворот векторов импульса определяется не только координатами  $x, x'$ , но и формой линии, вдоль которой переносится касательное пространство. В результате (I.87) становится неоднозначной операцией.

В ряде приложений, тем не менее, требуется произвести перестановку интегралов в (I.86). В таких случаях необходимо зафиксировать биекцию, которая бы устанавливала взаимно - однозначное соответствие между импульсами, приложенными к различным точкам конфигурационного пространства. Одной из наиболее удобных форм указанной биекции является параллельный перенос импульсного пространства вдоль геодезических, соединяющих две точки конфигурационного пространства.

Выясним, тем не менее, в каких случаях в интеграле (I.86) можно изменять порядок интегрирования без дополнительных оговорок. Для того, чтобы операция (I.87) была определена однозначно, необходимо, чтобы вектор импульса  $P_i$  переносился параллельно вдоль любой кривой  $x^i = x^i(v)$  в  $X_4$ , т.е., (см., например, [42]):

$$\frac{DP_i}{dv} \equiv P_{i,j} \frac{dx^j}{dv} = 0.$$

Поскольку результат перенесения не должен зависеть от кривой, вектор  $P_i$  должен быть ковариантно постоянным. Но тогда вследствие независимости конфигурационных и импульсных координат должны выполняться условия:

$$\Gamma_{ij}^k P_k = 0,$$

т.е., вследствие произвольности импульса во всем  $X_4$  должно быть:

$$\Gamma_{ij}^k = 0.$$

Таким образом, операция (I.87) определена однозначно лишь в декартовых координатах плоского пространства.

#### I.4. Инвариантная функция распределения

Введем в рассмотрение тензорное поле в конфигурационном пространстве:

$$\Psi^{i_1 i_2 \dots i_s}(x) = \int_{P(x)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{i_1}} \dots \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{i_s}} dP, \quad (I.88)$$

которое назовем  $s$ -м моментом относительно динамического скаляра  $\Psi(x, P)$ . Интегрирование в (I.88) проводится по бесконечному четырехмерному параллелепипеду. Вследствие (I.55) выполняется интегральное соотношение [56]:

$$\int_{P(x)} p^{i_1} \dots p^{i_s} \overset{\sim}{\nabla}_i^+ \Psi(x, P) dP = \nabla_i \Psi^{i_1 \dots i_s}(x), \quad (I.89)$$

где производная Картана определена по отношению к кинематическому импульсу.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{P(x)} [\mathcal{H}, \Psi] dP, \quad (I.90)$$

где  $\Psi(x, P)$  - произвольная тензорная динамическая функция. Используя представление (I.62) скобок Пуассона и интегрируя по частям, получим:

$$\int_{P(x)} [\mathcal{H}, \Psi] dP = \nabla_i \int_{P(x)} p^i \Psi(x, P) dP - \int_{\mathcal{P}_\infty} dP^i \Psi \overset{\sim}{\nabla}_i \mathcal{H}. \quad (I.91)$$

где  $\mathcal{P}_\infty$  - гиперповерхность, охватывающая импульсное пространство. Налагая на функцию  $\Psi(x, P)$  условие:

$$\Psi(x, P)|_{\mathcal{P}_\infty} = 0, \quad (I.92)$$

получим важное интегральное соотношение [51]:

$$\int_{P(x)} [\mathcal{H}, \Psi] dP = \nabla_i \int_{P(x)} p^i \Psi(x, P) dP. \quad (I.93)$$

## I.4 Инвариантная функция распределения

### I.4.1 Введение функции распределения

Введение инвариантной функции распределения в 8-ми мерном фазовом расслоении с римановой базой не является такой очевидной операцией, как это может показаться на первый взгляд. Во - первых, классическая функция распределения тождественных частиц определена на 6 - мерном фазовом пространстве:  $\dim X = \dim P = 3$ , причем интеграл от этой функции по всему фазовому пространству равен полному числу частиц *в каждый момент времени*. Интегрирование этой величины по времени дало бы бесконечность.

Во - вторых, время в классической физике является абсолютным, поэтому определение полного числа частиц является однозначной операцией.

И, наконец, в - третьих, собственное время релятивистской частицы может быть лишь скрытым параметром статистической системы, поскольку, определяя статистические средние в окрестности какой - либо мировой линии  $X_4$ , макроскопический наблюдатель имеет возможность измерять лишь координаты, импульсы частиц и плотности вероятности, но не имеет возможность измерять собственное время каждой частицы.

Конечно, можно отказаться от попыток сохранить в релятивистской статистике классический смысл функции распределения и определить статистические средние интегрированием некоторой инвариантной функции по четырехмерному конфигурационному пространству. Для этого есть серьезные основания. Как мы отмечали в разделе I.1, каждое физическое измерение характеризуется некоторым четырехмерным объемом  $\Delta\Omega$  конфигурационного пространства и соответствующим объемом импульсного пространства  $\Delta P$ , т.е., в конечном итоге, некоторым объемом  $\Delta\Gamma$  8 - мерного фазового пространства. Элемент объема  $\Delta\Gamma$  и определяет точность измерения динамического состояния статистической системы данным прибором. Строго говоря, измерение плотности числа частиц в каком либо состоянии возможно лишь для консервативных систем при условии их стационарности. Если система неконсервативна, то частицы пересекают фазовые границы прибора, и точное определение числа частиц в приборе невозможно.

В классической статистике скорость света бесконечна<sup>2</sup>, поэтому становится принципиально возможным выбор столь малого временного интервала измерения  $\Delta t$ , в течение которого перенос динамических величин через фазовые границы прибора пренебрежимо мал. Релятивизм кардинально изменяет эту ситуацию. Если частицы в статистической системе движутся с околосветовыми скоростями, то для того, чтобы пренебречь их движением через фазовые границы прибора, линейные размеры прибора должны быть гораздо больше длины пути, пробегаемого ультрарелятивистской частицей за время измерения  $\Delta t$ . Однако, это условие противоречит условию (I.6) времениподобности акта измерения. Поэтому прямое измерение плотности числа релятивистских частиц становится невозможным и, следовательно, эта величина не является наблюдаемой в релятивистской статистике. Она лишь условно наблюдаема в достаточно однородных статистических системах, когда потоки частиц уходящих и входящих через фазовые границы прибора взаимно скомпенсированы в среднем.

Вместо плотности состояний экспериментаторы фактически измеряют фазовые плотности потоков релятивистских частиц. Рассмотрим типичный для спектроскопии быстрых частиц пример, когда распределение  $\gamma$  - квантов исследуется сцинтилляционным счетчиком. Преобразованные монокристаллом поваренной соли в световые вспышки различной интенсивности и усиленные фотоэлектронным умножителем сигналы от  $\gamma$  - квантов анализируются затем на N - канальном анализаторе импульсов. Рабочее тело сцинтиллятора имеет вполне определенный объем, продиктованный величиной энергии регистрируемых  $\gamma$  - квантов: с увеличением энергии последних должен увеличиваться и объем сцинтиллятора вследствие увеличения пробега фотонов. Этот объем,  $\Delta V$  и является трехмерным объемом прибора. При этом, однако, каждый детектор характеризуется конечным временем разрешения,  $\Delta t = \tau$ , внутри которого он не может разделить два разных события и

---

<sup>2</sup>Точнее, средние скорости частиц малы по сравнению со скоростью света.

#### 1.4. Инвариантная функция распределения

воспринимает их как одно. Каждый данный счетчик чувствителен к  $\gamma$  - квантам в определенном диапазоне энергий:  $[E_i, E_i + \Delta E]$ . Для изотропного детектора величина  $\frac{4}{3}\pi(\Delta E)^3$  является импульсным объемом прибора. Импульсный же объем одного акта измерения определяется числом каналов анализатора, т.е., величиной  $\frac{4}{3}\pi(\Delta E)^3/N$ .

При небольших временах измерения,  $\Delta t = t$ , число отсчетов в различных каналах анализатора еще слишком мало и статистический разброс слишком велик. Чтобы достаточно точно восстановить спектр  $\gamma$  - квантов, экспериментатор вынужден увеличивать время измерения. Во многих спектроскопических экспериментах типа ЯГР измерения длятся сутками, а иногда и месяцами. При условии стационарности потока  $\gamma$  - квантов число отсчетов в каналах анализатора будет расти в среднем линейно со временем, вместе с тем статистические ошибки будут падать пропорционально  $1/\sqrt{t}$ . В типичных спектроскопических измерениях стационарность потока частиц обеспечивается стационарностью известного источника излучения и стационарностью внешних условий.

Если линейные размеры детектора гораздо больше длины пробега  $\gamma$  - квантов в веществе сцинтиллятора, число регистрируемых  $\gamma$  - квантов будет прямо пропорционально площади поверхности последнего. Таким образом, для получения объективной характеристики потока  $\gamma$  - квантов экспериментатор *вынужден* поделить число отсчетов в канале анализатора на ширину канала  $\Delta E/N$ , телесный угол “зрения детектора” (в рассматриваемом примере —  $4\pi$ ), площадь поверхности сцинтиллятора,  $\Delta S$ , и время измерения  $t$ . В результате он получит величину, называемую плотностью потока: число частиц / (эрг стерадиан см<sup>2</sup> с), делением которой на скорость  $\gamma$  - квантов наблюдатель восстановит функцию распределения последних. Из рассмотренного примера уже видно, что функция распределения в релятивистской статистике является вторичным понятием, первичным же понятием становится фазовая плотность потока частиц.

Развитие физики элементарных частиц, астрофизики и космологии приводит к необходимости регистрации ультрарелятивистских слабовазаимодействующих частиц: нейтрино, гравитонов, гравитино и т.п. Увеличение энергии ускорителей вследствие восстановления скейлинга<sup>3</sup> в области сверхвысоких энергий также приводит к необходимости детектирования слабовазаимодействующих частиц. В этих условиях становится принципиально невозможным создание детекторов с линейными размерами сколь - нибудь сравнимыми с длиной пробега частиц. В лучших случаях возможно построение детекторов с линейными размерами на 8 — 10 порядков меньших длины пробега регистрируемых величин. В этом случае число регистрируемых детектором частиц становится пропорциональным рабочему объему детектора, и для определения объективных характеристик распределения частиц экспериментатор *вынужден* относить число отсчетов в канале анализатора не к рабочей площади детектора, а к объему последнего. В результате он *вынужден* вводить в обиход новые величины, имеющие размерность: число частиц / (эрг стерадиан см<sup>3</sup> с). Таким образом, развитие физики высоких энергий приводит к необходимости введения наблюдаемых четырехмерных плотностей динамических величин. Введение таких плотностей могло бы превратить релятивистскую статистику в теорию, инвариантную на всех этапах вычислений.

В данной монографии мы, однако, будем рассматривать кинетическую теорию, основанную на обычной вероятностной трактовке функции распределения. Относительный

---

<sup>3</sup>Масштабной инвариантности взаимодействий.

Глава I. Формализм кинетической теории

характер времени приводит к необходимости введения поля наблюдателей для сохранения классического смысла вероятности. Введем в  $X_4$  поле наблюдателей, ассоциированных с единичным времениподобным вектором  $u^i(x)$ :

$$(u, u) = 1, \quad (I.94)$$

по часам которых будем производить измерения. Для синхронизации часов наблюдателей необходима геодезичность поля  $u^i(x)$ :

$$\frac{Du^i}{d\tau} = 0, \quad (I.95)$$

где  $\tau$  - синхронизованное собственное время наблюдателей, к мировым линиям которых касателено векторное поле  $u^i(x)$ . Гиперповерхность  $\tau = \text{Const}$ , ортогональная полю наблюдателей  $u^i(x)$ :

$$u_i dx^i = 0, \quad (I.96)$$

является пространственноподобной (Рис. 2). В дальнейшем будем обозначать эту гиперповерхность символом  $V$ ; векторный элемент ее площади равен:

$$d\Sigma_i = u_i dV, \quad (I.97)$$

где  $dV$  инвариантный элемент объема на  $V$ :

$$dV = \sqrt{-\tilde{g}} d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge d\tilde{x}^3, \quad (I.98)$$

а  $\tilde{x}^\alpha$  ( $\alpha = \overline{1,3}$ ) - внутренние координаты гиперповерхности  $V$ .

Пусть теперь  $p^i(s) = dx^i/ds$  - кинематический импульс релятивистской частицы. Из локальных преобразований Лоренца нетрудно получить связь между синхронным временем  $\tau$  и собственным временем  $s$  частицы:

$$\frac{d\tau}{ds} = (u(\tau), p(s)), \quad (I.99)$$

разрешая которую как дифференциальное уравнение при заданных  $u^i(\tau)$  и  $p^i(s)$ , найдем:

$$s = s^*(\tau). \quad (I.100)$$

Определим инвариантную функцию распределения тождественных частиц  $F(x, P)$  следующим образом [51]:

$$F(x, P)\delta[s - s^*(\tau)]d\Gamma = \boxed{\text{Количество частиц в области } d\Gamma \text{ с центром в точке } \{x, P\} \text{ на гиперповерхности } \tau = \text{Const}.} \quad (I.101)$$

Согласно (I.101) полное число тождественных частиц на гиперповерхности  $V$  равно:

$$N(\tau) = \int_{\Gamma} \delta[s - s^*(\tau)]F(\eta)d\Gamma; \quad (I.102)$$

интегрирование в (I.102) распространяется на все фазовое пространство.

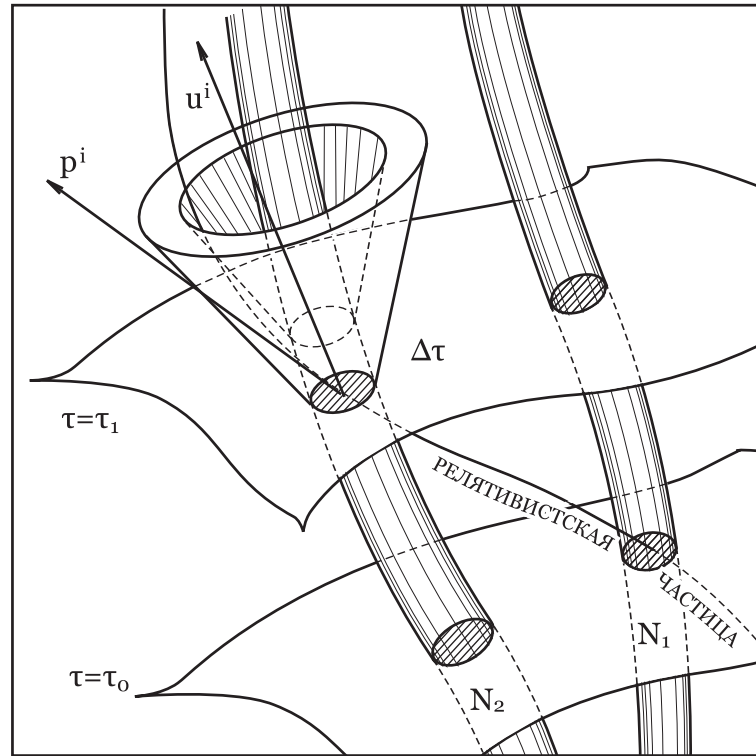
Определенные таким образом статистические средние не зависят от выбора системы координат, однако, зависят от выбора гиперповерхности  $V$ , задаваемой полем наблюдателей  $u^i$ , т.е., зависят от выбора системы отсчета [51].

I.4. Инвариантная функция распределения

I.4.2 Статистические средние от динамических функций

Введем статистическое среднее от скалярной функции динамических переменных  $\psi(\eta)$ :

$$\Psi(\tau) = \int_{\Gamma} \delta[s - s^*(\tau)] F(\eta) \psi(\eta) d\Gamma. \quad (I.103)$$



**Рис. 2.** На рисунке показаны геодезические трубки двух синхронных наблюдателей, ассоциированных с геодезическим полем  $u^i(x)$ , касательным в каждой точке к линиям времени. Пространственноподобная гиперповерхность  $\tau = \text{Const}$  является трехмерным пространством; сечение этой поверхности геодезической трубкой есть тело макроскопического прибора. Траектория релятивистской частицы в момент синхронного времени  $\tau_0$  пересекает геодезическую трубку наблюдателя  $N_1$  и в момент времени  $\tau_1$  - трубку наблюдателя  $N_2$ . Этим моментам синхронного времени отвечает регистрация частицы наблюдателями  $N_1$  и  $N_2$ , соответственно. На рисунке показана также неопределенность времени регистрации частицы  $\Delta\tau$ , вызванная конечностью объема макроскопического прибора. Макроскопичность же прибора означает, что каждое его сечение  $\tau = \text{Const}$  пронизано большим количеством линий частиц.

Глава I. Формализм кинетической теории

Используя связь (I.99) и свойства  $\delta$  - функции:

$$\delta[s - s^*(\tau)] = \frac{\delta(\tau - \tau_*)}{\left| \frac{ds^*}{d\tau} \right|} = \delta(\tau - \tau_*) |(u, p)|, \quad (\text{I.104})$$

где  $\tau_*$  - синхронное по полю  $U^i$  время частицы. Производя интегрирование в (I.103) по координатному времени частицы  $\tau_* = x^4$ , получим:

$$\Psi(\tau) = \int_V dV \int_{P(V)} |(u, p)| F(\tilde{x}, \tau, P) \psi(\tilde{x}, \tau, P) dP. \quad (\text{I.105})$$

Формулу (I.105) можно непосредственно получить и проведя интегрирование по собственному времени частицы  $s$ ; при этом вследствие (I.99):

$$dX = |(u, p)| dV ds. \quad (\text{I.106})$$

Вследствие (I.16) и (I.17) функция распределения частиц с фиксированной массой покоя  $m$  должна иметь вид:

$$F(x, P) = f(x, P) \delta \left( \mathcal{H} - \frac{1}{2} m^2 \right), \quad (\text{I.107})$$

где  $f(x, P)$  - функция, несингулярная на массовой поверхности (I.17). В результате интеграл (I.105) распадается на два:

$$\Psi(\tau) = \sum_{\pm} \int_V dV \int_{P_{\pm}} f_{\pm}(x, P) \psi_{\pm}(x, P) |(u, p)| dP_{\pm}, \quad (\text{I.108})$$

где:

$$dP_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3}{\left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_4} \right|_{P_{\pm}}} \equiv \sqrt{-g} \frac{dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3}{|p_4^{\pm}|} \left( 1 + \frac{q\Phi}{m} \right)^3; \quad (\text{I.109})$$

$P_{\pm}$  - корни уравнения (I.17);  $f_{\pm}$  - функции, определенные на соответствующих псевдосферах. Вследствие инвариантности  $dP$  и  $\delta$  - функции в (I.105) элементы объема на псевдосферах  $dP_{\pm}$  также являются инвариантными. В полугеодезической системе координат, в которой собственное время наблюдателей,  $\tau$ , совпадает с линиями времени ( $u^i = \delta_4^i$ ), формула (I.108) принимает вид:

$$\Psi(\tau) = \sum_{\pm} \int_V d^3 \tilde{x} \int_{P(V)} d^3 P_{\pm} f_{\pm}(x, P) \psi_{\pm}(x, P). \quad (\text{I.110})$$

В этой системе координат смысл функций  $f_{\pm}$  совпадает с классическим.

#### 1.4. Инвариантная функция распределения

### 1.4.3 Плотности потоков динамических функций

Из (I.105) видно, что если состояния всех частиц определены лишь на верхней псевдосфере, т.е.:

$$(u, p) \geq 0, \quad (\text{I.111})$$

то каждой тензорной динамической функции  $\psi(x, P)$  может быть поставлена в соответствие *макроскопическая плотность потока*:

$$\Psi^i(x) = \int_{P(X)} F(x, P) \psi(x, P) p^i dP. \quad (\text{I.112})$$

Полагая  $\psi = 1$ , получим *вектор плотности числа частиц*<sup>4</sup>:

$$n^i(x) = \int_{P(X)} F(x, P) p^i dP, \quad (\text{I.113})$$

причем:

$$N(\tau) = \int_V (n, u) dV \quad (\text{I.114})$$

есть полное число частиц на гиперповерхности  $V$ . Полагая

$$\psi = P^i - eA^i \equiv \left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right) p^i, \quad (\text{I.115})$$

получим *тензор энергии - импульса (ТЭИ) частиц*:

$$T^{ik}{}^p(x) = \left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right) \int_{P(X)} F(x, P) p^i p^k dP. \quad (\text{I.116})$$

Рассмотрим теперь некоторую произвольную, но односвязную область фазового пространства  $G \subset \Gamma$  и определим неполное статистическое среднее на этой области в соответствии с (I.101) и (I.103):

$$\Psi_G(\tau) = \int_G F(\eta) \psi(\eta) \delta[s - s^*(\tau)] d\Gamma. \quad (\text{I.117})$$

Очевидно, что  $\Psi_G(\tau)$  отлично от нуля лишь в том случае, если частица пересекает гиперповерхность  $\tau = \text{Const}$ , находясь внутри  $G$ . Предполагая это условие выполненным, вычислим производную по времени  $\tau$  от обеих частей равенства (I.117):

$$\frac{d\Psi_G}{d\tau} = \int_G \frac{d}{d\tau} \delta[s - s^*(\tau)] F(\eta) \psi(\eta) d\Gamma.$$

---

<sup>4</sup>Или числовой вектор по Сингу [42].

## Глава I. Формализм кинетической теории

Используя правило дифференцирования  $\delta$ -функции, получим:

$$\frac{d\Psi_G}{d\tau} = \int_G \frac{ds^*}{d\tau} \delta[s - s^*(\tau)] \frac{d}{ds} [F(\eta)\psi(\eta)d\Gamma] .$$

Однако, вследствие теоремы Лиувилля (I.47)  $d\Gamma/ds = 0$ , а полная производная от динамической функции выражается с помощью скобки Пуассона (I.13). Используя соотношение (I.99) и интегрируя по каноническому параметру  $s$ , найдем окончательно:

$$\frac{d\Psi_G}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P'} dP [\mathcal{H}, \psi F] , \quad (\text{I.118})$$

где  $V' \subset V$ ,  $P' \subset P(X)$ ;  $P' \times V' = G$ .

Поскольку соотношение (I.118) справедливо для любых односвязных областей, оно остается справедливым и для *полных статистических средних*, т.е., в предельном переходе  $G \rightarrow \Gamma$ :

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \int_V dV \int_{P(X)} dP [\mathcal{H}, \psi F] . \quad (\text{I.119})$$

Предполагая, что функция  $\psi F$  удовлетворяет условию (I.92):

$$[\psi(x, P)F(x, P)]|_{\mathcal{P}_\infty} = 0 , \quad (\text{I.120})$$

с помощью (I.93) перепишем (I.119) в более удобной форме:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \int_V dV \nabla_i \int_{P(X)} dP \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \psi F . \quad (\text{I.121})$$

## I.5 Инвариантная микроскопическая фазовая плотность

### I.5.1 Микроскопическая фазовая плотность тождественных частиц

Процедура введения функции распределения тождественных частиц по правилу (I.101) требует некоторых пояснений, уточняющих ее смысл. Как мы отмечали в разделе I.4, введенная нами функция распределения (I.101) является существенно макроскопической величиной. Как же происходит переход от микроскопических фазовых траекторий частиц (I.12) к их макроскопическому распределению? Как происходит перенос динамических величин, определенных на точечных объектах (частицах), на непрерывное многообразие? Как и всегда в подобных случаях такой перенос осуществляется с помощью  $\delta$ -функции.

### I.5. Микроскопическая фазовая плотность

Введем инвариантные микроскопические фазовые плотности системы, состоящей из  $N_A$  тождественных частиц (см., например, [59], [41]) :

$$\mathcal{N}_A(\eta) = \sum_{\alpha=1}^{N_A} \int \delta[\eta; \underset{(A)}{\eta}^{(\alpha)}(s_\alpha)] ds_\alpha, \quad (\text{I.122})$$

где интегрирование проводится по всей фазовой траектории каждой  $\alpha$ -той частицы. Во избежании путаницы с индексами в дальнейшем договоримся об обозначениях частиц. Произвольную частицу в дальнейшем будем обозначать:  $\underset{(A)}{a}^{(\alpha)}$ , где  $\alpha = \overline{1, N}$  - номер частицы,  $A = \overline{1, n}$  - индекс сорта частицы (бухгалтерский индекс). Когда записываются конкретные реакции, индекс сорта опускается, и вместо, например,  $\underset{(1)}{a}$  пишется:  $e$  (электрон);  $\underset{(2)}{a}$  пишется:  $p$  (протон) и т.д.. Тогда динамические переменные частицы будем записывать в виде:

$$\underset{(A)}{\eta}^{(\alpha)} = \left\{ \underset{(A)}{x}^{(\alpha)}, \underset{(A)}{p}^{(\alpha)} \right\} \quad (\text{I.123})$$

Во избежании слишком громоздких многоиндексных величин некоторые индексы в дальнейшем будем опускать. Далее в (I.122)  $\delta[\eta; \eta^\alpha(s_\alpha)]$  - симметричная инвариантная 8-мерная  $\delta$ -функция, определенная на фазовом пространстве  $\Gamma^\alpha$  и изоморфном ему  $\Gamma$ , так что:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^\alpha} \psi(\eta^\alpha) \delta[\eta; \eta^\alpha] d\Gamma^\alpha &= \psi(\eta); \\ \int_{\Gamma} \psi(\eta) \delta[\eta; \eta^\alpha] d\Gamma &= \psi(\eta^\alpha). \end{aligned} \quad (\text{I.124})$$

Так как фазовое пространство является расслоением, то и 8-мерная  $\delta$ -функция распадается на произведение двух четырехмерных  $\delta$ -функций:

$$\delta[\eta; \eta^\alpha] = \mathcal{D}(x; x^\alpha) \delta^{(4)}(\mathbf{P} - \mathbf{P}^\alpha), \quad (\text{I.125})$$

так что:

$$\int_{\mathbf{P}(X)} \psi(x, \mathbf{P}) \delta^{(4)}(\mathbf{P} - \mathbf{P}^\alpha) d\mathbf{P} = \psi(x, \mathbf{P}^\alpha), \quad (\text{I.126})$$

где импульс  $\mathbf{P}^\alpha$  теперь уже приложен к точке  $x \in X$ . Далее:

$$\int_X F(x) \mathcal{D}(x; x^\alpha) dX = F(x^\alpha). \quad (\text{I.127})$$

Определенная таким способом 8-мерная  $\delta$ -функция инвариантна по отношению к преобразованиям (I.33) - (I.34) фазового пространства. Релятивистски - инвариантная

Глава I. Формализм кинетической теории

7- мерная  $\delta$  - функция с исключенным собственным временем частицы, определяющая микроскопическую фазовую плотность (I.122):

$$\Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)] ds_\alpha \quad (\text{I.128})$$

и называемая *случайной функцией*, была впервые введена в релятивистскую статистику А. Стратоновичем<sup>5</sup>.

Итак, имеет место соотношение:

$$\mathcal{N}_A(\eta) = \sum_{\alpha=1}^{N_A} \Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha). \quad (\text{I.129})$$

Введем, как это мы делали в разделе I.4, поле наблюдателей в  $X_4$ , ассоциированных с единичным времениподобным вектором  $u^i(x)$ , и пространственноподобную гиперповерхность  $\Sigma(\tau) = V(\tau)$ , ортогональную этому векторному полю, и вычислим интеграл по этой гиперповерхности от случайной функции (I.128). Заметим сначала, что согласно (I.106) и (I.111):

$$dX = dV d\tau, \quad (\text{I.130})$$

где линии  $\tau$  являются касательными к векторному полю  $u^i(x)$ . Поэтому в данной системе отсчета случайная функция (I.128) принимает вид:

$$\Delta(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha) = \frac{1}{(u, p_\alpha(s_\alpha^*))} \delta^{(3)}(\tilde{x}, \tilde{x}_\alpha) \delta^{(4)}(P - P_\alpha(s_\alpha^*)), \quad (\text{I.131})$$

где  $\tilde{x}$  - внутренние координаты гиперповерхности  $V : \tau = \text{Const}$ , а  $s_\alpha^*(\tau)$  - момент собственного времени частицы, соответствующего пересечению ею гиперповерхности  $\tau = \text{Const}$ . Таким образом, в конечном итоге:

$$\tilde{x}_\alpha = \tilde{x}_\alpha(\tau); \quad \tilde{P}_\alpha = \tilde{P}_\alpha(\tau), \quad (\text{I.132})$$

где переменные  $\tilde{\eta}_\alpha(\tau)$  являются решениями канонических уравнений движения (I.12) с последующим исключением канонического параметра:  $s_\alpha = s_\alpha^*(\tau)$ . Момент времени  $\tau$  определяется из решения дифференциального уравнения (I.103).

Действительно, заметим, что канонические уравнения движения частиц (I.12) после исключения канонического параметра  $s$  можно представить в виде уравнений характеристик:

$$\frac{dx^1}{p^1} = \dots = \frac{dx^4}{p^4} = \frac{dP_1}{-\tilde{\nabla}_1 \mathcal{H}} = \dots = \frac{dP_4}{-\tilde{\nabla}_4 \mathcal{H}} \quad (= ds), \quad (\text{I.133})$$

где согласно (I.12):

$$p^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}.$$

---

<sup>5</sup>На этот факт указано в работе Ю.Л. Климонтовича [41], но ссылки на саму работу А. Стратоновича Автору найти не удалось. Ю.Л. Климонтович в ответ на просьбу Автора сообщил, что работа Стратоновича так и не была опубликована.

## I.5. Микроскопическая фазовая плотность

Система уравнений движения (I.133) допускает 7 независимых интегралов:

$$\Phi_r(x, P) = C_r; \quad (r = \overline{0, 6}), \quad (\text{I.134})$$

одним из которых,  $C_0$ , всегда является интеграл массы (I.16) (или (I.19)). При фиксированной массе покоя частиц,  $m$ , система уравнений (I.133) определяет в фазовом пространстве  $\Gamma$  6-параметрическое семейство фазовых траекторий. Разрешая эти уравнения, в системе координат, в которой  $x^4 = \tau$ , относительно времени наблюдателей  $\tau$ , мы получим ( $i = \overline{1, 3}$ ):

$$\left. \begin{aligned} x^i &= x^i(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x}^i \\ P_i &= P_i(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{P}_i \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2}m^2 \rightarrow \tilde{P}_4 \end{aligned} \right\} = \tilde{\eta}(\tau). \quad (\text{I.135})$$

Интегрируя затем любую связь в системе (I.133), мы найдем  $s_*(\tau)$ . Именно в этом смысле и надо понимать соотношение (I.131), а также и аналогичные ему нижеследующие.

### I.5.2 Связь микроскопической фазовой плотности с макроскопической функцией распределения

Заметим, что интегрирование вида (I.127) вместе с фазовыми координатами (I.135), удовлетворяющими каноническим уравнениям движения (I.12) переносит на интегрируемую функцию  $\psi(\eta)$ , измеряемую в точке наблюдения, и все динамические функции частицы и соответствующие связи. Так, например, автоматически переносится соотношение нормировки (I.17), устанавливающее в каждой точке  $x$  связь между четвертой компонентой импульса частицы и остальными его компонентами.

С учетом сделанных замечаний, получим:

$$\int_{V_\alpha} dV_\alpha \int_{P(V_\alpha)} dP_\alpha(u, p) \Delta(\tilde{\eta}; \tilde{\eta}_\alpha) = 1, \quad (\text{I.136})$$

если данная частица в момент времени  $\tau$  находится в области  $V_\alpha$ . В противном случае интеграл (I.136) равен нулю. Мы можем получить и симметричное к (I.136) соотношение:

$$\int_V dV \int_{P(V)} dP(u, p) \Delta(\tilde{\eta}; \tilde{\eta}_\alpha) = 1, \quad (\text{I.137})$$

где интегрирование проводится уже по фазовым координатам прибора.

Проводя интегрирование (I.122) по гиперповерхности фазового пространства наблюдателя  $P \times V(\tau)$  с учетом (I.137), получим:

$$\int_V dV \int_{P(V)} dP(u, p) \mathcal{N}_A(\eta) = N_A(V), \quad (\text{I.138})$$

## Глава I. Формализм кинетической теории

где  $N_A(V)$  - число частиц сорта «A» в объеме прибора  $V(\tau)$ . Пусть теперь  $\Delta V(\tau)$  - малый объем прибора наблюдателя (см. (I.98)), а  $\Delta P(V)$  - малый инвариантный объем импульсного пространства измерения длительностью  $\Delta\tau$ . Таким образом,

$$\Delta\Gamma = \Delta P \cdot \Delta V \cdot \Delta\tau$$

есть фазовый объем измерения. Устремляя в (I.138) фазовый объем к нулю<sup>6</sup>, получим в пределе число частиц в окрестности точки  $\eta \in \Gamma$ :

$$(u, p)\Delta V\Delta P \mathcal{N}_A(\eta) = \Delta N_A(x, P). \quad (\text{I.139})$$

Рассматривая определение (I.132) макроскопической функции распределения  $F(x, P)$  в малой, но конечной области фазового пространства и проводя в этой области интегрирование  $\delta$ -функции, преобразуем его к форме, эквивалентной (I.139):

$$(u, p)\Delta V\Delta P F_A(x, P) = \Delta N_A(x, P). \quad (\text{I.140})$$

Сравнивая (I.139) и (I.140), найдем связь между микроскопической фазовой плотностью тождественных частиц и макроскопической функцией распределения тождественных частиц сорта «A»:

$$\Delta V\Delta P_A F(\eta(\tau)) = \Delta V\Delta P \mathcal{N}_A(\eta(\tau)). \quad (\text{I.141})$$

Следует особо подчеркнуть, что соотношение (I.141) имеет смысл лишь для конечных фазовых объемов, содержащих достаточно большое число частиц данного сорта:  $N_A \gg 1$ .

Таким образом, *макроскопическая функция распределения есть среднее значение микроскопической фазовой плотности по малому, но конечному объему фазового пространства.*

Заметим, что при такой операции пропадает вся информация о номере частицы и остается лишь информация о сорте частицы, определяемым массой, зарядами, спином и т.п.

### I.5.3 Микроскопические фазовые плотности динамических функций

Пусть далее

$$\psi \left[ \underset{(A)}{\eta} (s_\alpha) \right] \equiv \psi \left[ \underset{(A)}{x} (s_\alpha), \underset{(A)}{P} (s_\alpha) \right]$$

- функция динамических переменных  $\alpha$  - той частицы. Аналогично (I.122) введем *микроскопическую фазовую плотность динамической функции тождественных частиц*,  $\psi : \underset{(A)}{\eta}$

$$\Psi_A(\eta) = \sum_{\alpha=1}^{N_A} \int \psi \left[ \underset{(A)}{\eta} (s_\alpha) \right] \delta \left[ \eta; \underset{(A)}{\eta} (s_\alpha) \right] ds_\alpha. \quad (\text{I.142})$$

<sup>6</sup>Не забывая при этом о нижнем ограничении (I.5).

### I.5. Микроскопическая фазовая плотность

Вследствие (I.126), (I.127) и свойств инвариантной случайной функции  $\Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha)$  (I.128) выполняется следующее символическое правило, понимаемое в смысле последующего интегрирования по фазовым координатам:

$$\int \psi \left[ \begin{matrix} (\alpha) \\ \eta \\ (A) \end{matrix} (s_\alpha) \right] \delta \left[ \eta; \begin{matrix} (\alpha) \\ \eta \\ (A) \end{matrix} (s_\alpha) \right] ds_\alpha = \psi_A(\tilde{\eta}) \Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha). \quad (\text{I.143})$$

Так как динамические функции  $\begin{matrix} (\alpha) \\ \Psi \\ (A) \end{matrix}$  для частиц одного сорта специализированы лишь номером частицы,  $\alpha$ , то соотношение (I.142) с помощью (I.115) и определения микроскопической фазовой плотности тождественных частиц сорта «A» может быть записано в более простом виде:

$$\Psi_A(\eta) = \psi_A(\eta) \mathcal{N}_A(\eta). \quad (\text{I.144})$$

В частности, полагая в (I.144)  $\psi_A(\eta) = p_A^i$ , получим *микроскопическую фазовую плотность вектора потока тождественных частиц*:

$$\mathcal{N}_A^i(\eta) = p_A^i \mathcal{N}_A(\eta), \quad (\text{I.145})$$

так что согласно (I.138):

$$\int_V d\Sigma_i \int_P dP \mathcal{N}_A^i(\eta) = N_A(V) \quad (\text{I.146})$$

есть число частиц сорта «A» в объеме  $V(\tau)$ , где элемент гиперповерхности  $d\Sigma_i$  определяется соотношением (I.97). Полагая  $\psi_A(\eta) = e_A p_A^i$ , получим *микроскопическую фазовую плотность тока тождественных частиц*:

$$\mathcal{J}_A^i(\eta) = e_A p_A^i \mathcal{N}_A(\eta), \quad (\text{I.147})$$

так что:

$$\int_V d\Sigma_i \int_P dP \mathcal{J}_A^i(\eta) = Q_A(V), \quad (\text{I.148})$$

где  $Q_A(V)$  - полный заряд частиц сорта «A» в объеме  $V(\tau)$ .

Здесь следует сделать замечание. Как известно, интегрирование в римановом пространстве тензорных полей зависит от пути интегрирования и поэтому не является однозначной операцией. Однако, в тех случаях, когда подинтегральное выражение содержит инвариантную  $\delta$  - функцию Дирака, указанная неоднозначность устраняется. Это дает возможность введения и микроскопических тензорных фазовых плотностей динамических функций.

Введенная согласно (I.142) микроскопическая фазовая плотность динамической функции тождественных частиц позволяет определить и *микроскопическую фазовую плотность динамической функции ансамбля частиц*. Пусть  $\psi_A(\eta)$  - динамические функции

Глава I. Формализм кинетической теории

одинаковой тензорной структуры и одинаковой физической природы. Тогда введем микроскопическую фазовую плотность этой функции по всему ансамблю частиц:

$$\Psi(\eta) = \sum_{A=1}^N \psi_A(\eta) \mathcal{N}_A(\eta). \quad (\text{I.149})$$

В частности:

$$\mathcal{N}(\eta) = \sum_{A=1}^N \mathcal{N}_A(\eta) \quad (\text{I.150})$$

есть инвариантная микроскопическая фазовая плотность ансамбля частиц;

$$\mathcal{N}^i(\eta) = \sum_{A=1}^n p_A^i \mathcal{N}_A(\eta) \quad (\text{I.151})$$

есть вектор микроскопической фазовой плотности потока ансамбля частиц;

$$\mathcal{J}^i(\eta) = \sum_{A=1}^n e_{Ap_A^i} \mathcal{N}_A(\eta) \quad (\text{I.152})$$

- вектор микроскопической фазовой плотности тока ансамбля частиц. Таким образом:

$$\int_V d\Sigma_i \int_P dP \mathcal{N}^i(\eta) = N(V) \quad (\text{I.153})$$

есть полное число частиц ансамбля в области  $V$ , а

$$\int_V d\Sigma_i \int_P dP \mathcal{J}^i(\eta) = Q(V), \quad (\text{I.154})$$

есть полный заряд области  $V$ .

Используя свойства инвариантной случайной функции  $\Delta$ , можно показать справедливость следующих равенств:

$$\sum_{\alpha=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta; \eta_\alpha] ds_\alpha \psi(\tilde{\eta}_\alpha) \equiv \mathcal{N}(\eta) \psi(\eta); \quad (\text{I.155})$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta; \eta_\alpha] ds_\alpha \psi(\tilde{\eta}_\alpha; \tilde{\eta}_\beta) \int d\Sigma'_i p'^i dP' \mathcal{N}(\eta') \equiv \mathcal{N}(\eta) \psi(\eta; \eta') \quad (\text{I.156})$$

и т.д. Предположим, что область  $V$  является замкнутой, так что частицы не пересекают ее границ, тогда  $dN(V)/d\tau = 0$ . Дифференцируя по времени наблюдателей соотношение (I.153) с учетом сохранения фазового объема, получим:

$$\int_V dV \int_P dP(u, p) \frac{d \mathcal{N}(\eta)}{d\tau} = 0.$$

## I.5. Микроскопическая фазовая плотность

Поскольку это соотношение должно выполняться для произвольных фазовых объемов, то должно выполняться и соответствующее локальное соотношение:

$$\frac{d\mathcal{N}}{d\tau} = 0. \quad (\text{I.157})$$

### I.5.4 Уравнение Лиувилля для микроскопической фазовой плотности

Ниже мы получим уравнение Лиувилля для релятивистски инвариантной микроскопической фазовой плотности. В специальной теории относительности такая процедура впервые была проведена в работах Ю.Л. Климонтовича [41], [43]. В соответствии с определенем (I.150), свойствами случайной функции (I.128)  $\Delta(\tilde{\eta})$  и соотношениями (I.135), устанавливающими связи  $\tilde{\eta}(\tau)$ , микроскопическая фазовая плотность ансамбля частиц (I.150) есть функция вида:

$$\mathcal{N}(\eta) = \sum_A \mathcal{N}_A(\tilde{\eta}(\tau)). \quad (\text{I.158})$$

Продифференцируем (I.158) по времени наблюдателей  $\tau$ , учитывая свойства инвариантной релятивистской случайной функции (I.122),  $\Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha)$ :

$$\frac{d}{d\tau} \Delta_\alpha(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)]}{\partial \eta_\alpha^J} \frac{d\eta_\alpha^J}{ds_\alpha^*} \frac{ds_\alpha}{(u, p_\alpha)}. \quad (\text{I.159})$$

Используя соотношения (I.129), получим:

$$\frac{d\mathcal{N}(\eta)}{d\tau} = \sum_{\alpha=1-N}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)]}{\partial \eta_\alpha^J} \frac{d\eta_\alpha^J}{ds_\alpha^*} \frac{ds_\alpha}{(u, p_\alpha)}. \quad (\text{I.160})$$

Пользуясь свойствами четности  $\delta$ -функции Дирака, перепишем (I.160) в виде:

$$(u, p) \frac{d\mathcal{N}(\eta)}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \eta^J} \sum_{\alpha=1-N}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)] \frac{d\eta_\alpha^J}{ds_\alpha^*} ds_\alpha. \quad (\text{I.161})$$

Для вычислений удобнее перейти от пары канонически сопряженных переменных  $\{x, P\}$ , отвечающей Гамильтоновой формулировке уравнений движения, к паре  $\{x^i, p^k\}$ , отвечающей Лагранжевой формулировке уравнений движения. При этом, естественно, и микроскопические фазовые плотности а также случайные функции будут определяться Лагранжевой парой переменных. Уравнения движения в Лагранжевой формулировке (I.22) принимают вид:

$$\frac{dx_\alpha^i}{ds_\alpha} = p_\alpha^i; \quad (\text{I.162})$$

## Глава I. Формализм кинетической теории

$$\frac{dp_\alpha^i}{ds_\alpha} = -\Gamma_{jk}^i(x_\alpha)p_\alpha^j p_\alpha^k + e_\alpha F_{.k}^i(x_\alpha)p_\alpha^k, \quad (\text{I.163})$$

где вследствие принципа суперпозиции тензор Максвелла представим в виде:

$$F_{ik}(x_\alpha) = \overset{0}{F}_{ik}(x_\alpha) + \sum_{\beta=1}^N F_{ik}(x_\alpha; \eta_\beta), \quad (\text{I.164})$$

причем  $\overset{0}{F}_{ik}$  - тензор Максвелла внешнего электромагнитного поля, а  $F_{ik}(x_\alpha; \eta_\beta)$  - тензор Максвелла межчастичных электромагнитных полей. Подставляя (I.162) - (I.164) в (I.161), получим:

$$\begin{aligned} (u, p) \frac{d\mathcal{N}(\eta)}{d\tau} &= -p^i \tilde{\nabla}_i \mathcal{N}(\eta) - e \overset{0}{F}_{.k}^i(x) p^k \frac{\partial \mathcal{N}(\eta)}{\partial p^i} \\ &\quad - p^k \frac{\partial}{\partial p^i} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta, \eta_\alpha(s_\alpha)] F_{.k}^i(x_\alpha; \eta_\beta) ds_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{I.165})$$

В соответствие с (I.155) и (I.156) введем:

$$\tilde{F}_k^i(x) = \overset{0}{F}_{.k}^i(x) + \int dV'(u, p') dP' \mathcal{N}(\eta') F_k^i(x; \eta'), \quad (\text{I.166})$$

Таким образом, с учетом (I.165), (I.166), (I.155), (I.156) запишем (I.157) в явном виде уравнения Лиувилля:

$$-(u, p) \frac{d\mathcal{N}(\eta)}{d\tau} = p^i \tilde{\nabla}_i \mathcal{N}(\eta) + e \tilde{F}_k^i(x) p^k \frac{\partial \mathcal{N}(\eta)}{\partial p^i} = 0. \quad (\text{I.167})$$

## I.6 Релятивистские кинетические уравнения

### I.6.1 Вывод кинетических уравнений

Движение частицы в гравитационном поле всегда квазиклассично, если ее комптоновская длина гораздо меньше радиуса кривизны  $K^{-1}$  (I.10):

$$\lambda_k = E^{-1} \ll K^{-1}. \quad (\text{I.168})$$

Тем не менее и в таких системах частиц могут быть существенны квантостатистические явления, связанные со свойствами симметрии волновой функции тождественных частиц. Поэтому такие системы удобнее описывать не функцией распределения, а *средними локальными числами заполнения квантовых состояний*,  $n(x, P)$ , связь которых с функцией распределения дается соотношением (см., например, [60]):

$$f(x, P) = \frac{\rho}{(2\pi)^3} n(x, P), \quad (\text{I.169})$$

## I.6. Релятивистские кинетические уравнения

где  $\rho$  - кратность вырождения.

Рассмотрим процесс взаимодействия частиц  $a_1, \dots, a_m$  в результате которого образуются частицы  $a'_1, \dots, a'_{m'}$ :

$$\sum_{A=1}^m \nu_A a_A \longrightarrow \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B, \quad (\text{I.170})$$

где  $\nu_A$  - числа частиц сорта  $a_A$ , участвующих в реакции;  $A$  - номер частицы. Если суммы в обеих частях (I.170) совпадают, взаимодействия называются *упругими*, в противном случае — *неупругими*. Будем полагать взаимодействия (I.170) точечными, происходящими в точке  $x \in X_4$ . Применительно к внешнему гравитационному полю точечность взаимодействий подразумевает кроме (I.168) малость эффективного радиуса взаимодействия,  $r_{eff} = \sqrt{\sigma}$ , (I.11):

$$r_{eff} \ll vK^{-1}, \quad (\text{I.171})$$

где  $v$  - скорость частицы в системе центра масс (I.170). При выполнении (I.171) столкновения точечны не только в трехмерном смысле, но и мгновенны, т.е., *четырёхточечны*. Вследствие четырёхточечности взаимодействий на них распространяется *принцип локального соответствия*, поэтому в точке столкновения  $\{x\}$  выполняется закон сохранения обобщенного 4 - импульса:

$$P_I^k = P_F^k, \quad (\text{I.172})$$

где  $P_I^k$  - суммарный обобщенный импульс начального состояния,  $P_F^k$  - конечного:

$$P_I = \sum_{A=1}^m \sum_{\alpha=1}^{\nu_A} P_A^\alpha; \quad P_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\beta=1}^{\nu'_B} P_B'^\beta$$

- векторные индексы для краткости опущены. Следует особо подчеркнуть, что в акте столкновения выполняется закон сохранения обобщенного, а не кинематического импульса. Второй закон следует из первого закона лишь при дополнительном условии - сохранения векторных и скалярных зарядов в реакциях типа (I.170). Вследствие принципа локального соответствия, который применим к взаимодействиям частиц при условии (I.171), вероятность уничтожения частицы « $a$ » в состоянии  $\eta_a \equiv \{x, P\} \in \Gamma_a$  за единицу собственного времени  $ds_a$  есть:

$$\begin{aligned} d\omega_a = & \sum \nu_a \int \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} 'n_A(x, P_A^\alpha) d\pi_A^\alpha \times \\ & \times \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} \left[ 1 \pm n_B(x, P_B'^\beta) \right] d\pi_B'^\beta \delta^{(4)}(P_I - P_F) W_{if} ds_a, \end{aligned} \quad (\text{I.173})$$

где  $\prod'$  означает, что в произведении отсутствует один множитель, относящийся к « $a$ » - той частице в состоянии  $\eta_a$ ; « $+$ » соответствует бозонам, « $-$ » - фермионам,

$$d\pi_A^\alpha = \frac{\rho_A dP_A^\alpha}{(2\pi)^3} \cdot \delta \left( \mathcal{H}_A^\alpha - \frac{1}{2} m_A^2 \right). \quad (\text{I.174})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

Величины  $W_{if}$  (фазовые плотности вероятности перехода) связаны с *инвариантными нормированными амплитудами рассеяния*  $M_{if}$  соотношением (см., например, [61]):

$$W_{if} = (2\pi)^4 |M_{if}|^2 2^{-(\sum \nu_A + \sum \nu'_B)}. \quad (\text{I.175})$$

Инвариантные нормированные амплитуды  $M_{if}$  пропорциональны обычно используемым амплитудам  $T_{if}$ :

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{\prod \sqrt{2p_A V}}, \quad (\text{I.176})$$

где произведение вычисляется по всем частицам, участвующим в реакции. Инвариантные амплитуды рассеяния  $T_{if}$  связаны с матрицей рассеяния  $S$  (см., например, [61]):

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_F - P_I) T_{fi}. \quad (\text{I.177})$$

Суммирование в (I.173) проводится по всем каналам реакций (I.170) и по всем состояниям поляризации частиц; интегрирование — по импульсным пространствам всех начальных и конечных частиц кроме «а» - той. Матрица рассеяния перестановочна по любой паре частиц либо в начальном либо в конечном состояниях. Если мы не измеряем состояния поляризации частиц, то в формуле (I.175) необходимо произвести замену:

$$|M_{if}|^2 \rightarrow \langle |M_{if}|^2 \rangle, \quad (\text{I.178})$$

где скобки означают усреднение по всем состояниям поляризации матрицы рассеяния. Именно в таком смысле и понимаются обычно классические кинетические уравнения.

Дифференциальное сечение рассеяния выражается через соответствующую матрицу рассеяния. Так, например, при столкновении двух частиц с превращением их в совокупность произвольного числа частиц отвечает дифференциальное сечение рассеяния (см., например, [61]):

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_F - P_I) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_f \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2p'_a}, \quad (\text{I.179})$$

где введен инвариант рассеяния,  $I$ :

$$I = \sqrt{(p_1, p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}. \quad (\text{I.180})$$

Учитывая связь между собственным временем частиц  $s_a$  и временем наблюдателей  $\tau$  (I.99), найдем скорость уничтожения частиц сорта «а» из произвольной односвязной фазовой области  $G_a \subset \Gamma_a$  в результате реакций (I.170):

$$\left( \frac{dN_a^-}{d\tau} \right)_{G_a} = \int_{G_a} \frac{d\omega}{d\tau} n_a(x, P_a) dX d\pi_a \delta[s_a - s_a^*(\tau)]. \quad (\text{I.181})$$

Интегрируя (I.181) по собственному времени  $s_a$ , найдем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dN_a^-}{d\tau} \right)_{G_a} &= \sum \nu_a \int_{V'_a} dV \int_{P'_a} \int'_a \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} n_A(x, P_A^\alpha) d\pi_A^\alpha \times \\ &\times \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} \left[ 1 \pm n_B(x, P_B^\beta) \right] \delta^{(4)}(P_I - P_F) W_{if} d\pi_B^\beta. \end{aligned} \quad (\text{I.182})$$

### 1.6. Релятивистские кинетические уравнения

Аналогичным образом можно подсчитать и скорость рождения частиц сорта «а» в фазовом объеме  $G_a$  в результате обратных реакций:

$$\sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B \longrightarrow \sum_{A=1}^m \nu_A a_A; \quad (\text{I.183})$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{dN_a^+}{d\tau} \right)_{G_a} &= \sum \nu_a \int_{V'_a} dV \int_{P'_a} \int_a \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} n_B(x, P_B^{\prime\beta}) d\pi_B^{\prime\beta} \times \\ &\times \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} [1 \pm n_A(x, P_A^\alpha)] \delta^{(4)}(P_F - P_I) W_{fi} d\pi_A^\alpha \end{aligned} \quad (\text{I.184})$$

где  $W_{fi}$  - матрица обратного рассеяния.

Суммарная скорость притока частиц сорта «а» в область  $G_a$  фазового пространства равна разности величин (I.184) и (I.182):

$$\left( \frac{dN_a}{d\tau} \right)_{G_a} = \int_{V'_a} dV \int_{P'_a} d\pi_a J_a(x, P_a), \quad (\text{I.185})$$

где введен *интеграл столкновений*:

$$I_a(x, P_a) \stackrel{def}{=} - \sum \nu_a \int_a \delta^{(4)}(P_F - P_I) (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi, \quad (\text{I.186})$$

где:

$$Z_{if} \stackrel{def}{=} \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} n_A(x, P_A^\alpha) \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} [1 \pm n_B(x, P_B^{\prime\beta})] \stackrel{Df}{=} \prod n_I \prod (1 \pm n_F); \quad (\text{I.187})$$

$$Z_{fi} \stackrel{def}{=} \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} [1 \pm n_A(x, P_A^\alpha)] \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} n_B(x, P_B^{\prime\beta}) \stackrel{Df}{=} \prod n_F \prod (1 \pm n_I); \quad (\text{I.188})$$

а  $\prod_{i,f} d\pi$  означает произведение импульсных объемов всех частиц кроме «а» - той.

С другой стороны, приток частиц в область  $G_a$  описывается соотношением (I.120), в котором необходимо положить  $\psi = 1$ . Приравнявая это соотношение (I.185), вследствие произвольности области  $G_a$  получим *общерелятивистские кинетические уравнения* [50]:

$$[\mathcal{H}_a, n_a] = I_a(x, P_a); \quad (a = \overline{1, m + m'}). \quad (\text{I.189})$$

Таким образом общерелятивистские кинетические уравнения представляют систему  $m + m'$  нелинейных интегро - дифференциальных уравнений.

Классические общерелятивистские кинетические уравнения ( $n_a \ll 1$ ) для упругих парных  $T$  - инвариантных столкновений сформулированы в работах [2], [4], для упругих парных  $T$  - неинвариантных столкновений - в [62]. Для упругих парных  $T$  - инвариантных столкновений при произвольных числах заполнения общерелятивистские кинетические уравнения были получены в [63] путем ковариантного обобщения классического кинетического уравнения Улинга - Уленбека (см., например, [64]).

## I.6.2 Симметрии $S$ -матрицы и кинетическая теория

### Перестановочные симметрии

Согласно смыслу классических общерелятивистских кинетических уравнений (I.189) интеграл столкновений (I.186) определен относительно матрицы рассеяния  $W_{ab}$ , усредненной по спиновым состояниям частиц, участвующих в реакциях (I.170), (I.183). Поэтому эта матрица симметрична по перестановке импульсных переменных любой пары частиц в каждом из состояний:

$$W_{if}(\dots P_a \dots P_b \dots | \dots P'_c \dots P'_d \dots) = W_{if}(\dots P_b \dots P_a \dots | \dots P'_d \dots P'_c \dots). \quad (\text{I.190})$$

### СРТ-симметрия

Вследствие СРТ - инвариантности матрицы рассеяния должны выполняться соотношения (см., например, [61]):

$$W_{fi} = \overline{W}_{if}, \quad (\text{I.191})$$

где верхняя черта означает, что все состояния частиц заменены состояниями античастиц и наоборот.

### Унитарность и оптическая теорема

Из унитарности матрицы рассеяния:

$$SS^+ = S^+S = 1 \quad (\text{I.192})$$

следует так называемая *оптическая теорема* (см., например, [19]), которую с учетом конечности величины чисел заполнения можно записать в виде:

$$\sum_f \int \prod_f [1 \pm n_f] (W_{fi} - W_{if}) d\pi_f = 0, \quad (\text{I.193})$$

где суммирование и интегрирование проводится по всем конечным состояниям частиц. Приведем более подробную форму записи оптической теоремы:

$$\sum_f \int \prod_{B=1}^{m'} [1 \pm n_f(P')] \cdot [W_{fi}(P'_1, \dots, P'_{m'} | P_1, \dots, P_m) - W_{if}(P_1, \dots, P_m | P'_1, \dots, P'_{m'})] d\pi'_f = 0, \quad (\text{I.194})$$

### Принцип детального равновесия

Для Т-инвариантных взаимодействий функция  $W$  удовлетворяет условию:

$$W_{fi}(P'_1, \dots, P'_{m'} | P_1, \dots, P_m) = W_{if}(P_1, \dots, P_m | P'_1, \dots, P'_{m'}). \quad (\text{I.195})$$

Это соотношение называется *принципом детального равновесия*. Таким образом, для Т-инвариантных взаимодействий интеграл (I.186) принимает наиболее простой «классический» вид:

$$I_a(x, P_a) = - \sum \nu_a \delta^{(4)}(P_F - P_I) (Z_{if} - Z_{fi}) W_{if} \prod'_{i,f} d\pi, \quad (\text{I.196})$$

## I.6. Релятивистские кинетические уравнения

### I.6.3 Бесстолкновительные кинетические уравнения

В тех случаях, когда длина свободного пробега частиц сорта «а»,  $l_a$ , гораздо больше характерного масштаба  $L_0$  статистической системы или время свободного пробега частиц  $\tau_a$  гораздо больше характерного временного масштаба  $T_0$  эволюции системы <sup>7</sup>:

$$l_a \gg L_0; \quad \tau_a \gg T_0, \quad (\text{I.197})$$

интегралом столкновений в правой части кинетического уравнения (I.189) для частиц сорта «а» можно пренебречь и описывать движение этих частиц *бесстолкновительным кинетическим уравнением* [8]:

$$[\mathcal{H}_a, n_a] = 0. \quad (\text{I.198})$$

Таким образом, в заданных внешних полях бесстолкновительные кинетические уравнения являются линейными однородными дифференциальными уравнениями первого порядка в частных производных относительно функции распределения (или чисел заполнения).

*Уравнения характеристик* для этих уравнений совпадают с уравнениями движения частиц, описываемых нормальной системой 8 - ми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (см., например, [65]), т.е., в нашем случае — системой канонических уравнений (I.12) при независимых канонически сопряженных переменных  $\{x^i, P_i\}$ ; либо системой вида: (I.23):

$$\frac{dx^i}{ds} = p^i; \quad \left(1 + \frac{q\Phi}{m}\right) \frac{Dp^i}{ds} = eF_{.k}^i p^k + q\Phi_{.k} \left(g^{ik} - \frac{p^i p^k}{m^2}\right), \quad (\text{I.199})$$

при независимых переменных  $\{x^i, p^i\}$ .

Как мы отмечали в разделе I.5, система уравнений движения (I.12) или (I.23) допускает 7 независимых интегралов  $\Phi_r(x, P)$  (I.134), являющихся *характеристиками бесстолкновительного кинетического уравнения* (I.198). При фиксированной массе покоя его точное 6 - параметрическое семейство решений полностью определяется этими характеристиками:

$$n_a(x, P) = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_6), \quad (\text{I.200})$$

где  $\Phi$  - произвольная функция своих аргументов  $\psi_p$ . Единственное условие, которое налагается на эту функцию, есть условие сходимости ее моментов (I.88).

Для конкретизации  $\Phi(\psi_p)$  необходимо задать ее на некоторой гиперповерхности  $\Sigma \subset \Gamma$  фазового пространства. Заметим, в частности, что при выполнении условий (I.29) — (I.31) функция распределения имеет среди своих характеристик и линейные интегралы движения (I.28).

<sup>7</sup>Эти условия мы уточним в дальнейшем

### I.6.4 H-теорема Больцмана

В соответствие с [60] определим *энтропию* каждой компоненты статистической системы соотношением:

$$S_a(\tau) = \int_{\Gamma} dX d\pi_a \delta[s_a - s_a^*(\tau)] [\pm(1 \pm n_a) \ln(1 \pm n_a) - n_a \ln n_a]. \quad (\text{I.201})$$

Вычисляя производную от этой величины по формуле (I.119), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{dS_a}{d\tau} &= \int_V dV \int_P d\pi_a [\mathcal{H}_a, \mathcal{S}_a n_a] \equiv \\ &\equiv \int_V dV \int_P d\pi_a \ln \left( \frac{1 \pm n_a}{n_a} \right) [\mathcal{H}, n_a], \quad (\text{I.202}) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{S}_a$  - выражение в квадратных скобках (I.201), есть фазовая плотность энтропии.

Используя теперь кинетические уравнения (I.189), получим:

$$\frac{dS_a}{d\tau} = \int_V dV \int_P d\pi_a \ln \left( \frac{1 \pm n_a}{n_a} \right) I_a(x, P_a). \quad (\text{I.203})$$

Рассмотрим интеграл:

$$\dot{I}_a(x) = \int_P d\pi_a \ln \left( \frac{1 \pm n_a}{n_a} \right) I_a(x, P_a), \quad (\text{I.204})$$

смысл которого - скорость изменения трехмерной плотности энтропии. Вследствие перестановочности матрицы рассеяния по частицам внутри каждого из состояний,  $I$  или  $F$ , а также симметрии интеграла (I.204) по всем тождественным частицам сорта «a» величину  $\nu_a \ln[(1 \pm n_a)/n_a]$  под знаком интеграла можно представить в симметричной форме:

$$\nu_a \ln \left( \frac{1 \pm n_a}{n_a} \right) \rightarrow \ln \left[ \prod_{\alpha=1}^{\nu_a} \frac{1 \pm n_a(P_a)}{n_a(P_a)} \right]$$

и в результате получить:

$$\dot{I}_a = - \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left[ \prod_{\alpha=1}^{\nu_a} \frac{1 \pm n_a(P_a)}{n_a(P_a)} \right] \times (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f}^l d\pi dV. \quad (\text{I.205})$$

Энтропия есть величина аддитивная, поэтому полная энтропия статистической системы,  $S(\tau)$ , равна:

$$S(\tau) = \sum_{A=1}^m S_a + \sum_{B=1}^{m'} S_B. \quad (\text{I.206})$$

### I.6. Релятивистские кинетические уравнения

Выполняя суммирование в (I.205) в соответствие с (I.206), получим с учетом перестановочности матрицы рассеяния (I.190):

$$\frac{dS}{d\tau} = \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left( \frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) (Z_{if}W_{if} - Z_{fi}W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi dV. \quad (I.207)$$

Для Т-инвариантных взаимодействий (I.206) получим для (I.207):

$$\frac{dS}{d\tau} = \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left( \frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) (Z_{if} - Z_{fi})W_{if} \prod_{i,f} d\pi dV. \quad (I.208)$$

Заметим, что для любых неотрицательных  $Z_{if}$  и  $Z_{fi}$  выполняется алгебраическое неравенство:

$$R(Z_{if}, Z_{fi}) \stackrel{def}{=} \ln \left( \frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) (Z_{if} - Z_{fi}) \geq 0, \quad (I.209)$$

причем:

$$R(Z_{if}, Z_{fi}) = 0 \iff Z_{if} = Z_{fi}. \quad (I.210)$$

Поэтому вследствие неотрицательности входящих в (I.208) выражений для Т-инвариантных взаимодействий справедлива так называемая *H-теорема Больцмана*:

$$\frac{dS}{d\tau} \geq 0, \quad (I.211)$$

согласно которой во всех Т-инвариантных взаимодействиях энтропия системы не убывает со временем.

Заметим, что в бесстолкновительных системах, когда  $I_a(x, P) \approx 0$ , энтропия системы не изменяется со временем:

$$S \approx \text{Const}, \quad \text{if } I_a \approx 0. \quad (I.212)$$

Пусть теперь взаимодействия частиц не являются Т - инвариантными. Произведем тождественное преобразование величины в круглых скобках подынтегрального выражения в (I.207):

$$(Z_{if}W_{if} - Z_{fi}W_{fi}) \equiv W_{if}(Z_{if} - Z_{fi}) + (W_{if} - W_{fi})Z_{fi}$$

и преобразуем выражение (I.208) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\tau} = & \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left( \frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) (Z_{if} - Z_{fi})W_{if} \prod_{i,f} d\pi dV + \\ & + \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \ln \left( \frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) Z_{fi}(W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi dV. \end{aligned} \quad (I.213)$$

Первый интеграл в правой части (I.213) совпадает с интегралом в правой части (I.208), поэтому он неотрицателен. Во втором интеграле можно сначала провести интегрирование по конечным состояниям, но тогда вследствие оптической теоремы (I.193) получим нуль. Итак справедливо утверждение:

*H-теорема Больцмана (I.211) справедлива для любых взаимодействий до тех пор, пока справедлива оптическая теорема.*

Таким образом H-теорема Больцмана и в общерелятивистской кинетике остается фундаментальным законом природы. В частности, полный поток энтропии статистической системы в любом случае описывается выражением (I.208), поэтому равенство нулю потока энтропии может достигаться лишь при условии (I.210).

## I.7 Уравнения переноса динамических величин

Пусть  $\psi(x, P)^8$  - некоторая скалярная функция динамических переменных. Согласно (I.118) скорость ее макроскопического среднего, определенного в объеме  $V' \subset X$ , есть:

$$\frac{d\Psi_{V'}}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P(V')} dP [\mathcal{H}, \psi F]. \quad (I.214)$$

Используя линейность скобки Пуассона, перепишем (I.214) в более удобном виде:

$$\frac{d\Psi_{V'}}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P(V')} dP \{ \psi [\mathcal{H}, F] + F [\mathcal{H}, \Psi] \}.$$

Заменяем согласно кинетическим уравнениям (I.189) скобку Пуассона относительно функции распределения интегралом столкновений:

$$\frac{d\Psi_{V'}}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P(V')} dP \{ \psi I(x, P) + F [\mathcal{H}, \Psi] \}. \quad (I.215)$$

С другой стороны скорость изменения макроскопического среднего  $\Psi_{V'}(\tau)$  определяется формулой (I.121). Приравнявая правые части уравнений (I.121) и (I.215), получим интегральное равенство:

$$\int_{V'} \left\{ \nabla_i \int_{P(V)} \psi_a F_a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_i} d\pi_a - \int_{P(V)} [F_a [\mathcal{H}_a, \psi_a] + \psi_a I_a] d\pi_a \right\} dV = 0, \quad (I.216)$$

которое вследствие произвольности трехмерной области  $V'$  приводит к *локальному уравнению переноса динамических величин*:

$$\nabla_i \int_{P(X)} \psi_a F_a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_i} d\pi_a - \int_{P(X)} F_a [\mathcal{H}_a, \psi_a] d\pi_a = \int_{P(X)} \psi_a I_a d\pi_a; \quad (a = 1, \dots, m + m'). \quad (I.217)$$

Уравнение переноса (I.217) можно получить и для произвольных тензорных функций  $\psi(x, P)$ , если не связывать эти уравнения с сохранением макроскопических средних от

<sup>8</sup>Индексы сорта частиц мы здесь для краткости опускаем

## I.8. Законы сохранения

этих функций. Для получения таких уравнений достаточно проинтегрировать по импульсному пространству скобку Пуассона  $[\mathcal{H}_a, \psi_a]$ , понимаемую в смысле (I.50), и затем воспользоваться кинетическими уравнениями (I.189) и соотношениями (I.89). Поэтому в дальнейшем  $\psi(x, P)$  в уравнениях (I.217) - произвольная тензорная функция.

Просуммируем (I.217) по всем частицам, участвующих в реакциях (I.170) и (I.183):

$$\nabla_i \sum_a \int_{P(X)} \psi_a F_a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_i} d\pi_a - \sum_a \int_{P(X)} F_a [\mathcal{H}_a, \psi_a] d\pi_a = \sum_a \int_{P(X)} \psi_a I_a d\pi_a. \quad (I.218)$$

Сумму в правой части (I.218) разложим на две: первая по состояниям, уничтожаемым в реакциях (I.170)<sup>9</sup>:

$$- \sum_{channels} \sum_a \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \nu_a \psi_a (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi;$$

вторая по состояниям, уничтожаемым в реакциях (I.183); для них:

$$Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi} \rightarrow -(Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}).$$

В результате уравнения переноса (I.218) принимает вид [66]:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \sum_a \int_{P(X)} \psi_a F_a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_i} d\pi_a - \sum_a \int_{P(X)} F_a [\mathcal{H}_a, \psi_a] d\pi_a = \\ & - \sum_{channels} \sum_a \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \left( \sum_{A=1}^m \nu_A \psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \psi'_B \right) \times \\ & (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi. \end{aligned} \quad (I.219)$$

## I.8 Законы сохранения в общерелятивистской кинетической теории

Положим в уравнениях переноса (I.219):

$$\psi_A(x, P) = e_A = \text{Const}, \quad (I.220)$$

где  $e_A$  - некоторые числа (электрические, барионные, электрослабые заряды и т.п.), причем для  $k$ -той реакции (I.170):

$$\sum \nu_A^k e_A - \sum \nu'_B{}^k e'_B = \Delta e^k. \quad (I.221)$$

<sup>9</sup>Суммирование в этих формулах проводится по всем каналам реакций (I.170), (I.183)

Глава I. Формализм кинетической теории

Подставляя (I.220) в (I.219) и используя (I.221), получим уравнение:

$$\nabla_i J^i = - \sum_k \Delta e^k \int_{P(X)} I_{(k)} dP, \quad (\text{I.222})$$

где суммирование проводится по всевозможным реакциям, в которых участвуют заряженные частицы;  $J^i(x)$  - вектор плотности тока, соответствующего данному типу зарядов.

Алгебра взаимодействий элементарных частиц, т.е., фактически, схемы реакций (I.170), (I.183), возможных в той или иной теоретико - полевой модели взаимодействий частиц, приводят к законам сохранения некоторых обобщенных токов. Действительно, алгебра взаимодействий элементарных частиц определяется натуральными числами  $\nu_A^k$ , определяющими число частиц сорта  $A$ , участвующих в  $k$ -той реакции, т.е., матрицей  $||\nu_A^k||$ . Пусть  $N$  - число  $p$  типов фундаментальных частиц, включая и античастицы, в конкретной теоретико - полевой модели. Перепишем реакции (I.170) и (I.183) в единой форме:

$$\sum_A \nu_A^k a_A = 0; \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (\text{I.223})$$

и  $\nu_A^k$  могут теперь принимать любые целочисленные значения: положительные, отрицательные и нулевые. В любой замкнутой теории элементарных частиц должно быть:

$$\text{rang} ||\nu_A^k|| < N. \quad (\text{I.224})$$

В противном случае найдется такая частица, которая не сможет быть получена ни в одной реакции (I.223)\*.

---

*\*Замечание. В принципе, конечно, можно рассматривать теории элементарных частиц такого типа, в которых существуют непересекающиеся классы элементарных частиц и соответствующих типов взаимодействий, а единственным универсальным взаимодействием остается гравитационное (впрочем, и его универсальность также можно оспорить). При этом мы получили бы картину множественных физических миров, одновременно существующих в одном физическом пространстве и взаимодействующих лишь гравитационно. Подобная картина мира, в принципе, не противоречит современным космологическим и астрофизическим наблюдениям. В случае реализации такой картины мира недостающие в наблюдениях массы (по некоторым данным до 95%) можно было бы списать за счет масс других миров (порядка 20-ти миров). При отсутствии универсального взаимодействия мы получили бы полностью непересекающиеся миры, изучение которых могло бы стать лишь предметом философии.*

---

Вследствие (I.224) можно выбрать  $N$  чисел  $g_A$ , одновременно не равных нулю, таких что:

$$\sum_A \nu_A^k g_A = 0; \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (\text{I.225})$$

Пусть  $\text{rang} ||\nu_A^k|| = r < N$ . Тогда существуют  $N - r$  линейно независимых нетривиальных решений системы (I.225), которые мы будем обозначать символами  $g_A^s$  ( $s = 1, \dots, N - r$ ) и называть *обобщенными зарядами*. Поскольку  $\nu_A^k$  - целые числа, решения (I.225) также

### I.8. Законы сохранения

представимы в целых числах, т.е., обобщенным зарядам можно придать целочисленные значения. Полагая в (I.220), (I.221)  $e_A = g_A^s$ , получим вследствие (I.225):  $\Delta g_s^k = 0$ , что приводит к законам сохранения  $N - r$  обобщенных токов:

$$\nabla_i J_s^i = 0; \quad (s = 1, 2, \dots, N - r), \quad (\text{I.226})$$

где в соответствие с (I.113):

$$J_s^i(x) = \sum_A g_A^s \int_{P(X)} \frac{\partial \mathcal{H}_A}{\partial P_i} dP_A. \quad (\text{I.227})$$

Тогда согласно (I.226) и (I.114) сохраняется и полный обобщенный заряд  $G_s$ :

$$\frac{dG_s}{d\tau} = 0, \quad (\text{I.228})$$

где:

$$G_s = \int_V dV_i J_s^i(x). \quad (\text{I.229})$$

Положим теперь в (I.219)  $\psi_a = P_a^i$ ; тогда выражение в круглых скобках (I.219) равно:

$$\sum \nu P_A^i - \sum \nu'_B P_B^i \equiv P_I^i - P_F^i = 0. \quad (\text{I.230})$$

Таким образом, правая часть уравнения переноса (I.219) оказывается равной нулю вследствие сохранения при столкновениях полного импульса частиц. Вычисляя скобку Пуассона относительно  $P^i$ , найдем с учетом уравнения массовой поверхности (I.17):

$$[\mathcal{H}_A, P_A^i] = \frac{\partial \mathcal{H}_A}{\partial P_A^k} \tilde{\nabla}_k P_A^i - \frac{\partial P_A^i}{\partial P_A^k} \tilde{\nabla}_k \mathcal{H}_A = -m_A q_A \nabla^i \Phi - e_A P_A^k \nabla^i A_k. \quad (\text{I.231})$$

Уравнение переноса (I.219) относительно вектора обобщенного импульса  $P^i$  принимает вид:

$$\nabla_i \Xi_p^{ik} - \sigma \nabla^k \Phi - J^i \nabla^k A_i = 0, \quad (\text{I.232})$$

где  $J^i(x)$  - вектор плотности тока, связанного с переносом зарядов  $e$  (I.227);

$$\sigma(x) = \sum m_A q_A \int_{P(X)} d\pi_A F_A \quad (\text{I.233})$$

- скалярная функция;

$$\Xi_p^{ik} = \sum \int_{P(X)} d\pi_A P_A^i P_A^k F_A \quad (\text{I.234})$$

Глава I. Формализм кинетической теории

- несимметричный тензор. Используя связь между обобщенным и кинематическим импульсами (I.18), получим из (I.234):

$$\Xi_p^{ik}(x) = T_p^{ik}(x) - J^i(x)A^k(x), \quad (I.235)$$

где  $T_p^{ik}(x)$  - симметричный тензор энергии - импульса частиц (ТЭИ). Подставляя (I.235) в (I.232), приведем уравнение переноса к виду [66]:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi - J_k F^{ik} + A^i \nabla_k J^k = 0. \quad (I.236)$$

Несимметричный тензор (I.234) связан с полной энергией плазмы. Действительно, предположим, что пространство - время допускает времениподобный вектор Киллинга  $\xi^i(x)$ , причем выполняются условия (I.29) - (I.31) существования интеграла энергии  $E$ . Тогда, полагая в (I.219)  $\psi_a = (\xi, P_a)$ , получим:

$$\frac{dE}{d\tau} = 0, \quad (I.237)$$

где  $E$  - полная энергия плазмы:

$$E = \int_V dV_i \sum_A \int_{P(X)} \frac{\partial \mathcal{H}_A}{\partial P_i^A}(\xi, P) F_A d\pi_A \int dV_k \xi_k \Xi_p^{ik}. \quad (I.238)$$

В заключение раздела запишем уравнения переноса заряда (I.222) в форме, явно разделяющей состояния частиц и античастиц. Для этого выражение в правой части (I.219) представим в виде суммы двух:

$$\begin{aligned} & - \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \left( \sum_A \nu_A \psi_A - \sum_B \nu'_B \psi'_B \right) (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi \\ & - \sum \int \delta^{(4)}(\bar{P}_F - \bar{P}_I) \left( \sum_A \bar{\nu}_A \bar{\psi}_A - \sum_B \bar{\nu}'_B \bar{\psi}'_B \right) (\bar{Z}_{if} \bar{W}_{if} - \bar{Z}_{fi} \bar{W}_{fi}) \prod_{i,f} d\bar{\pi}. \end{aligned} \quad (I.239)$$

Очевидно, что для античастиц  $\bar{\nu}_A = \nu_A$ ,  $\bar{e}_A = -e_A$ . Поэтому вследствие СРТ - симметрии ((I.191)) и равенства масс частиц и античастиц закон переноса заряда (I.222) принимает вид:

$$\begin{aligned} \nabla_i J^i \stackrel{def}{=} \nabla_i (J^i - \bar{J}^i) = \\ - \sum_k \Delta e^k \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) [(Z_{if} + \bar{Z}_{fi}) W_{if} - (Z_{fi} + \bar{Z}_{if}) W_{fi}] \prod_{i,f} d\pi. \end{aligned} \quad (I.240)$$

## I.9 Самосогласованное кинетическое описание системы частиц

Для выяснения смысла уравнений (I.236) и входящих в них величин рассмотрим полевые уравнения относительного векторного и скалярного потенциалов. ТЭИ этих полей определяются выражениями (см., например, [66], [67]):

$$T_v^{ik} = -\frac{\epsilon_v}{4\pi} \left[ F^{il} F_l^i + \mu_v^2 A^i A^k - \frac{1}{4} g^{ik} (F^{lm} F_{lm} + 2\mu_v^2 A^l A_l) \right]; \quad (I.241)$$

$$T_s^{ik} = \frac{\epsilon_s}{8\pi} \left( \frac{4}{3} \Phi^{,i} \Phi^{,k} - \frac{1}{3} g^{ik} \Phi^{,l} \Phi_{,l} + g^{ik} \mu_s^2 \Phi^2 \right) + \frac{1}{3} \left( R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} \right) \Phi^2 - \frac{2}{3} \Phi \Phi^{,ik} + \frac{2}{3} g^{ik} \Phi \square \Phi + \frac{\lambda}{6} g^{ik} \Phi^4 \quad (I.242)$$

где  $\mu_v, \mu_s$  - массы векторного и скалярного полей;  $\epsilon_s = +1$  для скалярного поля с притяжением одноименно заряженных частиц,  $\epsilon_s = -1$  - для скалярного поля с отталкиванием. Вычисляя дивергенцию ТЭИ векторного поля (I.242), найдем:

$$T_v^{ik}{}_{,k} = -\frac{\epsilon_v}{4\pi} \left[ F_{,k}^i (F^{kj} - \mu_v^2 A^k) + \mu_v^2 A^i A_{,k}^k \right]. \quad (I.243)$$

Выбирая в качестве уравнений для векторного поля уравнения Прока:

$$F_{,k}^i - \mu_v^2 A^i = 4\pi \epsilon_v J^i, \quad (I.244)$$

где векторный ток  $J^i$  определяется выражением (I.227), получим из (I.242):

$$T_v^{ik}{}_{,k} = -F_{,k}^i J^k - \frac{\epsilon_v}{4\pi} \mu_v^2 A^i A_{,k}^k. \quad (I.245)$$

Вычисляя дивергенцию от обеих частей (I.244), получим соотношение:

$$\mu_v^2 A_{,k}^k = -4\pi \epsilon_v J_{,k}^k. \quad (I.246)$$

Подставляя теперь (I.246) в (I.245), запишем (I.245) в более удобной форме:

$$T_v^{ik}{}_{,k} = -F_{,k}^i J^k + A^i J_{,k}^k. \quad (I.247)$$

Вычисляя теперь ковариантную дивергенцию от ТЭИ скалярного поля (I.242) с учетом коммутационных соотношений для вторых ковариантных производных (см., например, [42]), найдем:

$$T_s^{ik}{}_{,k} = \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left( \square \Phi + \mu_s^2 \Phi - \frac{1}{6} R \Phi + \frac{1}{3} \lambda \Phi^3 \right). \quad (I.248)$$

Выбирая в качестве уравнения для скалярного поля уравнение типа Клейна - Гордона с источником (см., например, [66]):

$$\square \Phi + \mu_s^2 \Phi - \frac{1}{6} R \Phi + \frac{1}{3} \lambda \Phi^3 = -4\pi \epsilon_s \sigma, \quad (I.249)$$

Глава I. Формализм кинетической теории

Преобразуем (I.248) к более простому виду:

$$T_{,k}^{ik} = -\sigma\Phi^{,i}. \quad (\text{I.250})$$

Учитывая теперь (I.247) и (I.250) в уравнении переноса (I.236), приведем его к виду дифференциального закона сохранения полного тензора энергии - импульса системы «релятивистские заряженные частицы + векторное поле + скалярное поле» [66]:

$$T_{,k}^{ik} = 0, \quad (\text{I.251})$$

где

$$T^{ik} = T_p^{ik} + T_v^{ik} + T_s^{ik}. \quad (\text{I.252})$$

Следует отметить, что вид этого ТЭИ устанавливается однозначно при соответствующем выборе ТЭИ векторного и скалярного полей. Тожественное выполнение закона «сохранения» (I.251) позволяет непротиворечиво описывать макроскопические поля релятивистской самогравитирующей плазмы системой самосогласованных уравнений (I.189) (кинетические уравнения), (I.244), (I.249) (уравнения для векторного и скалярного полей) и уравнений Эйнштейна:

$$G^{ik} \equiv R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi T^{ik}, \quad (\text{I.253})$$

в которых источники определяются выражениями (I.116), (I.113), (I.241), (I.233) и (I.252)<sup>10</sup>.

Уравнение (I.249) может быть записано в более удобной форме, для чего скалярную кривизну необходимо выразить через след ТЭИ:

$$R = -8\pi T = -8\pi(T_p + T_v + T_s). \quad (\text{I.254})$$

Вычисляя шпуры ТЭИ векторного и скалярного полей, найдем:

$$T_v = -\frac{\epsilon_v}{4\pi}\mu_v^2(A, A); \quad (\text{I.255})$$

$$T_s = -\sigma\Phi + \frac{\epsilon_s}{4\pi}\mu_s^2\Phi^2. \quad (\text{I.256})$$

Далее из определения скалярной плотности зарядов,  $\sigma(x)$ , (I.233) и ТЭИ частиц (I.116) следует соотношение [66]:

$$\sigma = \sum_A \frac{q_A T_p^A}{m_a + q_a\Phi}. \quad (\text{I.257})$$

Таким образом, получим вместо (I.249) уравнение:

$$\square\Phi + \mu_s^2\Phi + \frac{1}{3}\Phi^3(\mu_s^2 + \lambda) + \frac{1}{3}\mu_v^2\Phi(A, A) + 4\pi\epsilon_s\sigma \left(1 - \frac{1}{3}\Phi^2\right) + \frac{4\pi}{3}T_p\Phi = 0, \quad (\text{I.258})$$

которое можно рассматривать в качестве эквивалентного уравнения для скалярного поля.

<sup>10</sup>Заметим, что в работе Шоке - Брюа [68] доказаны локальные теоремы существования и устойчивости решений системы уравнений Эйнштейна - Максвелла - Больцмана, аналогичной приведенной выше системы уравнений, но без скалярного поля и с больцмановским интегралом столкновений.

## I.10 Общерелятивистские уравнения Власова

Как мы отмечали в разделе I.6, в случае, когда длина свободного пробега частиц сорта «а»,  $l_a$ , гораздо больше характерного масштаба  $L_0$  статистической системы или время свободного пробега частиц  $\tau_a$  гораздо больше характерного временного масштаба  $T_0$  эволюции системы, интегралом столкновений в правой части кинетического уравнения (I.189) для частиц сорта «а» можно пренебречь и описывать движение этих частиц *бесстолкновительным кинетическим уравнением*. Согласно результатам раздела I.4 это можно сделать в случае выполнения условий:

$$\tau_a \gg L_g, \quad (I.259)$$

где

$$L_g = \max |v^i \partial_i \ln |; \quad (I.260)$$

$$\tau_a^{-1} = \sum_b \tau_{ab}^{-1}, \quad (I.261)$$

причем:

$$\tau_{ab}^{-1} = \left\langle\left\langle (p_a, v) \int f_b \sqrt{(p_a, p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \sigma_{tot} d\pi_b \right\rangle\right\rangle. \quad (I.262)$$

При выполнении условий (I.259) - (I.262) движение плазмы с большой точностью описывается бесстолкновительными уравнениями (I.198):

$$[\mathcal{H}_a, n_a] = 0. \quad (I.263)$$

Как мы отмечали в том же разделе, энтропия в бесстолкновительных системах не изменяется со временем:

$$\frac{dS}{d\tau} = 0. \quad (I.264)$$

Далее, вследствие общих законов сохранения: (I.222), (I.236) и с учетом равенства нулю интеграла столкновений в бесстолкновительной плазме выполняются следующие законы сохранения:

$$\nabla_i n_A^i = 0 \quad (I.265)$$

- сохраняется число частиц каждого сорта;

$$J_{,i}^i = 0 \quad (I.266)$$

- сохраняется любой заряд. В частности, из (I.246) при  $\mu_v \neq 0$  сразу следует:

$$A_{,k}^k = 0 \quad (I.267)$$

- лоренцевская калибровка для векторного потенциала массивного векторного поля.

Выбирая теперь для этого поля уравнения Прока (I.244) с векторным током (I.227), а для скалярного поля уравнения (I.249) с источником (I.257), определяя с учетом (I.265)

## Глава I. Формализм кинетической теории

- (I.267) согласно (I.241), (I.242) ТЭИ векторного и скалярного полей и присоединяя к полученным уравнениям уравнения Эйнштейна (I.253), мы получим замкнутую систему интегродифференциальных уравнений, которая описывает самосогласованное движение бесстолкновительных заряженных частиц с их макроскопическими скалярными, векторными полями и полями тяготения.

*Данная система самосогласованных уравнений для случая электромагнитных и гравитационных полей впервые была приведена в книге А.А. Власова [8], поэтому и в дальнейшем самосогласованные бесстолкновительные кинетические модели для любого типа макроскопических полей будем называть уравнениями Власова.*

## Глава II

# Релятивистская теория статистического равновесия плазмы в полях тяготения

### II.1 Локальное термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

#### II.1.1 Локально равновесное распределение

Как мы показали в разделе I.6 термодинамическое равновесие статистической системы, когда поток энтропии равен нулю

$$\frac{dS}{d\tau} = 0, \quad (\text{II.1})$$

может осуществляться лишь при выполнении условий (см. (I.209) и (I.210)):

$$Z_{fi} - Z_{if} = 0 \quad (\text{II.2})$$

в каждом канале реакций (I.225). Уравнения (II.2) являются аналогом функциональных уравнений Больцмана [7]. Для их решения сделаем замену:

$$F_a = e^{-\phi_a} (e^{-\phi_a} \mp 1)^{-1} \equiv (1 \mp e^{\phi_a})^{-1}, \quad (\text{II.3})$$

в результате которой величины  $Z_{if}$  и  $Z_{fi}$  примут вид:

$$Z_{if} = \frac{\prod_i e^{-\phi_a}}{\prod_{i,f} (e^{-\phi_a} \mp 1)}; \quad Z_{fi} = \frac{\prod_f e^{-\phi_a}}{\prod_{i,f} (e^{-\phi_a} \mp 1)}. \quad (\text{II.4})$$

Тогда после логарифмирования уравнения (II.2) примут вид:

$$\sum_{A=1}^m \sum_{\alpha=1}^{\nu_A} \phi_A(P_A^\alpha) = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\beta=1}^{\nu'_B} \phi'_B(P_B'^\beta), \quad (\text{II.5})$$

## Глава II. Равновесие плазмы в гравитационном поле

причем, эти соотношения должны выполняться в каждом канале реакций (I.225). Единственным решением (II.5) при произвольных значениях импульсов частиц являются линейные функции импульсов:

$$\phi_A(P_A^\alpha) = -\lambda_A(x) + (\xi_A, P_A^\alpha), \quad (II.6)$$

где вследствие инвариантности функции распределения:  $\lambda_A(x)$  - скаляры в конфигурационном пространстве,  $\xi^i(x)$  - векторы. Подставляя (II.6) в уравнения (II.5) и учитывая закон сохранения обобщенного импульса при столкновениях, вследствие произвольности импульсов частиц получим:

$$\xi_A^i(x) = \xi^i(x); \quad (II.7)$$

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^k \lambda_A = 0, \quad (II.8)$$

где  $||\nu_A^k||$  - матрица, введенная в главе I. Вследствие условия (I.224) уравнения (II.8) всегда имеют нетривиальное решение.

*Условия (II.7), (II.8) являются условиями локального термодинамического равновесия (ЛТР); скаляры  $\lambda_A(x)$  называются химическими потенциалами статистической системы.*

Подставляя решения (II.6) в (II.3) с учетом (II.7) получим *локально - равновесные функции распределения:*

$$f_a^0(x, P_a) = \{\exp[-\lambda_a + (\xi, P_a)] \mp 1\}^{-1}, \quad (II.9)$$

где верхний знак, как и ранее, соответствует бозонам, нижний - фермионам.

Для сходимости моментов от распределения (II.9) необходима времениподобность вектора  $\xi^i(x)$ :

$$\xi^2 \equiv (\xi, \xi) > 0. \quad (II.10)$$

Введем с помощью  $\xi^i(x)$  единичное времениподобное поле  $v^i(x)$ :

$$v^i = \frac{\xi^i}{\xi}; \quad (v, v) = 1, \quad (II.11)$$

локальную температуру  $\theta(x)$  [7]:

$$\theta(x) = \xi^{-1} \quad (II.12)$$

и химические потенциалы,  $\mu_a(x)$ , в обычной нормировке:

$$\mu_a(x) = \theta(x) \lambda_a(x). \quad (II.13)$$

Тогда распределение (II.9) может быть записано в виде:

$$f_a^0(x, P_a) = \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu_a + (v, P_a)}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1}. \quad (II.14)$$

### II.1.2 Моменты равновесного распределения

Вычислим моменты распределения (II.9). При этом удобно перейти в локально лоренцевый репер, временная компонента которого направлена вдоль вектора  $v^i$  и ввести новые переменные  $P_i = P_i - eA_i$ , в которых уравнение массовой поверхности (I.17) принимает вид:

$$P_4^2 = P^2 + m_*^2, \quad (\text{II.15})$$

где:

$$m_*(x) = |m + q\Phi(x)| \quad (\text{II.16})$$

является эффективной массой частиц. Затем необходимо перейти к сферической системе координат в пространстве импульсов  $P(X)$  и ковариантно обобщить полученные результаты. В итоге получим выражения для компонент вектора плотности числа частиц,  $n_a^i(x)$ , и ТЭИ  $a$ -той компоненты плазмы,  $T_a^{ik}$ , [66], [69]:

$$n_a^i(x) = n_a(x)v^i; \quad (\text{II.17})$$

$$T_a^{ik}(x) = (\mathcal{E}_a + P_a)v^i v^k - P_a g^{ik}, \quad (\text{II.18})$$

где

$$n_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \mp 1 \right]^{-1} \right\} P^2 dP; \quad (\text{II.19})$$

$$\mathcal{E}_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \mp 1 \right]^{-1} \right\} \sqrt{m_*^2 + P^2} P^2 dP; \quad (\text{II.20})$$

$$P_a(x) = \frac{\rho}{6\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \mp 1 \right]^{-1} \right\} \frac{P^4 dP}{\sqrt{m_*^2 + P^2}}. \quad (\text{II.21})$$

В формулах (II.19) - (II.21) введены обозначения [66]:

$$\mu'_a(x) = \mu_a(x) - e_a(v, A). \quad (\text{II.22})$$

Следует заметить, что химические потенциалы  $\mu'_a$  в отличие от потенциалов  $\mu_a$  не сохраняются подобно (II.8) в реакциях, нарушающих закон сохранения векторного заряда. Для этих потенциалов вместо (II.8) получим:

$$\sum \nu_A^k \mu'_A = -\Delta e^k(v, A). \quad (\text{II.23})$$

### II.1.3 ЛТР при нарушении Т-инвариантности

Химический потенциал безмассовых частиц, обладающих нулевыми фундаментальными зарядами, в состоянии ЛТР равен нулю. Этот вывод следует из того, что числа  $\nu_A^k$  таких частиц, участвующих в реакциях (II.8), могут быть совершенно произвольными. Тогда из факта существования реакции аннигиляции частиц и античастиц следует известное соотношение [60]:

$$\bar{\mu}_a = -\mu_a. \quad (\text{II.24})$$

Вследствие определения (II.22) это соотношение сохраняет силу и для перенормированных химических потенциалов  $\mu'_a$ . Аналогичные выводы можно сделать и в отношении фундаментальных зарядов  $g_A$ :

$$\bar{g}_A = -g_A. \quad (\text{II.25})$$

Заметим, что единичный вектор в направлении вектора плотности потока числа частиц называется *кинематической скоростью среды*, а собственный времениподобный единичный вектор ТЭИ частиц называется *динамической скоростью среды*, собственное же значение ТЭИ, соответствующее этому вектору, называется *плотностью энергии среды* (см., например, [42]).

Таким образом в состоянии ЛТР кинематическая скорость частиц совпадает с их динамической скоростью и равна  $V^i$ . Плотность энергии частиц равна согласно (II.18)

$$\mathcal{E}(x) = \sum_a \mathcal{E}_a, \quad (\text{II.26})$$

а изотропное давление всех сортов частиц:

$$P(x) = \sum_a P_a, \quad (\text{II.27})$$

где  $\mathcal{E}_a$  и  $P_a$  описываются формулами (II.20) и (II.21).

Рассмотрим теперь Т-неинвариантные взаимодействия, предполагая, однако, что распределение частиц остается локально равновесным, т.е., (II.9). Но тогда вследствие (II.3) тождественно выполняются функциональные соотношения (II.2). Но тогда согласно (I.207) скорость изменения энтропии равна нулю, т.е., мы снова получаем условие ЛТР (II.1). Итак, энтропия системы всегда сохраняется, если распределение частиц является локально равновесным.

Обратимся теперь к уравнениям переноса (I.219). В условиях ЛТР вследствие (II.3) эти уравнения принимают более простую форму:

$$\begin{aligned} \nabla_i \sum_A \int_{\mathbb{P}} \psi f p^i d\pi - \sum_A \int_{\mathbb{P}} f [\mathcal{H}, \Psi] d\pi = \\ = - \sum_k \int_{\mathbb{P}} \delta^{(4)}(P_F - P_I) \sum_A \nu_A^k \psi_A Z_{if} (W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi. \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

## II.2. Уравнения релятивистской гидродинамики

Полагая, в частности,  $\psi_A = \delta_A^a$ , получим из (II.28):

$$\nabla_i n_a^i = - \sum_k \nu_A^k \int_P \delta^{(4)}(P_F - P_I) Z_{if} (W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi. \quad (\text{II.29})$$

Проведем в правой части (II.29) интегрирование по конечным состояниям частиц:

$$\sum \nu_A^k \int \prod_f (1 \pm f) (W_{if} - W_{fi}) d\pi_f.$$

Вследствие унитарности  $S$ -матрицы и оптической теоремы (I.194) этот интеграл равен нулю. Поэтому в условиях ЛТР имеет место закон сохранения каждого сорта частиц:

$$\nabla_i n_a^i = 0 \Leftrightarrow N_a = \text{Const}. \quad (\text{II.30})$$

## II.2 Уравнения релятивистской гидродинамики плазмы в гравитационном поле

Соотношения (II.28) - (II.30) в условиях ЛТР выполняются лишь приближенно. Действительно, для их строгого выполнения необходимо, чтобы функции распределения (II.9) или (II.14) являлись решениями кинетических уравнений (I.189), т.е., необходимо существование *глобального термодинамического равновесия, ГТР*, которое может быть реализовано лишь для узкого класса физических и гравитационных полей. Для существования же ЛТР достаточно, чтобы функции распределения (II.9) являлись лишь приближенными решениями кинетических уравнений. Обратимся к этим уравнениям, для начала полагая взаимодействия частиц  $T$ -инвариантными.

Будем полагать интеграл столкновений главным членом в уравнениях (I.189). Это подразумевает малость эффективного времени между столкновениями частиц сорта « $a$ » со всеми остальными частицами,  $\tau_a$ , по сравнению с четырехмерными размерами системы,  $L_g$ . Действительно, потребуем, чтобы характерный член в левой части кинетических уравнений (I.189) был в среднем гораздо меньше характерного члена в правой части кинетических уравнений, т.е.:

$$|\langle p^i \partial_i f_a \rangle| \ll \left\langle \left\langle f_a \sum_k \nu_a^k \int \prod' f_I d\pi_I \prod (1 \mp f_f) d\pi_F W_{if} \delta(P_I - P_F) \right\rangle \right\rangle. \quad (\text{II.31})$$

Учитывая связь матрицы рассеяния с дифференциальным сечением рассеяния (I.179), оценим порядок интеграла в правой части (II.31):

$$f_a \sum_k \nu_a^k \int f_b d\pi_b \sqrt{(p_a, p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \sigma_{tot},$$

где  $\sigma_{tot}$  - полное сечение взаимодействия  $a + b \rightarrow \sum \nu_B^k a_B$ . Введем эффективное время  $\tau_{ab}$  между столкновениями частиц сортов  $a$  и  $b$ :

$$\tau_{ab}^{-1} = \left\langle \left\langle (p_a, v) \int f_b \sqrt{(p_a, p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \sigma_{tot} d\pi_b \right\rangle \right\rangle, \quad (\text{II.32})$$

Глава II. Равновесие плазмы в гравитационном поле

Тогда соотношение (II.31) может быть переписано в более сжатой форме:

$$\tau_a \ll L_g, \quad (\text{II.33})$$

где

$$L_g = \max |v^i \partial_i \ln|, \quad (\text{II.34})$$

$$\tau_a^{-1} = \sum_b \tau_{ab}^{-1}. \quad (\text{II.35})$$

Под знак логарифма в (II.34) следует подставить максимально неоднородную макроскопическую характеристику системы. Из (II.32) следует оценка эффективного времени столкновений:

$$\tau_{ab}^{-1} \sim n_b \sigma_{eff} \langle v_{ab} \rangle, \quad (\text{II.36})$$

где  $\sigma_{eff} = \sigma_{tot}$  - эффективное сечение взаимодействий,  $v_{ab}$  - относительная скорость частиц  $a$  и  $b$ .

Таким образом, при выполнении (II.33) интеграл столкновений является главным членом в кинетических уравнениях (I.189), которые в нулевом приближении принимают вид:

$$I_a(x, P) = 0. \quad (\text{II.37})$$

Эти уравнения для  $\Gamma$ -инвариантных взаимодействий эквивалентны функциональным уравнениям (II.2), имеющими своими решениями локально равновесные функции распределения (II.9). Положим поэтому:

$$f_a(x, P_a) = \{ \exp[-\lambda_a + (\xi, P_a) + \phi_a] \mp 1 \}^{-1}, \quad (\text{II.38})$$

где  $\phi_a = \phi_a(x, P_a)$ , причем  $\langle \phi_a \rangle \ll 1$ . Имеет место следующее разложение функции (II.38) по малости  $\phi$ :

$$f_a(x, P_a) = f_a^0(x, P_a) - [f_a^0(x, P_a)]^2 e^{-\lambda_a + (\xi, P_a)} \phi_a + \dots$$

Подставляя (II.38) в кинетические уравнения (I.189), используя функциональные уравнения (II.12), соотношение (I.23), в линейном по  $\phi$  приближении получим интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{df_a^0}{d\lambda_a} \left[ \frac{(P^i - eA^i)(P^k - eA^k)}{1 + \frac{q\Phi}{m}} \frac{L}{\xi} g_{ik} - \frac{(P^i - eA^i)}{1 + \frac{q\Phi}{m}} (e \frac{L}{\xi} A_i + \lambda, i) - m q \frac{L}{\xi} \Phi \right] \\ = - \sum_k \nu_a^k \int \delta(P_F - P_I) \overset{0}{Z}_{if} \sum (W_{if} \phi_i - W_{fi} \phi_f) \prod_{f,i}^I d\pi. \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

В работах [7], [9], [10], [13] и других развиты методы приближенного интегрирования уравнений типа (II.39). При этом получают уравнения релятивистской гидродинамики

## II.2. Уравнения релятивистской гидродинамики

с учетом диссипативных процессов. Методы эти основаны на релятивистской модификации методов Грэда, Энскога - Чемпена и др. В данной главе мы ограничимся выводом уравнений идеальной гидродинамики плазмы.

Умножая уравнения (II.39) на соответствующий обобщенный импульс и интегрируя по импульсному пространству, получим вследствие сохранения суммарного 4-импульса уравнения (I.236), в которых, однако, ТЭИ частиц имеет структуру ТЭИ идеальной жидкости (II.8). С учетом этого факта уравнения (I.236) принимают вид:

$$\nabla_k \left[ \left( \mathcal{E} + \frac{P}{p} \right) v^i v^k \right] - \frac{P^{,i}}{p} - J_k F^{ik} - \sigma \Phi'^i + A^i J_{,k}^k = 0, \quad (\text{II.40})$$

где суммарные плотность энергии и давления частиц определяются формулами (II.20), (II.21), (II.26), (II.27);

$$J^i = \sum e_a n_a^i = v^i \sum e_a n_a; \quad (\text{II.41})$$

скаляр  $n_a(x)$  определен формулой (II.19).

Уравнениям (II.40) можно придать более удобный вид, для чего их следует свернуть с вектором макроскопической скорости частиц  $v^i$ . Тогда с учетом (II.41) и кососимметричности тензора  $F_{ik}$ , получим следствие:

$$\nabla_k \left[ \left( \mathcal{E} + \frac{P}{p} \right) v^k \right] - \sigma v^k \Phi_{,k} - (v, A) J_{,k}^k = 0, \quad (\text{II.42})$$

используя которое в (II.40), приведем уравнения гидродинамики к виду:

$$\left( \mathcal{E} + \frac{P}{p} \right) v^k v_{,k}^i - \left( \frac{P}{p} + \sigma \Phi_{,k} - A_k J_{,l}^l \right) (g^{ik} - v^i v^k) - J_k F^{ik} = 0. \quad (\text{II.43})$$

Уравнения (II.42), (II.43) необходимо рассматривать совместно с уравнениями поля (I.244), (I.249), (I.253) а также с определениями (I.257), (II.19) - (II.21) и (II.41).

В случае, когда вектор плотности тока связан с сохраняющимся зарядом  $g_A$ , мы получаем еще одно уравнение - закон сохранения векторного тока (I.226) - и, таким образом, самосогласованная система уравнений идеальной гидродинамики замыкается с точностью до определения *уравнения состояния*:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E} \left( \frac{P}{p} \right). \quad (\text{II.44})$$

В случае же, когда векторный ток не сохраняется, система уравнений идеальной гидродинамики остается незамкнутой. Действительно, законы сохранения числа частиц (II.30) являются лишь приближенными, верными в нулевом порядке теории возмущений. Уравнения же гидродинамики представляют собой уравнения первого порядка теории возмущений. В этом приближении закон «сохранения тока» определяется уже поправками  $\phi_a$  к равновесному распределению:

$$J_{,i}^i = - \sum_k \Delta e^k \int \delta(P_F - P_I) W_{if} \overset{0}{Z}_{if} \left( \sum \phi_I - \sum \phi_F \right) \prod_{i,f} d\pi, \quad (\text{II.45})$$

для определения которых необходимо решать интегральные уравнения (II.17). В случае Т-неинвариантных взаимодействий при условии сохранения векторного тока описанная выше система уравнений идеальной гидродинамики опять - таки справедлива вследствие закона «сохранения» суммарного ТЭИ (I.251). Однако, уравнения (II.17) в этом случае необходимо изменить добавлением в правую часть несимметричного члена:

$$- \sum \nu_a^k \int \delta(P_F - P_I) (\sum W_{if} \phi_I - \sum W_{fi} \phi_F) \prod' d\pi.$$

### II.3 Глобальное термодинамическое равновесие

В случае, когда функции распределения (II.9) (или (II.14)) являются точными решениями кинетических уравнений (I.189), статистическая система находится в строгом *глобальном термодинамическом равновесии* (ГТР). В условиях ГТР выполняются строгие законы сохранения частиц каждого сорта (II.30), и энтропия системы строго постоянна  $S = \text{Const}$ . Для нахождения условий ГТР подставим решения (II.9) в кинетические уравнения (I.189). Поскольку интеграл взаимодействий обращается в нуль на локально равновесных распределениях, приведем (I.189) к виду:

$$[\mathcal{H}_a, \phi_a] = 0, \quad (\text{II.46})$$

где:

$$\phi_a(x, P) \stackrel{def}{=} (\xi, P) - \lambda_a(x).$$

Таким образом, для обеспечения ГТР должен существовать линейный интеграл движения, причем  $\xi^i$  - времениподобный вектор.

Разрешая (II.46), получим систему необходимых и достаточных условий существования ГТР [66], [69]:

$$\mathbb{L}_\xi g_{ik} = \sigma g_{ik}; \quad (\text{II.47})$$

$$m_a \left[ (m_a + q_a \Phi) \sigma + q_a \mathbb{L}_\xi \Phi \right] = 0; \quad (\text{II.48})$$

$$e_a \mathbb{L}_\xi A_i = \lambda_{a,i}. \quad (\text{II.49})$$

Условия (II.47), (II.48) совпадают с условиями (I.30) существования линейного интеграла движения (I.27); условия (II.49) отличаются от соответствующих условий (I.29).

В случае, когда  $m_a \neq 0$ , получим из (II.47):

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{L}_\xi g_{ik} (m_a + q_a \Phi) &= 0; \\ e_a \mathbb{L}_\xi A_i &= \lambda_{a,i} \end{aligned} \right\} (m_a \neq 0). \quad (\text{II.50})$$

### II.3. Глобальное термодинамическое равновесие

Для системы безмассовых частиц  $m_a \equiv 0$  эти условия заменяются следующими:

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{L}_\xi \sigma g_{ik} &= 0; \\ e_a \mathbb{L}_\xi A_i &= \lambda_{,i}^a \end{aligned} \right\} (m_a \equiv 0). \quad (\text{II.51})$$

Если же в равновесии находится более одного сорта частиц, (II.50) заменяются более жесткими условиями [66]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{L}_\xi g_{ik} &= 0; \\ \mathbb{L}_\xi \Phi &= 0; \\ e_a \mathbb{L}_\xi A_i &= \lambda_{,i}^a \end{aligned} \right\} (m_a \neq 0). \quad (\text{II.52})$$

Вследствие условий на векторный потенциал, которые справедливы во всех случаях, выполняется закон сохранения модифицированного химического потенциала [66]:

$$\mathbb{L}_\xi \lambda_a' = 0; \quad (\lambda_a' = \lambda_{,a} - e_a(\xi, A)). \quad (\text{II.53})$$

Поскольку все моменты равновесной функции распределения определяются с помощью скаляров  $\xi^2$ ,  $\lambda_a'$ ,  $\Phi$  и тензоров  $\xi^i$ ,  $g^{ik}$ ,  $\xi^i \xi^k$ , ..., то выполняются и законы сохранения моментов функции распределения [66]:

$$\mathbb{L}_\xi n_a^i = 0; \quad (\text{II.54})$$

$$\mathbb{L}_\xi J^i = 0; \quad (\text{II.55})$$

$$\mathbb{L}_\xi T^{ik} = 0 \quad (\text{II.56})$$

и т.д. В [46], [70] показано, что необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнений (II.53) относительно  $\lambda_a$  являются:

$$\mathbb{L}_\xi F_{ij} = 0. \quad (\text{II.57})$$

Для доказательства (II.57) достаточно вычислить вторые смешанные производные от обеих частей уравнения:

$$e_a \mathbb{L}_\xi A_i = \lambda_{,i}^a$$

и приравнять их. После коммутации производных Ли и ковариантных производных получим (II.57).

Вследствие первой группы уравнений (II.52) вдоль направления  $\xi^i$  сохраняются компоненты тензора Римана, Риччи и тензора Эйнштейна:

$$\mathbb{L}_\xi R_{ijkl} = 0; \quad \mathbb{L}_\xi R_{ij} = 0; \quad \mathbb{L}_\xi G_{ij} = 0. \quad (\text{II.58})$$

## Глава II. Равновесие плазмы в гравитационном поле

Поэтому вследствие уравнений Эйнштейна должны выполняться соотношения:

$$\mathbb{L}_{\xi} T_{ij} = 0, \quad (\text{II.59})$$

где  $T_{ij}$  определяется формулой (I.252). Нетрудно увидеть, что вследствие второй группы условий (II.52) а также (II.58):

$$\mathbb{L}_{\xi} T^{ik} = 0. \quad (\text{II.60})$$

Но тогда вследствие (II.59) и (II.56) должно быть:

$$\mathbb{L}_{\xi} T^{ik} = 0. \quad (\text{II.61})$$

Вычисляя производную Ли от (I.241) с учетом (II.57) и (II.61), получим:

$$\frac{\mu_v^2}{4\pi} \left\{ A^i \mathbb{L}_{\xi} A^k + A^k \mathbb{L}_{\xi} A^i - g^{ik} A^j \mathbb{L}_{\xi} A_j \right\} = 0. \quad (\text{II.62})$$

Полагая  $\mu_v \neq 0$ , получим из (II.62) систему уравнений для определения векторов  $a^i \stackrel{def}{=} \mathbb{L}_{\xi} A^i$ :

$$a_j (A^i g^{kj} + A^k g^{ij} - g^{ik} A^j) = 0. \quad (\text{II.63})$$

Сворачивая (II.63) с помощью  $g_{ik}$ , найдем следствие:

$$(a, A) = 0, \quad (\text{II.64})$$

с помощью которого уравнения (II.63) приводятся к более простой форме:

$$A^i a^j + A^j a^i = 0. \quad (\text{II.65})$$

Единственным решением этой системы уравнений является тривиальное:  $a^i \equiv 0$ .

Поэтому при  $\mu_v \neq 0$ :

$$\mathbb{L}_{\xi} A_i = 0. \quad (\text{II.66})$$

Если же  $\mu_v \equiv 0$ , т.е., векторное поле является безмассовым, то подходящей градиентной перенормировкой векторного потенциала всегда можно добиться выполнения условия (II.66) (см. [70]). Таким образом, в условиях ГТР статистической системы, в которой имеются массивные частицы, выполняется соотношение:

$$\lambda_a = \text{Const}. \quad (\text{II.67})$$

*Таким образом, в статистической системе заряженных частиц, находящейся в глобальном термодинамическом равновесии в гравитационном поле, полный химический потенциал каждого сорта частиц постоянен.*

Перечисленные выше условия являются необходимыми и достаточными условиями глобального термодинамического равновесия статистической системы, содержащей массивные частицы. Поскольку вектор  $\xi^i$  является времениподобным и в то же время - вектором Кииллинга, статистическая система, содержащая массивные частицы, может находиться в состоянии глобального термодинамического равновесия лишь при условии стационарности всех полей.

## II.4 Глобальное термодинамическое равновесие самогравитирующей плазмы

Задача о равновесных макроскопических движениях (т.е., о движениях, не выводящих систему из состояния ГТР) была поставлена автором [46] и полностью решена в последующих работах [70], [69]. Согласно результатам предыдущих разделов, самосогласованная система уравнений, описывающих гравитационное и электромагнитное поля равновесного ансамбля релятивистских частиц, имеет вид:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi \left( T_p^{ik} + T_f^{ik} \right) \equiv 8\pi T^{ik}; \quad (\text{II.68})$$

$$F^{ik}_{,k} = -4\pi J^i; \quad (\text{II.69})$$

$$\overset{*}{F}{}^{ik}_{,k} = 0, \quad (\text{II.70})$$

где  $T_p^{ik}$  и  $J^i$  определяются выражениями (II.17), (II.18), (II.20), (II.21), (II.22), (II.41), в которых:

$$n_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp[-\lambda - e_a(\xi, A) + \theta^{-1}\sqrt{m_a^2 + p^2}] \pm 1}; \quad (\text{II.71})$$

$$\mathcal{E}(x) = \sum_a \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 \sqrt{m_a^2 + p^2} dp}{\exp[-\lambda - e_a(\xi, A) + \theta^{-1}\sqrt{m_a^2 + p^2}] \pm 1}; \quad (\text{II.72})$$

$$P(x) = \sum_a \frac{\rho}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{\exp[-\lambda - e_a(\xi, A) + \theta^{-1}\sqrt{m_a^2 + p^2}] \pm 1}, \quad (\text{II.73})$$

причем:

$$\lambda_a = \text{Const}; \quad \int_\xi A_i = 0. \quad (\text{II.74})$$

Согласно результатам предыдущего раздела вектор  $\xi^i$  является времениподобным вектором Киллинга, т.е., пространство - время должно допускать группу движений, подгруппой которой является движение вдоль линий времени. Допустим, что  $X_4$  допускает группу движений  $G^r$  порядка  $r \geq 1$  с векторами  $\xi_\lambda^i(x)$  ( $\lambda = \overline{1, r}$ ):

$$\xi_\lambda^{i,k} + \xi_\lambda^{k,i} = 0. \quad (\text{II.75})$$

Тогда вектор Киллинга  $\xi^i(x)$ , определяющий макроскопическую скорость  $v^i = \xi^i/\xi$  и температуру системы  $\theta = \xi^{-1}$ , является линейной комбинацией векторов  $\xi_\lambda^i$ :

$$\xi^i = \sum_{\lambda=1}^r \alpha_\lambda \xi_\lambda^i; \quad (\alpha_\lambda = \text{Const}). \quad (\text{II.76})$$

## Глава II. Равновесие плазмы в гравитационном поле

Возникает вопрос, каковы постоянные  $\alpha_\lambda$ , т.е., каковы равновесные макроскопические движения плазмы? Если плазма является пробной, т.е., рассматривается на фоне заданного гравитационного поля, то значения констант  $\alpha_\lambda$  произвольны и ограничены лишь требованием времениподобности вектора  $\xi^i$ . Если же гравитационное поле само порождено плазмой, ситуация радикально меняется. Действительно, в этом случае вследствие уравнений Эйнштейна (II.68) и уравнений Киллинга (II.75):

$$\underset{\xi}{L}_\lambda T^{ik} \stackrel{def}{=} \underset{\lambda}{L} T^{ik} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.77})$$

В [71] показано, что в случае, когда ТЭИ вещества имеет структуру ТЭИ идеальной жидкости, симметрия пространства - времени наследуется отдельно идеальной жидкостью и электромагнитным полем, т.е., в этом случае из (II.77) следует:

$$\underset{\lambda p}{L} T^{ik} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}), \quad (\text{II.78})$$

$$\underset{\lambda f}{L} T^{ik} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.79})$$

Условия (II.78), (II.79) налагают жесткие ограничения на допустимые равновесные движения плазмы и структуру ее электромагнитного поля. В случае  $r = 1$  вектор  $\xi^i$  с точностью до постоянного множителя совпадает с касательным вектором к траекториям группы  $G^1$ ; условия (II.78), (II.79) при этом выполняются автоматически вследствие (II.59), (II.61) и (II.66).

Рассмотрим поэтому случай  $r > 1$ . Обратимся сначала к условиям (II.78). Вычисляя производную Ли от (II.18), получим:

$$\xi^i \xi^k \underset{\lambda}{L} (\mathcal{E} + P) + \xi^{(i} \bar{\xi}^{k)} (\mathcal{E} + P) - 2(\bar{\xi}, \xi) \frac{\xi^i \xi^k}{\xi^2} (\mathcal{E} + P) - g^{ik} \underset{\lambda}{L} P = 0$$

$$(\lambda = \overline{1, r}), \quad (\text{II.80})$$

где введено обозначение:

$$\bar{\xi}^i \stackrel{def}{=} \underset{\lambda}{L} \xi^i. \quad (\text{II.81})$$

Предположим, что хотя бы при одном фиксированном  $\lambda = p$   $\underset{p}{L} P \neq 0$ ; тогда согласно (II.80) метрический тензор  $g^{ik}$  может быть разложен по двум векторам  $\xi^i$  и  $\bar{\xi}^i$ . Но в этом случае метрический тензор вырожден ( $g = 0$ ), чего не должно быть.

Следовательно, при любых  $p = \lambda$  имеет место соотношение:

$$\underset{\lambda}{L} P = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.82})$$

Но тогда вследствие (II.80) должны выполняться условия:

$$\xi^i \xi^k \left[ \underset{\lambda}{L} (\mathcal{E} + P) - 2(\bar{\xi}, \xi) \frac{\xi^i \xi^k}{\xi^2} (\mathcal{E} + P) \right] + \xi^{(i} \bar{\xi}^{k)} (\mathcal{E} + P). \quad (\text{II.83})$$

#### II.4. ГТР самогравитирующей плазмы

Поскольку  $(\mathcal{E} + P) > 0$  (имеются ввиду плотность энергии и давление «голых» частиц), из (II.83) следует:

$$\xi_{\lambda}^{(i \bar{\xi}^k)} = -\xi^i \xi^k \left[ \underset{\lambda}{L} \ln(\mathcal{E} + P) - 2 \frac{(\xi, \bar{\xi})_{\lambda}}{\xi^2} \right]; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.84})$$

Сворачивая (II.84) с  $\xi^i$  с учетом времениподобности этого вектора, найдем:

$$\bar{\xi}_{\lambda}^i = -\xi^i \left[ \underset{\lambda}{L} \ln(\mathcal{E} + P) - \frac{(\xi, \bar{\xi})_{\lambda}}{\xi^2} \right]; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.85})$$

Сворачивая (II.85) еще раз, получим:

$$\underset{\lambda}{L} \ln(\mathcal{E} + P) = 0,$$

откуда вследствие (II.82) найдем:

$$\underset{\lambda}{L} \mathcal{E} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.86})$$

Используя (II.86) и (II.82) в (I.111), получим:

$$\bar{\xi}_{\lambda}^i = \frac{(\xi, \bar{\xi})_{\lambda}}{\xi^2} \xi^i; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.87})$$

Уравнения (II.87) можно также записать в виде:

$$\bar{\xi}_{\lambda}^k (g_{ik} - v_i v_k) = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.88})$$

Обратимся теперь к уравнениям (II.82) и (II.86). Согласно (II.72) и (II.73) скаляры  $\mathcal{E}(x)$  и  $P(x)$  могут зависеть от координат лишь посредством двух скаляров:  $(\xi, A) \equiv A_{\xi}$  и  $\xi$ . Поэтому уравнения (II.82) и (II.86) могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \underset{\lambda}{L} \xi + \frac{\partial P}{\partial A_{\xi}} \underset{\lambda}{L} A_{\xi} = 0; \quad (\text{II.89})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} \underset{\lambda}{L} \xi + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_{\xi}} \underset{\lambda}{L} A_{\xi} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.90})$$

Соотношения (II.89) и (II.90) можно рассматривать как систему однородных алгебраических уравнений относительно переменных  $\underset{\lambda}{L} \xi$  и  $\underset{\lambda}{L} A_{\xi}$ . Тогда, если определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial \xi} & \frac{\partial P}{\partial A_{\xi}} \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_{\xi}} \end{vmatrix}$$

Глава II. Равновесие плазмы в гравитационном поле

отличен от нуля, то (II.89), (II.90) имеют лишь тривиальные решения:

$$\mathbb{L}_\lambda \xi = 0; \quad (\text{II.91})$$

$$\mathbb{L}_\lambda (\xi, A) \equiv \mathbb{L}_\lambda A_\xi = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.92})$$

Но тогда вследствие тождества:

$$\mathbb{L}_\lambda \xi = \xi^{-1}(\bar{\xi}, \xi) \quad (\text{II.93})$$

(II.87) дает:

$$\bar{\xi}_\lambda^i \equiv \mathbb{L}_\lambda \xi^i = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.94})$$

Если же  $\Delta \equiv 0$ , мы получаем соотношение:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_\xi} - \frac{\partial P}{\partial A_\xi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} = 0. \quad (\text{II.95})$$

Рассматривая (II.95) как дифференциальное уравнение относительно функции, например,  $P(x)$ , найдем его общее решение:

$$P = P(\mathcal{E}), \quad (\text{II.96})$$

которое означает, что функции  $\xi(x)$  и  $A_\xi(x)$  связаны алгебраическим соотношением:

$$A_\xi = \Psi(\xi).$$

Но тогда скаляры  $P(x)$  и  $\mathcal{E}(x)$  либо зависят от координат лишь посредством инварианта  $\xi$ , либо вообще не зависят от координат, т.е.,  $\xi = \text{Const}$ . И в первом и во втором случаях мы снова приходим к условиям (II.91), (II.92), (II.94).

*Таким образом, условия (II.91), (II.92), (II.94) являются необходимыми и достаточными условиями выполнения (II.78).*

Отметим, что (II.94) можно также записать в виде [46]:

$$\sum_{\lambda' \neq \lambda} (\xi^i \xi^k)_{[\lambda \lambda']} = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}), \quad (\text{II.97})$$

или, вводя генераторы группы [53]

$$X_\lambda = \xi_\lambda^i \partial_i,$$

перепишем условия (II.97) в более компактном виде:

$$[X, X_\lambda] = 0, \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.98})$$

Последние условия означают, что оператор

$$X = \xi^i \partial_i \quad (\text{II.99})$$

является центром группы.

#### II.4. ГТР самогравитирующей плазмы

Таким образом, равновесные макроскопические поля тяготения ансамбля заряженных частиц должны допускать группу движений, обладающей временноподобным центром.

Обратимся теперь к условиям (II.78) на ТЭИ электромагнитного поля. В [71] показано, что для выполнения (II.78) необходимо и достаточно выполнение условий :

$$\mathbb{L}_\lambda F_{ik} = b_\lambda {}^* F_{ik}, \quad (\text{II.100})$$

где  $b_\lambda(x)$  - произвольные скалярные функции. Свертывая (II.100) с дискриминантным тензором, получим следствие [70]:

$$\mathbb{L}_\lambda {}^* F_{ik} = -b_\lambda F_{ik}. \quad (\text{II.101})$$

Свернем соотношения (II.100) и (II.101) с вектором макроскопической скорости  $\xi^i/\xi$ , учитывая при этом (II.94):

$$\mathbb{L}_\lambda E_i = b_\lambda H_i; \quad (\text{II.102})$$

$$\mathbb{L}_\lambda H_i = -b_\lambda E_i, \quad (\text{II.103})$$

где введены обозначения [72]:

$$E_i = \frac{\xi^k}{\xi} F_{ki} \equiv v^k F_{ki}; \quad (\text{II.104})$$

$$H_i = \frac{\xi^k}{\xi} {}^* F_{ki}. \quad (\text{II.105})$$

Векторы  $E_i$  и  $H_i$  являются векторами напряженности электрического и магнитного полей в сопутствующей с плазмой системе отсчета. Важно отметить, что вследствие временноподобности вектора  $\xi^i$  компоненты тензора Максвелла однозначно выражаются через наблюдаемые  $E_i$  и  $H_i$  [72]:

$$F_{ik} = \frac{1}{\xi} \left[ \xi_i E_k - \xi_k E_i - \eta_{iklm} \xi^l H^m \right]. \quad (\text{II.106})$$

Отметим также, что согласно (II.104), (II.105):

$$(E, \xi) = 0; \quad (H, \xi) = 0. \quad (\text{II.107})$$

Рассмотрим, например, соотношение (II.102). Выполняя тождественные преобразования с учетом (II.91), (II.92), получим:

$$\mathbb{L}_\lambda E_i \equiv \xi^{-1} \mathbb{L}_\lambda F_{ki} \xi^k = \xi^{-1} \mathbb{L}_\lambda (A_{i,k} - A_{k,i}) \xi^k.$$

Глава II. Равновесие плазмы в гравитационном поле

Используя условия (II.52) и (II.66), запишем:

$$(A_{i,k} - A_{k,i})\xi^k \equiv A_{i,k}\xi^k - \xi^k{}_{,i}A_k - \partial_i A_\xi \equiv \underset{\xi}{L} - \partial_i A_\xi = -\partial_i A_\xi .$$

Таким образом:

$$\underset{\lambda}{L} E_i = -\xi^{-1} \underset{\lambda}{L} \nabla_i A_\xi \equiv -\xi^{-1} \nabla_i \underset{\lambda}{L} A_\xi = 0 , \quad (\text{II.108})$$

и соотношения (II.102) принимают вид:

$$b_\lambda H_i = 0 . \quad (\text{II.109})$$

Пусть сначала  $b_\lambda \neq 0$  и  $H_i = 0$ . Но тогда из (II.103) сразу следует:

$$E_i = 0 ,$$

или, согласно (II.106):

$$F_{ik} = 0 , \quad (\text{II.110})$$

т.е., электромагнитное поле отсутствует. Если же тензор Максвелла отличен от нуля, то остается второй вариант:  $b_\lambda = 0$ , т.е.:

$$\underset{\lambda}{L} F_{ik} = 0 ; \quad (\lambda = \overline{1, r}) . \quad (\text{II.111})$$

Очевидно, что (II.111) включает в себя как частный случай и (II.110).

Таким образом, мы доказали, что:

*Необходимыми и достаточными условиями выполнения (II.77) являются (II.94) и (II.111).*

Условия (II.92) и (II.93) являются следствиями указанных двух. Заметим, что вследствие (II.91) и (II.94) вдоль траекторий группы сохраняется и вектор макроскопической скорости системы:

$$\underset{\lambda}{L} v^i = 0 ; \quad (\lambda = \overline{1, r}) . \quad (\text{II.112})$$

В [46] приведены примеры равновесных гравитирующих конфигураций при  $r = 2$  и  $r = 4$ . В [73], [74] с помощью классификации Петрова [53] полей тяготения по группам движений был произведен отбор равновесных полей тяготения согласно условиям (II.98) и показано, что порядок группы движений не может больше 5, причем  $G^5$  допускается лишь в специальном случае:  $\mathcal{E} = -P = \text{Const}$ .

Следует отметить, что для статистических систем с массивным векторным взаимодействием частиц аналогичные утверждения до сих пор не доказаны.

## II.5 Глобальное термодинамическое равновесие самогравитирующей системы со скалярным взаимодействием частиц

Этот случай был рассмотрен в [69]. Условия глобального равновесия принимают вид:

$$\lambda_a = \text{Const}; \quad \mathbb{L}_\xi \Phi = 0; \quad \mathbb{L}_\xi g_{ik} = 0. \quad (\text{II.113})$$

Плотность энергии и давление плазмы определяются формулами (II.20) и (II.21), в которых следует положить:  $A_i = 0$ , т.е., определяются двумя скалярами  $\xi(x)$  и  $\Phi(x)$ . В целях общности изложения рассмотрим неконформно инвариантное скалярное поле.<sup>1</sup> Вычисляя производную Ли от суммарного ТЭИ, получим:

$$\begin{aligned} \xi_i \xi_k \mathbb{L}_\lambda \left( \frac{\mathcal{E} + P}{\xi^2} \right) + \left( \bar{\xi}_\lambda^i \xi_k + \bar{\xi}_\lambda^k \xi_i \right) \frac{\mathcal{E} + P}{\xi^2} + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left( \Phi_{,\lambda}^i \Phi_{,k} + \Phi_{,\lambda}^k \Phi_{,i} \right) - \\ - g_{ik} \left[ \mathbb{L}_\lambda P + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left( \Phi^{,j} \Phi_{,\lambda}^j - \mu_s^2 \Phi \Phi \right) \right] = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}), \end{aligned} \quad (\text{II.114})$$

где:

$$\Phi_{,\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_\lambda \Phi; \quad \Phi_{,\lambda,i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_{\lambda,i} \Phi = \partial_i \Phi_{,\lambda}; \quad (\text{II.115})$$

$\epsilon_s = \pm 1$  (плюс и минус соответствуют отталкивающимся и притягивающимся барионам).

В случае, если:

$$\mathbb{L}_\lambda P + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left( \Phi^{,j} \Phi_{,\lambda}^j - \mu_s^2 \Phi \Phi \right) \neq 0,$$

при каждом фиксированном  $\lambda$ , то метрический тензор может быть выражен, как нетрудно убедиться, через три вектора, но в этом случае он вырожден (т.е.,  $g = 0$ ), чего не должно быть. Из (II.77) следует тогда, что должны выполняться 11r условий:

$$\mathbb{L}_\lambda P + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left( \Phi^{,j} \Phi_{,\lambda}^j - \mu_s^2 \Phi \Phi \right) = 0; \quad (\text{II.116})$$

$$\begin{aligned} \xi_i \xi_k \mathbb{L}_\lambda \frac{\mathcal{E} + P}{\xi^2} + \left( \bar{\xi}_\lambda^i \xi_k + \bar{\xi}_\lambda^k \xi_i \right) + \\ + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left( \Phi_{,\lambda}^i \Phi_{,k} + \Phi_{,\lambda}^k \Phi_{,i} \right) = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \end{aligned} \quad (\text{II.117})$$

Свертывая (II.117) с  $\xi^i \xi^k$  и учитывая (II.113), получим:

$$\mathbb{L}_\lambda (\mathcal{E} + P) = 0, \quad (\text{II.118})$$

а свертывая (II.117) с  $\xi^i \Phi^k$ , учитывая (II.113) и очевидное соотношение:

$$\left( \bar{\xi}_\lambda, \Phi \right) = \left( \xi, \Phi \right),$$

<sup>1</sup>Для случая конформно инвариантного скалярного поля результаты не нуждаются в исправлении.

Глава II. Равновесие плазмы в гравитационном поле

получим:

$$\left(\bar{\xi}, \Phi\right)_{\lambda} \left[ \mathcal{E} + P - \frac{\epsilon_s}{4\pi}(\Phi, \Phi) \right] = 0. \quad (\text{II.119})$$

Свертка (II.117) с  $\Phi'^i \Phi^{,k}$  приводит к результату:

$$(\Phi, \Phi)_{\lambda}(\Phi, \Phi) = 0. \quad (\text{II.120})$$

Для решения (II.119) предположим сначала:

$$(\xi, \Phi)_{\lambda} = 0. \quad (\text{II.121})$$

Тогда свертывая (II.117) с  $\xi^k$  и учитывая очевидное соотношение:

$$\mathbb{L}_{\lambda} \xi^2 = 2(\xi, \bar{\xi})_{\lambda},$$

найдем:

$$\bar{\xi}_{\lambda}^i = \frac{\xi_i}{\xi} \mathbb{L}_{\lambda} \xi, \quad (\text{II.122})$$

откуда получим:

$$\mathbb{L}_{\lambda} v_i = 0 \quad (\text{II.123})$$

и приведем уравнение (II.117) к виду:

$$\Phi_{\lambda}^i \Phi_{,k} + \Phi_{\lambda}^k \Phi_{,i} = 0. \quad (\text{II.124})$$

В случае:

$$\Phi_{,i} \neq 0 \quad (\text{II.125})$$

единственным решением (II.124) является:

$$\Phi_{\lambda}^i = 0. \quad (\text{II.126})$$

Тогда (II.116) сводится к соотношению:

$$\mathbb{L}_{\lambda} \left( P - \frac{\epsilon_s \mu_s^2}{8\pi} \Phi^2 \right) = 0. \quad (\text{II.127})$$

Рассмотрим другой вариант решения уравнения (II.119):

$$\mathcal{E} + P - \frac{\epsilon_s}{4\pi}(\Phi, \Phi) = 0; \quad (\text{II.128})$$

тогда из (II.117) получим:

$$(\Phi, \Phi)_{\lambda} = 0. \quad (\text{II.129})$$

## II.5. ГТР систем со скалярным взаимодействием

Свертывая (II.117) с  $\Phi_{,\lambda}^{\cdot,k}$  и учитывая (II.128) и (II.129), найдем:

$$(g^{ik} - v^i v^k) \Phi_{,\lambda}^{\cdot,k} = 0. \quad (\text{II.130})$$

Используя (II.113) найдем из (II.130)  $\Phi_{,\lambda}^{\cdot,k} = 0$ , т.е., снова приходим к (II.122), (II.123), (II.126) и (II.127).

Согласно (II.116), (II.117) скаляры  $\mathcal{E}$  и  $P$  могут зависеть от координат лишь посредством функций  $\xi(x)$  и  $\Phi(x)$ . Из уравнений (II.118) и (II.127) получим систему однородных алгебраических уравнений относительно  $\Phi$  и  $\xi$ :

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \bar{\xi}_{,\lambda} + \left( \frac{\partial P}{\partial \Phi} - \frac{\epsilon_s \mu_s^2}{4\pi} \Phi \right) \Phi_{,\lambda} = 0; \quad (\text{II.131})$$

$$\frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial \xi} \bar{\xi}_{,\lambda} + \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial \Phi} \Phi_{,\lambda} = 0. \quad (\text{II.132})$$

В случае, если определитель этой системы отличен от нуля, получаем:

$$\Phi \equiv \mathbb{L}_{\lambda} \Phi = 0; \quad (\text{II.133})$$

$$\bar{\xi} \equiv \mathbb{L}_{\lambda} \xi = 0. \quad (\text{II.134})$$

Но тогда из (II.118), (II.122), (II.124) и (II.134) следует:

$$\mathbb{L}_{\lambda} \mathcal{E} = 0; \quad \mathbb{L}_{\lambda} P = 0; \quad (\text{II.135})$$

$$\mathbb{L}_{\lambda} \xi = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (\text{II.136})$$

В случае же равенства нулю определителя системы (II.131) - (II.132) легко показать, что:

$$\Phi = \Phi(\xi); \quad \mathcal{E} + P = \text{Const}.$$

Из (II.20), (II.21) вытекает, что это возможно лишь при  $\xi = \text{Const}$ , но тогда и  $\Phi = \text{Const}$ , т.е., вновь получаем условия (II.133) - (II.136). Достаточность же этих условий для сохранения суммарного ТЭИ при движении вдоль траекторий  $G^r$  проверяется элементарно.

Таким образом и *глобальное равновесие самогравитирующей статистической системы со скалярным взаимодействием частиц возможно лишь в том случае, когда пространство - время допускает группу движений с временноподобным центром, вдоль которого происходит макроскопическое движение системы.*

## Глава III

# Кинетические процессы с элементарными частицами на ранних стадиях космологического расширения

### III.1 Асимптотическая конформная инвариантность кинетической теории в ультрарелятивистском пределе

Возможность поддержания глобального термодинамического равновесия в ультрарелятивистской расширяющейся плазме тесно связана с асимптотической конформной инвариантностью кинетической теории в ультрарелятивистском пределе [52]. Выясним трансформационные свойства скобок Пуассона (I.14) по отношению к конформным преобразованиям метрического пространства  $V_4$ . Наряду с Римановым  $V_4$  в общей координатной  $\{x^i\}$  рассмотрим конформно ему соответствующее риманово  $\bar{V}_4$ :

$$d\bar{s}^2 = a^2 ds^2. \quad (\text{III.1})$$

Предположим, что при таком преобразовании потенциалы физических полей преобразуются следующим образом:

$$\bar{\Phi} = \Phi/a; \quad \bar{A}_i = A_i + \partial_i \varphi, \quad (\text{III.2})$$

где  $\varphi(x)$  — скалярная функция, выбранная таким образом, чтобы при конформном преобразовании не изменялось калибровочное условие, налагаемое на векторный потенциал. Связь между каноническими переменными  $\mathbb{P}_i$  и  $\bar{\mathbb{P}}_i$  выберем в виде [52]

$$\bar{\mathbb{P}}_i = \mathbb{P}_i - e \partial_i \varphi. \quad (\text{III.3})$$

Функция Гамильтона (I.20) после преобразований (III.1) — (III.3) принимает вид

$$\bar{\mathcal{H}}(x, \mathbb{P}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{g^{ik} (\mathbb{P}_i - e A_i) (\mathbb{P}_k - e A_k)}{a^2 (1 + q\Phi/am)} - \frac{mq\Phi}{a} \right], \quad (\text{III.4})$$

### III.1. Конформная инвариантность кинетической теории

а соответствующая скобка Пуассона равна

$$\begin{aligned} [\bar{\mathcal{H}}, \bar{\psi}] = & a^{-1}(a + q\Phi/m)^{-1} \left\{ g^{ik}(\mathbb{P} - eA_i) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \partial_i \left[ g^{lm}(\mathbb{P}_l - eA_l)(\mathbb{P}_m - eA_m) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbb{P}_i} \right] \right\} + \frac{m}{a} \partial_i \left( a + \frac{q\Phi}{m} \right) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbb{P}_i}. \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Из (III.4) следует соотношение нормировки

$$g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k) = m^2 \left( a + \frac{q\Phi}{m} \right)^2. \quad (\text{III.6})$$

При наличии в системе скалярного поля  $\Phi(x) \neq 0$  ультрарелятивистское состояние необходимо понимать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{P} & \gg m \quad ; \quad |q\bar{\Phi}| \gg m; \\ P & \gg am \quad ; \quad |q\Phi| \gg am, \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

— в этом состоянии соотношение нормировки для обобщенного импульса не изменяется при конформном отображении (III.1) — (III.3):

$$g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k) = q^2\Phi^2; \quad (\text{III.7}), \quad (\text{III.8})$$

а функция Гамильтона (III.4) преобразуется по закону

$$\bar{\mathcal{H}}(x, \bar{\mathbb{P}}) = a^{-1} \mathcal{H}(x, \mathbb{P}), \quad (\text{III.9})$$

где  $\mathcal{H}(x, \mathbb{P})$  — функция Гамильтона в  $V_4$  при  $m \rightarrow 0$

$$\mathcal{H}(x, \mathbb{P}) = \frac{m}{2} \left[ \frac{g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k)}{q\Phi} - q\Phi \right]. \quad (\text{III.10})$$

Переходя в (III.5) к пределу  $am \rightarrow 0$ , получим

$$[\bar{\mathcal{H}}, \bar{\psi}] = a^{-1} [\mathcal{H}, \bar{\psi}] + O^2(am); \quad (|q\Phi| \gg am). \quad (\text{III.11})$$

Если скалярное поле отсутствует, соотношения (III.8) — (III.10) в ультрарелятивистском пределе необходимо заменить на следующие [52]:

$$g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k) = 0; \quad (|q\Phi| \ll am), \quad (\text{III.12})$$

$$\bar{\mathcal{H}}(x, \bar{\mathbb{P}}) = a^{-2} \mathcal{H}(x, \mathbb{P}) = (2a^2)^{-1} g^{ik}(\mathbb{P}_i - eA_i)(\mathbb{P}_k - eA_k); \quad (\text{III.13})$$

$$[\bar{\mathcal{H}}, \bar{\psi}] = a^{-2} [\mathcal{H}, \bar{\psi}] + O^2(am). \quad (\text{III.14})$$

Выясним теперь трансформационные свойства уравнений Власова в ультрарелятивистском пределе, для чего получим сначала асимптотические законы преобразования моментов функции распределения (I.113) — (I.116). Согласно (III.11) и (III.14) —

Бесстолкновительные кинетические уравнения в ультррелятивистском пределе инвариантны относительно преобразований (III.1) — (III.3) как в случае сильных, так и слабых скалярных полей [52].

Таким образом, если  $f(x, \mathbb{P})$  — решение бесстолкновительного кинетического уравнения в  $V_4$ , то асимптотическим решением этого уравнения в конформно соответствующем  $\bar{V}_4$  будет  $\bar{f}(x, \mathbb{P}) = f(x, \mathbb{P}) + O^2(am)$  [52]. Элемент объема пространства импульсов в соответствии с (III.11), (III.14) преобразуется по закону

$$d\bar{\mathbb{P}} \cdot \delta(\bar{\mathcal{H}}) = \begin{cases} a^{-3}d\mathbb{P} \cdot \delta(\mathcal{H}); & |q\Phi| \gg am; \\ a^{-2}d\mathbb{P} \cdot \delta(\mathcal{H}); & |q\Phi| \ll am. \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Законы же преобразования моментов функции распределения оказываются одинаковыми в этих двух крайних случаях [52]:

$$\begin{aligned} \bar{T}_p^{ik} &= a^{-6}T_p^{ik} + O^2(am); \\ \bar{n}^i &= a^{-4}n^i + O^2(am). \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Закон преобразования плотности скалярного заряда имеет вид:

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} a^{-3}\sigma; & |q\Phi| \gg am; \\ a^{-2}\sigma; & |q\Phi| \ll am. \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Преобразуя теперь полевые уравнения для потенциалов  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{A}_i$ , на фоне заданного гравитационного поля  $\bar{g}_{ik}$

$$\bar{\nabla}_k \bar{F}^{ik} = -4\pi \bar{j}^i; \quad \bar{\nabla}_i \bar{F}_{kl} = 0; \quad (\text{III.18})$$

$$\bar{\Delta}_2 \bar{\Phi} - \frac{\bar{R}}{6} \bar{\Phi} + \lambda \bar{\Phi}^3 = -4\pi \bar{\sigma}, \quad (\text{III.19})$$

в которых вектор плотности тока  $\bar{j}^i$  и плотность скалярного заряда  $\bar{\sigma}$  определяются с помощью функции распределения  $\bar{f}(x, \mathbb{P})$  формулами (I.227), (I.233), найдем и

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k \bar{F}^{ik} &= a^{-4} \nabla_k F^{ik}; \quad \bar{\nabla}_{(i} \bar{F}_{kl)} = \nabla_{(i} F_{kl)}; \\ \bar{\Delta}_2 \bar{\Phi} - \frac{\bar{R}}{6} \bar{\Phi} + \lambda \bar{\Phi}^3 &= a^{-3} (\Delta_2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi + \lambda \Phi^3). \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Таким образом, сравнивая законы преобразования источников (III.16), (III.17) с законами преобразования соответствующих полевых операторов (III.20), сформулируем следующее утверждение [52].

### III.1. Конформная инвариантность кинетической теории

**Теорема ТIII.1.** Система уравнений Власова для заряженных частиц с безмассовыми векторными и скалярными взаимодействиями конформно инвариантна в ультрарелятивистском пределе (III.7) с точностью до  $O^2(am)$ . В случае же слабых скалярных полей ( $|q\Phi| \ll am$ ) конформная инвариантность уравнения для скалярного поля нарушается источником:

$$\Delta_2\Phi - \frac{R}{6}\Phi + \lambda\Phi^3 = -4\pi\epsilon_s a\sigma. \quad (\text{III.20})$$

Обратимся теперь к кинетическим уравнениям с интегралом столкновений. Согласно принципу конформной инвариантности [144] при высоких энергиях элементарных частиц должна восстанавливаться конформная инвариантность соответствующих полевых уравнений, следствием которой является асимптотическое скейлинговое поведение полных сечений рассеяния. Рассмотрим, например, трансформационные свойства интеграла столкновений в ультрарелятивистском пределе для 4-частичных взаимодействий в случае  $q\Phi = 0$ .

$$J_{ab\leftrightarrow cd} = \int d\pi_b d\pi_c d\pi_d \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I) \{ (1 \pm f_a)(1 \pm f_b) f_c f_d \cdot W_{cd \rightarrow ab} - (1 \pm f_c)(1 \pm f_d) f_a f_b W_{ab \rightarrow cd} \}. \quad (\text{III.21})$$

Элементы импульсных объемов  $d\pi$  при конформном отображении преобразуются по закону (III.15):  $d\bar{\pi} = a^{-2}d\pi$ . В четырехмерную  $\delta$ -функцию вследствие локального взаимодействия входят реперные проекции компонент обобщенного импульса, поэтому  $\delta^{(4)}(\bar{\mathbb{P}}_F - \bar{\mathbb{P}}_I) = a^4 \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I)$ . Наконец, вероятности переходов  $W_{ab\leftrightarrow cd}$  определяются инвариантными амплитудами рассеяния  $|M_{ab\leftrightarrow cd}|$ , которые для 4-х частичных взаимодействий являются скалярными функциями двух кинематических инвариантов [143]

$$s = (\mathbb{P}_a + \mathbb{P}_b)^2 = m_a^{*2} + m_b^{*2} - 2(\mathbb{P}_a, \mathbb{P}_b);$$

$$t = (\mathbb{P}_a - \mathbb{P}_c)^2 - 2(\mathbb{P}_a, \mathbb{P}_c); \quad (\text{III.22})$$

$$|M_{ab\leftrightarrow cd}| = |M_{ab\leftrightarrow cd}(s, t)|. \quad (\text{III.23})$$

При отображении (III.1) — (III.3) в ультрарелятивистском пределе (III.7) кинематические инварианты преобразуются по закону

$$\bar{s} = a^{-2}s; \quad \bar{t} = a^{-2}t. \quad (\text{III.24})$$

При ультрарелятивистских энергиях частиц вследствие масштабной инвариантности амплитуд рассеяния:

$$|M(s, t)| = |M(t/s)| \quad (\text{III.25})$$

последние являются и конформно инвариантными —

$$|\bar{M}_{ab\leftrightarrow cd}(\bar{s}, \bar{t})| = |M_{ab\leftrightarrow cd}(s, t)|. \quad (\text{III.26})$$

Таким образом —

В ультрарелятивистском пределе, когда энергии всех частиц превышают их массы, интеграл 4-х частичных столкновений преобразуется по закону [52]:

$$\bar{J}_{ab\leftrightarrow cd}(\bar{\mathbb{P}}_a) = a^{-2} J_{ab\leftrightarrow cd}(\mathbb{P}_a). \quad (\text{III.26})$$

Поскольку по такому же закону преобразуется и скобка Пуассона (III.14), то справедлива теорема:

**Теорема ТIII.2.** При условии выполнения законов преобразования полевых величин (III.1), (III.2) релятивистская кинетическая теория конформно инвариантна в ультрарелятивистском пределе.

Вопрос о преобразовании интеграла столкновений при наличии скалярного поля остается открытым, поскольку не ясно, каким образом преобразуются инвариантные амплитуды рассеяния при конформных преобразованиях классического скалярного поля.

Фактически теорема ТIII.2 устанавливает фундаментальный закон релятивистской кинетической теории, связывающий симметрию микромира (масштабную инвариантность взаимодействий) с глобальной симметрией макромира (конформное соответствие геометрии Вселенной геометрии Евклида). В дальнейшем этот фундаментальный закон будем называть, развивая терминологию Н.А. Черникова [144], *принципом асимптотической конформной инвариантности кинетической теории в ультрарелятивистском пределе.*

## III.2 Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц

Исследуем решение бесстолкновительного кинетического уравнения

$$[\mathcal{H}, f] = 0 \quad (\text{III.27})$$

в метрике изотропной космологической модели

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - b^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (\text{III.28})$$

где  $b = \text{sh } \chi$  — для открытой,  $b = \sin \chi$  — для закрытой и  $b = \chi$  для пространственно-плоской космологической модели. В отсутствие векторных и скалярных полей (III.27) допускает линейные интегралы движения, генерируемые группой вращений

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\varphi = \text{Const}; \quad \sin \varphi \cdot \mathbb{P}_\theta + \cos \varphi \cdot \text{ctg } \theta \mathbb{P}_\varphi = \text{Const}; \\ \cos \varphi \cdot \mathbb{P}_\theta - \sin \varphi \cdot \text{ctg } \theta \mathbb{P}_\varphi = \text{Const}, \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

независимыми из которых являются лишь два. Эти интегралы сохраняются и при наличии физических полей, не зависящих от угловых переменных:  $\Phi(\chi, \eta)$ ;  $A_i(\chi, \eta)$ . Кроме того

### III.2. Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц

(III.27) допускает еще квадратичный интеграл движения, связанный с существованием в (III.28) тензорного поля Киллинга  $\xi_i$ :

$$\xi_{(ik,l)} = 0, \implies a^2 \mathbb{P}^2 = \text{Const}, \quad (\text{III.30})$$

где

$$\mathbb{P}^2 = -g^{\alpha\beta} \mathbb{P}_\alpha \mathbb{P}_\beta$$

— квадрат физического импульса частицы. Для безмассовых частиц существует еще один линейный интеграл движения

$$\mathbb{P}_4 = \text{Const}; \quad (m = 0), \quad (\text{III.31})$$

связанный с существованием в (III.28) времениподобного вектора конформного движения:

$$\xi^i = \delta_4^i; \quad \mathcal{L}_\xi g_{ik} = \xi_{i,k} = \xi_{k,i} = \frac{a'}{a} g_{ik}. \quad (\text{III.32})$$

Изотропным и однородным решением (III.27) в метрике (III.28) является произвольная функция  $f(a \mathbb{P})$  [145]. Определим это решение таким образом, чтобы в некоторый момент времени  $\eta = \eta_0$  оно совпадало с локально равновесным [146], [87], [89], [88]:

$$f^0(\mathbb{P}, \eta) = \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu_0 + \sqrt{m^2 + a^2 \mathbb{P}^2 / a_0^2}}{T_0} \right] \pm 1 \right\}^{-1}. \quad (\text{III.33})$$

где  $\mu_0, T_0$  — постоянные,  $a_0 = a(\eta_0)$ . Для безмассовых частиц  $m \rightarrow 0$  и  $a\mathbb{P} = \mathbb{P}_4$ , т.е. распределение (III.33) совпадает с равновесным во все времена. То же самое верно и для ультрарелятивистских частиц, для которых

$$\frac{a}{a_0} \mathbb{P} \gg m. \quad (\text{III.34})$$

В ультрарелятивистском пределе (III.33) является равновесным распределением с постоянным отношением  $\mu/T$  и температурой

$$T = \frac{a_0}{a(\eta)} T_0. \quad (\text{III.35})$$

В нерелятивистском пределе

$$a\mathbb{P}/a_0 \ll m, \quad (\text{III.36})$$

разлагая выражение в (III.33) в ряд Тейлора, опять-таки получим равновесное нерелятивистское распределение

$$f^0(\mathbb{P}, \eta) = \left[ \exp \left( -\frac{\mu' + \varepsilon}{T'} \right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (\text{III.37})$$

где  $\varepsilon = \mathbb{P}^2/2m$ ,  $\mu' = a_0^2(\mu_0 - m)/a^2$  — нерелятивистской химический потенциал,

$$T' = T_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2. \quad (\text{III.38})$$

### Глава III. Кинетика ранних стадий космологического расширения

Таким образом и в ультрарелятивистском (III.34) и в нерелятивистском (III.36) предельном решении бесстолкновительного кинетического уравнения (III.33) совпадает с равновесным распределением; закон эволюции температуры, однако, различен в этих пределах. Заметим, что впервые космологическое решение нерелятивистского бесстолкновительного кинетического уравнения было получено В.Б. Магалинским [147]. В области промежуточных значений импульсов

$$\mathbb{P} \sim ma_0/a(\eta) \quad (\text{III.39})$$

должны наблюдаться максимальные отклонения распределения (III.33) от равновесных значений. Поскольку распределение (III.33) при  $a(\eta) \rightarrow 0$  асимптотически стремится к равновесному, то при высоких температурах, превышающих массы всех взаимодействующих частиц, в расширяющейся плазме асимптотически достигается состояние ГТР, т.е. функции (III.33) являются асимптотически точными решениями и полных кинетических уравнений в пределе  $T/m \rightarrow \infty$ . С другой стороны, этот факт является следствием асимптотической конформной инвариантности кинетической теории в ультрарелятивистском пределе. Действительно, метрика (III.28) является конформно стационарной, - в конформно соответствующем  $\bar{V}_4$  возможно состояние ГТР. Однако и в области низких температур  $T/m \rightarrow 0$ , когда массы всех взаимодействующих частиц гораздо больше температуры плазмы, состояние ГТР опять-таки достигается для этих частиц, но с другой температурой  $T'$  (III.38).

Отсюда следует вывод: в плазме, содержащей безмассовые частицы, ГТР не устанавливается до тех пор, пока безмассовые частицы не прекратят взаимодействовать с массивными. Когда же это произойдет, расширяющаяся плазма распадется на две не взаимодействующие компоненты: столкновительную нерелятивистскую с температурой  $T'$  (III.38) и бесстолкновительную ультрарелятивистскую с температурой  $T$  (III.35). Последняя компонента представляет собой реликтовые частицы. Таким образом, с точки зрения кинетической теории космологическая эволюция плазмы представляет собой *фазовый переход из равновесного ультрарелятивистского состояния* ( $\varepsilon = 3P$ ), *в результате которого образуются две не взаимодействующие между собой фазы: нерелятивистская* ( $P = 0$ ) *и ультрарелятивистская* ( $\varepsilon = 3P$ ). Факторам, выводящим плазму из ГТР с ультрарелятивистским уравнением состояния, являются массы частиц, которые согласно современным представлениям могут генерироваться хиггсовым механизмом спонтанного нарушения симметрии.

Пусть  $\tau_{eff}$  — эффективное время столкновений для данной частицы (см. формулы (II.32), (II.35), (II.36)). Характерный масштаб временной неоднородности системы совпадает с космологическим временем  $t = \int a d\tau$ , поэтому условие прекращения взаимодействия данного сорта частиц « $a$ » с частицами сорта « $b$ » имеет вид:

$$\tau_{eff} = [n_b \sigma_{ab} \langle v_e \rangle]^{-1} > t. \quad (\text{III.40})$$

Время  $t_0$ , являющееся решением уравнения, соответствующего неравенству (III.40), будем называть временем отключения взаимодействий частиц сорта « $a$ » и « $b$ ». Если к этому времени все взаимодействующие частицы являются еще ультрарелятивистскими, то дальнейшая эволюция реликтовых частиц сорта « $a$ » описывается решением (III.33), в котором  $\eta_0$  — момент отключения столкновений. Если же к моменту  $t_0$  не все взаимодействующие частицы остаются ультрарелятивистскими, то равновесное распределение частиц сорта

### III.2. Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц

« $a$ » может исказиться во времена, предшествующие отключению столкновений, и далее, являясь изотропным решением,  $f(a\mathbb{P})$  может, тем не менее, отличаться от распределения (III.33).

Исследуем космологическую эволюцию моментов распределения (III.33) [88], [89], [90]. Определим согласно [148], [149] макроскопические скаляры

$$N_a(x) = \int_P (u, p) f_a(x, p) d\pi_a; \quad (\text{III.41})$$

$$\mathcal{E}_a(x) = \int_P (u, p)[(u, p) - m_a] f_a(x, p) d\pi_a; \quad (\text{III.42})$$

— плотность числа частиц и плотность средней кинетической энергии, регистрируемых наблюдателем, движущимся со скоростью  $u^i(x)$ . С помощью (III.41) и (III.42) определим и среднюю кинетическую энергию частицы

$$\langle E_a \rangle = \mathcal{E}_a(x) / N_a(x). \quad (\text{III.43})$$

В синхронной метрике (III.28) СО  $u^i = q^{-1}\delta_4^i$ . Для скаляров  $N_a(x)$  и  $\mathcal{E}_a(x)$  после интегрирования по угловым переменным и переходам к конформному импульсу [146]

$$\mathcal{P} = aP/a_0 \quad (\text{III.44})$$

получим выражения

$$N = \frac{(2s+1)a_0^3}{2\pi^2 a^3(\eta)} \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}^2 d\mathcal{P}}{\exp\left[\frac{-\mu_0 + \sqrt{m^2 + \mathcal{P}^2}}{T_0}\right] \pm 1}, \quad (\text{III.45})$$

$$\mathcal{E} = \frac{(2s+1)a_0^3}{2\pi^2 a^3(\eta)} \int_0^\infty \frac{(\sqrt{m^2 + a_0^2 \mathcal{P}^2 / a^2} - m) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P}}{\exp\left[\frac{-\mu_0 + \sqrt{m^2 + \mathcal{P}^2}}{T_0}\right] \pm 1}. \quad (\text{III.46})$$

Таким образом плотность числа частиц падает обратно пропорционально  $a^3(\eta)$ , локальное же ее выражение ничем не отличается от соответствующего ЛТР (II.19). Из (III.45), (III.46) видно, что если отключаются при ультрарелятивистских температурах  $T_0 \gg m$ , то распределение (III.33) все время эффективно остается ультрарелятивистским, т.е. главный вклад в макроскопические моменты вносят значения конформного импульса (который является интегралом движения)  $\mathcal{P} \sim T_0 \gg m$  [89]. Рассмотрим этот случай, полагая  $\mu_0 = 0$  и рассматривая времена в (III.46), когда частицы уже стали нерелятивистскими:

$p \ll m$ . Проводя разложение (III.46) в ряд Тейлора по параметру  $a_0\mathcal{P}/am$ , получим для фермионов [87], [89], [90]:

$$\begin{aligned} N_F(\eta) &= \frac{3\xi(3)T^3(\eta)}{2\pi^2}; \\ \mathcal{E}_F(\eta) &= \frac{45\xi(5)T^5(\eta)}{4\pi^2 m_F}; \\ \langle\langle E_F \rangle\rangle &= \frac{15\xi(5)T^2(\eta)}{2m_F\xi(3)} \approx 6,47T^2(\eta)/m_F. \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Аналогичные выражения для бозонов были получены позже в работе [150]. Реликтовые нейтрино отрываются от плазмы при температуре порядка 2 Мэв [151]; при массе покоя  $m_\nu \sim 30$  эв [152] они в этот момент времени являются ультрарелятивистскими. Кинетическую энергию реликтовых массивных нейтрино можно связать с температурой реликтовых фотонов  $T_\gamma$  в современной Вселенной;

$$\langle\langle E_\nu \rangle\rangle = \frac{13T_\gamma^2}{\sqrt{11}m_F}. \quad (\text{III.48})$$

Эта энергия на пять порядков меньше энергии реликтовых фотонов [89], [90]. Для бальцмановского распределения вместо (III.47) получим  $\langle\langle E \rangle\rangle = 6T^2(\eta)/m$  [87], [89]. С другой стороны, средняя энергия частиц в бальцмановском распределении равна  $\frac{3}{2}\theta$ , где  $\theta$  — температура бальцмановского газа. Сравнивая с (III.38), найдем связь  $\theta = 4T'T_0/m \gg T'$ . В том же случае, когда столкновения отключаются на нерелятивистской стадии, эти температуры совпадают.

### III.3 Кинетика космологического расширения плазмы в условиях локального термодинамического равновесия

Требования изотропии и однородности пространства приводит к условиям на функцию распределения и макроскопические поля:

$$\begin{aligned} f_a(x, \mathbb{P}) &= f_a(\eta, \mathbb{P}), \\ \Phi &= \Phi(\eta); \quad A_i = A(\eta)\delta_i^4 \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

ТЭИ частиц и полей при этом имеет гидродинамическую структуру вида (II.18) с  $u^i = a^{-1}\delta_4^i$ . Проще всего кинетические уравнения записываются не в канонических переменных  $\eta, \mathbb{P}_4$ , а в переменных  $\eta, \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{P}$  — конформный импульс (III.44):

$$a^{-2}\sqrt{m_*^2 a^2 + \mathcal{P}^2} \frac{\partial f_a(\eta, \mathcal{P})}{\partial \eta} = J_a(\eta, \mathcal{P}). \quad (\text{III.50})$$

### III.3. Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР

Вычисляя макроскопические скаляры  $N_a(\eta)$ ,  $\mathcal{E}_a(\eta)$ ,  $P_a(\eta)$  и  $\sigma(\eta)$  (см. (II.19), (II.20), (II.21)), найдем

$$\begin{aligned} N_a(\eta) &= a^{-3}N_a^*(\eta); & P_a(\eta) &= a^{-4}P_a^*(\eta); \\ \mathcal{E}_a(\eta) &= a^{-4}\mathcal{E}_a^*(\eta); & \sigma(\eta) &= a^{-3}\sigma^*(\eta), \end{aligned} \quad (III.51)$$

где введены надчеркнутые конформные величины:

$$\begin{aligned} N_a^*(\eta) &= \frac{2s+1}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{P}^2 f_a(\eta, \mathcal{P}) d\mathcal{P}; \\ \mathcal{E}_a^*(\eta) &= \frac{2s+1}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{P}^2 \sqrt{a^2 m_*^2 + \mathcal{P}^2} f_a(\eta, \mathcal{P}) d\mathcal{P}; \\ P_a^*(\eta) &= \frac{2s+1}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}^4 f_a(\eta, \mathcal{P}) d\mathcal{P}}{\sqrt{a^2 m_*^2 + \mathcal{P}^2}}; \\ \sigma^*(\eta) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum q(2s+1)(am + q\Phi^*) \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}^4 f_a(\eta, \mathcal{P}) d\mathcal{P}}{\sqrt{a^2 m_*^2 + \mathcal{P}^2}}, \end{aligned} \quad (III.52)$$

которые совпадают с обычными определениями, если в последних произвести замену  $m \rightarrow am$  и  $\Phi = \Phi^*/a$ . Полевые уравнения (I.244) и (I.249) в этих величинах принимают вид:

$$a^2 \mu_\nu^2 A = -4\pi \epsilon_\nu \sum e N^*; \quad (III.53)$$

$$\Phi^{*''} + \Phi^*(k + \mu_s^2 a^2) + \lambda \Phi^{*3} = -4\pi \epsilon_s \sigma^*, \quad (III.54)$$

где  $k = +1$  — для закрытой,  $k = -1$  — для открытой и  $k = 0$  для пространственно-плоской Вселенной,  $\epsilon = +1$  — для полей с притяжением одноименно заряженных частиц,  $\epsilon = -1$  — для полей с отталкиванием. Из (III.53) в частности следует, что в однородной и изотропной Вселенной отличным от нуля зарядом могут обладать лишь массивные векторные поля. Законы сохранения энергии и заряда (если последний сохраняется) можно записать в форме:

$$E_p^{*'} - \sigma^* \Phi^{*'} = \frac{a'}{a} (\mathcal{E}_p^* - 3P_p^* - \sigma^* \Phi^*) - \frac{\mu_v^2}{4\pi} A(a^2 A)', \quad (III.55)$$

$$\sum g N^* = \text{Const}, \quad (III.56)$$

где  $\mathcal{E}_p^* = \sum \mathcal{E}_a^*$ ,  $P_p^* = \sum P_a^*$ . Конформные плотность энергии векторного и скалярного полей равны

$$\mathcal{E}_v^* = \frac{\epsilon_v \mu_v^2 a^2 A^2}{4\pi}; \quad \mathcal{E}_s^* = \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left[ \Phi^{*2} + \Phi^{*2}(k + \mu_s^2 a^2) + \frac{\lambda \Phi^{*4}}{6} \right]. \quad (III.57)$$

Таким образом, единственное нетривиальное решение уравнения Эйнштейна имеет вид

$$8\pi \mathcal{E}^* = 3(ka^2 + a'^2), \quad (III.58)$$

где

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_p^* + \mathcal{E}_v^* + \mathcal{E}_s^*.$$

Перечисленные выше уравнения (III.50), (III.53), (III.54), (III.58) совместно с определениями (III.51), (III.52) и (III.57) составляют замкнутую кинетическую модель однородной и изотропной Вселенной с отличными от нуля плотностями векторного и скалярного зарядов. К этим уравнениям необходимо добавить лишь ту или иную модель частиц, т.е. перечислить все возможные частицы, указать алгебру их взаимодействий и соответствующие амплитуды рассеяния. Кроме того на нулевой пространственноподобной гиперповерхности необходимо задать начальные условия:

$$f_a(\eta_0, \mathcal{P}) = f_a^0(\mathcal{P}); \quad \Phi^*(\eta_0) = \Phi_0^*; \quad \Phi^{*\prime}(\eta_0) = \Phi_0^{*\prime}. \quad (\text{III.59})$$

Отметим наиболее общие свойства этой модели при  $a \rightarrow 0$ . Предположим, что при  $a \rightarrow 0$  все частицы являются ультрарелятивистскими

$$\langle\langle \mathcal{P} \rangle\rangle \gg am_* = |(am + q\Phi^*)|,$$

или

$$\langle\langle p \rangle\rangle \gg m_*. \quad (\text{III.60})$$

Тогда вследствие функциональных уравнений Больцмана и унитарности  $S$  — матрицы асимптотически точным решением (III.50) при  $a \rightarrow 0$  являются равновесные распределения (III.33), в которых  $m \rightarrow 0$  и постоянные  $\mu_0$  удовлетворяют соответствующим условиям химического равновесия. Из (III.52) следует, что при этом

$$N_a^* = \text{Const}; \quad \mathcal{E}_a^* = \text{Const}; \quad P_a^* = \text{Const}; \quad (\text{III.61})$$

$$\sigma^* = \sum (am + q\Phi^*)qB_4,$$

где

$$B_a = \frac{2s+1}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{P} f_a^0(\mathcal{P}) d\mathcal{P} = \text{Const}.$$

Вследствие (III.61) при ненулевой суммарной плотности векторного заряда ( $\sum eN^* \neq 0$ )

$$A \sim a^{-2}. \quad (\text{III.62})$$

Но тогда из (III.61) и (III.55) следует, что  $\Phi^* \sim a$  либо  $\sigma^* = 0$ . Второй из этих случаев, однако сводится, к первому. Поэтому получим из (III.54) с учетом (III.61) в пределе  $a \rightarrow 0$ :

$$\Phi = -\frac{4\pi\epsilon_s \sum qmB}{k + 4\pi\epsilon_s \sum q^2B}. \quad (\text{III.63})$$

В этом случае главный вклад в плотность энергии вносит векторное поле, которому отвечает предельное жесткое уравнение состояния, и  $a \sim \sqrt{\eta} \sim t^{1/3}$ . Если же векторный заряд

### III.3. Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР

строго равен нулю, асимптотически точным решением (III.58) является  $a \sim \eta \sim \sqrt{t}$ , чему соответствует ультрарелятивистское уравнение состояния. В [182], где исследовалась вырожденная плазма, состоящая из одного сорта фермионов, показано, что при  $a \rightarrow 0$  решение (III.63) является устойчивым для случая притяжения ( $\epsilon_s = +1$ ).

Как мы отмечали в предыдущем разделе, массы частиц являются фактором, выводящем плазму из состояния ГТР. Предполагая, однако, ЛТР слабо нарушенным, чему соответствует условие, противоположное (III.40), будем искать функцию распределения в виде (I.121)

$$f_a(\mathcal{P}, \eta) = \left\{ \exp \left[ \frac{-\mu_a^* + \sqrt{a^2 m_*^2 + \mathcal{P}^2} + \varphi_a(\mathcal{P}, \eta)}{T^*} \right] \pm 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{III.64})$$

где  $\mu^* = \mu a$  и  $T^* = T a$  — конформные химический потенциал и температура соответственно, а  $\varphi(\mathcal{P}, \eta)$  — малая неравновесная поправка к функции распределения. Несколько отступая от метода, развитого в работах [87], [88], получим уравнения для определения величин  $\mu(\eta)$ ,  $T(\eta)$  и  $\varphi(\mathcal{P}, \eta)$ . Подставляя (III.64) в кинетическое уравнение (III.50) и разлагая последнее в ряд по малости  $\varphi/T$  получим с учетом функциональных уравнений Больцмана и унитарности  $S$  — матрицы

$$\begin{aligned} a^{-2} \sqrt{m^{*2} + \mathcal{P}^2} \frac{\partial f_a^0}{\partial \eta} &\equiv \\ &\equiv T a^{-1} \frac{d f_a^0}{d \mathcal{E}^*} \left[ \left( \frac{m^{*2}}{T^{*2}} \right)' - \lambda'_a \sqrt{m^{*2} + \mathcal{P}^2} + \left( \frac{1}{T^*} \right)' \mathcal{P}^2 \right] = \\ &- \sum_k \nu_a^k \int \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I) \overset{0}{Z}_{IF} (\sum \varphi_I W_{IF} - \sum \varphi_F W_{FI}) \Pi' d\pi, \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

где

$$m^* = a m_*; \quad f_a^0 = f_a|_{\varphi=0}; \quad \mathcal{E}^* = \sqrt{m^{*2} + \mathcal{P}^2},$$

$f_a^0$  — равновесное распределение.

Вследствие свойств интеграла столкновений законы сохранения (III.45), (III.56) должны выполняться для величин  $\overset{0}{\mathcal{E}}_p^*$  и  $\overset{0}{P}_p^*$ , определенных относительно равновесного распределения  $f_a^0(\mathcal{P}, \eta) = f_a(\mathcal{P}, \eta)|_{\varphi=0}$ . Эти два уравнения и следует рассматривать как дифференциальные уравнения для определения переменных  $\lambda - a$  и  $T^*$ . Поскольку величины  $\lambda_a$  определяются кроме того  $N - 1$  линейно независимым условием химического равновесия (II.8), то присоединяя к (III.55), (III.56) уравнение для определения потенциалов (III.53), (III.54) и уравнение Эйнштейна (III.58), мы получим замкнутую систему уравнений, которая определяет эволюцию системы в нулевом ЛТР-приближении. В следующем приближении, подставляя в (III.65) найденные функции  $m^*$ ,  $\lambda_a^*$ ,  $T^*$ , получим интегральные уравнения для определения неравновесных поправок  $\varphi_a(\mathcal{P}, \eta)$ .

Исследуем эволюцию массивных частиц в стандартной горячей модели Вселенной, когда отсутствуют макроскопические векторные и скалярные поля [87], [145]. Тогда вследствие СРТ-теоремы массы частиц и античастиц совпадают, а их суммарный химический потенциал равен нулю (II.24). Поэтому суммарная плотность обобщенного заряда  $g$ , определенная относительно равновесного распределения  $f_a^0$ , является нечетной функцией  $\lambda_a$ :

$$\sum g \overset{0}{N}^* (-\lambda) = - \sum g \overset{0}{N}^* (\lambda). \quad (\text{III.66})$$

Глава III. Кинетика ранних стадий космологического расширения

Если все фундаментальные заряды равны нулю, то из (III.66), (III.56) и (II.8) следует, что и все  $\lambda_a = 0$ . Горячая модель Вселенной характеризуется малыми фундаментальными зарядами, чему соответствуют и малые  $\lambda_a$  на ультрарелятивистской стадии. Выразим фундаментальный заряд в правой части (III.56) с помощью равновесной концентрации фотонов  $N_\gamma^0 = 2\xi(3)T^{*3}/\pi^2$ , пользуясь тем фактом, что на ультрарелятивистской стадии эволюции согласно (III.52) и (III.55)

$$\lambda_a = \text{Const}; \quad T^* = \text{Const}. \quad (\text{III.67})$$

Таким образом, представим константу в правой части (III.56) в виде

$$\text{Const} = G N_\gamma^0 = 2GT^{*3}\xi(3)/\pi^2,$$

где  $G$  — малый фундаментальный заряд. Разлагая левую часть (III.56) в ряд Тейлора по малости  $\lambda_a$ , запишем это уравнение в виде

$$\sum (2s+1)g\lambda\delta = 6G\xi(3)/\pi^2, \quad (\text{III.68})$$

где  $\delta = +1$  — для бозонов и  $\delta = +1/2$  — для фермионов. Линейное уравнение (III.68) совместно с линейными однородными уравнениями (II.8) полностью определяет химические потенциалы всех сортов частиц на ультрарелятивистской стадии. В суммировании в (III.68) античастицы не участвуют.

С понижением температуры вследствие распада сложных симметрий на более простые возникает все больше сохраняющихся величин. Рассмотрим, например, плазму на этапе, когда в равновесии остаются лишь электроны, позитроны, ионы и фотоны, а нейтрино уже являются бесстолкновительными и поэтому не вносят вклад в законы сохранения (III.55), (III.56), но участвуют в уравнении Эйнштейна (III.58). На этой стадии сохраняются барионный и лептонный заряды. Полагая температуру плазмы гораздо большей потенциала ионизации и статистику массивных частиц больцмановской, выпишем эти законы:

$$\begin{aligned} N_i^* &= \text{Const}; \\ N_e^* - N_{e^+}^* &= \frac{2k_2(z)}{\pi^2 z} \cdot \text{sh } \lambda_e \cdot m^{*3} = \sum N_i^* = \Delta N_e^0, \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

где  $N_i^*$  — плотность числа ионов,  $z = m_e/T$ . Из (III.69) как функцию  $a$  и  $T$  можно определить приведенный химический потенциал электронов. Подставляя затем результат в уравнение (III.55), можно найти  $T(a)$ . Рассмотрим предельный случай этих уравнений, когда электроны стали нерелятивистскими, т.е.  $z \gg 1$ . Используя асимптотику функций Мак-Дональда, найдем из (III.69):

$$\lambda_e \simeq \frac{m_e}{T} + \ln \left[ \Delta N_e^0 \sqrt{2} \left( \frac{\pi}{mT^2} \right)^{3/2} \right], \quad (\text{III.70})$$

где  $\Delta N_e^0 = \sum N_i^0$  — остаточная после аннигиляции концентрация электронов. Из (III.52) для всех нерелятивистских компонент найдем

$$\mathcal{E}^* = m^* N^0 + \frac{3}{2} T^* N^0; \quad P^* = T N^0.$$

### III.3. Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР

Таким образом, из закона сохранения энергии (III.55) получим уравнение для определения температуры  $T^*$ :

$$\ln aT^* + \frac{4\pi^2 T^{*3}}{135\Delta N_e^* e} = \text{Const}. \quad (\text{III.71})$$

Поскольку в (III.55) участвуют лишь столкновительные компоненты, то второй член в левой части (III.71) следует положить равным нулю, когда фотоны станут бесстолкновительными. Учитывая формулу для равновесного числа фотонов, перепишем (III.71) в более удобном виде

$$\ln aT^* + \frac{2\pi^4}{135\xi(3)\beta} = \text{Const}, \quad (\text{III.72})$$

где  $\beta = N_e^0 / N_\gamma^0$ . До тех пор, пока фотоны являются столкновительными, уравнение (III.72) содержит большой параметр  $\beta^{-1}$  и поэтому имеет своим асимптотическим решением (III.67):  $T^* = \text{Const}$ . Когда же столкновения с фотонами отключаются, решением (III.72) будет являться  $aT^* = \text{Const}$ , т.е. закон эволюции нерелятивистской компоненты (III.38) [153]. Подставляя теперь найденное из (III.70) значение  $\lambda$  в уравнение (III.65), переходя к нерелятивистскому пределу и возвращаясь к обычным обозначениям, получим уравнение для поправки к функции распределения электронов,  $\varphi_e(\eta, p)$ :

$$\begin{aligned} & -\frac{me}{2} \frac{d \ln a^2 T}{dt} \left( 3 - \frac{p^2}{mT} \right) = \\ & = - \sum_k \nu_e^k \int \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I) Z_{IF}^{0e} \left( \sum \varphi_I W_{IF} - \sum \varphi_F W_{FI} \right) \Pi' d\pi, \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

где  $Z_{IF}^{0e} = Z_{IF}^0 / f_e^0$ . Для фотонов уравнение (III.65) принимает вид ( $\lambda_\gamma = m_\gamma = 0$ ):

$$\begin{aligned} & -ap^2 \frac{d}{dt} (aT)^{-1} = \\ & = - \sum_k \nu_\gamma^k \int \delta^{(4)}(\mathbb{P}_F - \mathbb{P}_I) Z_{IF}^{0\gamma} \left( \sum \varphi_I W_{IF} - \sum \varphi_\gamma W_{FI} \right) \Pi' d\pi. \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

При нерелятивистских энергиях частиц вкладом ионов во взаимодействия с фотонами можно пренебречь, как и взаимодействиями фотонов друг с другом. Поэтому при  $Z \gg 1$  уравнение (III.74) принимает более простой вид:

$$aP^2 \frac{d}{dt} (aT)^{-1} = J_{\gamma e}^{(1)}, \quad (\text{III.75})$$

где  $J_{\gamma e}^{(1)}$  — линеаризованный интеграл комптоновских столкновений. Входящий в правую часть интеграл столкновений имеет вид:

$$J_e^{(1)} = J_{e\gamma}^{(1)} + J_{ee}^{(1)} + J_{ei}^{(1)},$$

### Глава III. Кинетика ранних стадий космологического расширения

где  $J_{ee}^{(1)}$  и  $J_{ei}^{(1)}$  — линейризованные интегралы кулоновских взаимодействий электронов между собой и электронов с ионами. Аналогично (III.73), можно записать и кинетические уравнения для поправок к ионным функциям распределения.

До тех пор, пока столкновения фотонов с электронами не отключились, температура плазмы при  $\beta \ll 1$  с большой точностью описывается законом (III.67). В этом случае уравнения (III.73) и (III.74) принимают более простой вид [87], [88]:

$$-\frac{a'}{2a} \left( 3m_e - \frac{p^2}{T} \right) = J_{e\gamma}^{(1)} + J_{ee}^{(1)} + J_{ei}^{(1)}; \quad 0 = J_{\gamma e}^{(1)}. \quad (\text{III.76})$$

Выражение в левой части (III.73), (III.76) порядка  $m_e/t$ ; таким образом, при выполнении условий ЛТР

$$t \gg \tau_{eff} \quad (\text{III.77})$$

поправка к равновесным функциям массивных частиц порядка  $\tau_{a\gamma}/t$ , т.е. остается малой. Уравнения (III.73) — (III.76) указывают механизм нарушения ГТР в плазме, состоящей из двух компонент: нерелятивистской и ультрарелятивистской. Действительно, в изотропном мире интегралом движения является не энергия частицы  $E = \sqrt{m^2 + p^2}$ , а величина  $ap = \text{Const}$  (III.30). Следовательно, в промежутках между столкновениями энергия фотона меняется по закону  $\delta E_\gamma \sim a^{-1}(\eta)$ , в то время, как энергия нерелятивистской частицы падает со временем значительно быстрее:  $\delta E_e \sim a^{-2}(\eta)$ . В момент столкновения фотоны обладают в среднем большей энергией, чем нерелятивистские частицы. Перераспределение энергии при столкновениях приводит к нагреву электронной компоненты за счет охлаждения фотонной и является причиной отклонения частиц от равновесия. В радиационно-доминированной плазме, т.е. в плазме с преобладанием фотонов ( $\beta \ll 1$ ) фотонная функция распределения мало меняется. На этот факт, в частности, указывает второе уравнение (III.76). Следует отметить, что уравнение вида (III.74) — (III.76) пригодно не только для плазмы, состоящей из фотонов и нерелятивистских электронов и ионов. Эти уравнения с очевидными модификациями пригодны для описания любой двухкомпонентной (ультрарелятивистско-нерелятивистской) плазмы с преобладанием ультрарелятивистских частиц при условии сохранения соответствующих зарядов. Отметим также, что «хвосты» распределений нерелятивистских частиц в ультрарелятивистской области всегда при этом сохраняют равновесный характер с температурой (III.35).

## III.4 Кинетика изотропного расширения однородной радиационно доминированной плазмы

Исследуем более подробно описанную выше ситуацию, когда плазма состоит лишь из фотонов, нерелятивистских электронов и ионов, причем  $\beta_e \ll 1$ . При температурах выше температуры рекомбинации доминирующими являются следующие упругие взаимодействия:

$$\begin{aligned} e + \gamma &= e + \gamma; & e + e &= e + e; \\ e + i &= e + i; & i + i &= i + i. \end{aligned}$$

### III.4. Кинетика расширения радиационно доминированной плазмы

Вследствие изотропии взаимодействий частицы при этих взаимодействиях обмениваются в среднем лишь энергией. Соответствующие эффективные времена передачи энергии равны [151], [154]:

$$\tau_{e(\gamma)} \simeq \frac{Z_e}{8N_\gamma\sigma_T}, \quad \tau_{\gamma(e)} \sim \tau_{\gamma(e)} \sim \tau_{e(\gamma)} \cdot N_\gamma/N_e;$$

$$\tau_{ee} = \frac{3m_e^{1/2}T_e^{3/2}}{4\pi^{1/2}e^4N_e\Lambda}; \quad \tau_{ii} = \frac{3m_i^{1/2}T_i^{3/2}}{4\pi^{1/2}e^4Z^4N_i\Lambda};$$

$$\tau_{ei} \sim \tau_{ee} \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{3/2},$$

где  $\sigma_T = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2}$  — томпсоновское сечение рассеяния,  $e^2 = 1/137$ ,  $\Lambda = \ln \frac{1}{9e^3} \frac{T^{3/2}}{\sqrt{\pi}N_e}$  — кулоновский логарифм. Следует отметить, что в равновесной радиационно- доминированной плазме кулоновский логарифм остается постоянным в процессе расширения:  $\Lambda = 17,3 + 1,15 \lg 10^8/\beta_e$ .

Рассмотрим сначала идеализированную ситуацию, когда плазма состоит только из фотонов и нерелятивистских электронов [88], [155], [153], т.е. когда существенны лишь комптоновские столкновения и столкновения электронов между собой. По указанным выше причинам деформацией равновесного спектра фотонов можно пренебречь, т.е. полагать

$$f_\gamma = f_\gamma^0 = \left[ \exp \left( \frac{-p}{T_\gamma} \right) + 1 \right]^{-1},$$

где  $T_\gamma \sim a^{-1}$ . Интеграл комптоновских столкновений  $J_{e\gamma}$  в приближении малой передаваемой энергии

( $T_\gamma/m_e \ll 1$ ) можно представить в виде Фоккера-Планка, причем в случае нерелятивистских электронов этот интеграл принимает вид [153]:

$$J_{e\gamma} = \frac{\Sigma}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 \left( \frac{pf_e}{T_\gamma} + m_e \frac{\partial f_e}{\partial p} \right) \right], \quad (\text{III.78})$$

где

$$\Sigma = \frac{8\pi\sigma_T N_\gamma T_\gamma^2 \pi^4}{90\xi(3)}.$$

Тогда решением кинетического уравнения для электронов является, максвелловское предделение в  $T_e(t) \neq T_\gamma(t)$  [155]:

$$f_e(t, p) = \frac{N_e}{(2\pi m_e T_e)^{3/2}} \exp \left( -\frac{p^2}{2m_e T_e} \right). \quad (\text{III.79})$$

Действительно, это распределение обнуляет интеграл электрон - электронных столкновений; подставляя же (III.79) в (III.78), а затем результат в кинетическое уравнение (III.50),

Глава III. Кинетика ранних стадий космологического расширения

получим вместо последнего столкновения обыкновенное дифференциальное уравнение на электронную температуру [155]:

$$\frac{da^2 T_e}{da} + \frac{\varkappa T_e}{a} = \frac{\varkappa T_\gamma^0 a_0}{a^2}, \quad (\text{III.80})$$

где мы положили  $a = a_0 \sqrt{\frac{t}{t_0}}$ ,  $\varkappa = 8\pi\sigma_T N_\gamma(t_0) T_\gamma(t_0) a_0^2 \pi^4 / 90\xi(3)m_e$ . Решение уравнения (III.80), удовлетворяющее начальному условию  $T_e(a_0) = T_e^0$ , есть:

$$\begin{aligned} \frac{T_e}{T_\gamma} = \frac{a_0}{a} & \left\{ \frac{T_e^0}{T_\gamma^0} \cdot \exp \left[ -\frac{t_0}{2\tau_k^0} \left( 1 - \frac{t_0}{t} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\pi t_0}{2\tau_k^0}} \cdot e^{\frac{t_0^2}{2\tau_k^0 t}} \cdot \left[ \Phi \left( \sqrt{\frac{t_0}{2\tau_k^0}} \right) - \Phi \left( \sqrt{\frac{t_0^2}{2\tau_k^0 t}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

где  $\Phi(Z)$  — интеграл вероятности,  $\tau_k$  — эффективное время потери энергии электроном за счет комптоновских столкновений:

$$\tau_k = \frac{90\xi(3)Z_e}{8\pi^4 N_\gamma \sigma_T}. \quad (\text{III.82})$$

Рассмотрим частный случай, когда при  $t = t_0$  с хорошей точностью выдержаны условия ЛТР, т.е.  $t_0/\tau_k^0 \rightarrow \infty$  и  $T_e^0 = T_\gamma^0$ . Разлагая (III.81) в ряд, в первом приближении получим

$$\frac{T_e}{T_\gamma} = \frac{a_0}{a} \left\{ \exp \left[ -\frac{t_0}{2\tau_k^0} \left( 1 - \frac{t_0}{t} \right) \right] + \sqrt{\frac{\pi t_0}{2\tau_k^0}} \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{t_0}{2\tau_k^0 t}} \right) \right] \right\}. \quad (\text{III.83})$$

Если ЛТР по-прежнему выполняется, т.е. при  $\tau_k \ll t$ , получим из (III.83)

$$T_e(t) = T_\gamma(t) \left[ 1 - \frac{\tau_k^0 t}{t_0^2} + \dots \right],$$

т.е. температура электронов уменьшается линейно по времени по отношению к температуре фотонов. Если же ЛТР нарушено, т.е.  $\tau_k \gg t$ , то формула (III.83) дает:

$$\frac{T_e(t)}{T_\gamma(t)} = \sqrt{\frac{\pi t_0^2}{2\tau_k^0 t}} \left[ 1 + \sqrt{\frac{2t_0^2}{\pi\tau_k^0 t}} + \frac{t_0^2}{2\tau_k^0 t} + \dots \right] \quad (\text{III.84})$$

— температура электронов стремится к температуре расширяющегося нерелятивистского газа (III.38)  $T_e \sim a^{-2}$ , что и утверждалось в разделах III.2, III.3. Учитывая, что согласно (III.82)  $\tau_k \sim a^4 \sim t^2$ , придадим формуле (III.84) более наглядный вид:

$$\frac{T_e(t)}{T_\gamma(t)} = \sqrt{\frac{\pi t}{2\tau_k}} \cdot \left[ 1 + \sqrt{\frac{2t}{\pi\tau_k}} + \frac{t}{2\tau_k} + \dots \right] \quad (\text{III.85})$$

Формулы (III.84) — (III.85) в отличие от (III.38) позволяют однозначно связать в каждый момент времени температуры фотонов и электронов. Ранее уже отмечалось, что

### III.4. Кинетика расширения радиационно доминированной плазмы

присутствие сильного изотропного электромагнитного излучения максвеллизует нерелятивистские электроны (см., например, [151]). Расширение же плазмы приводит к тому, что хотя электроны и остаются максвелловскими, то с неравновесной температурой  $T_e < T_\gamma$ . Рассмотренный выше пример является точной реализацией фазового перехода, когда первоначально равновесная двухкомпонентная система (радиационно - доминированная плазма) в процессе расширения выходит из состояния термодинамического равновесия и распадается на две невзаимодействующие фазы — ультрарелятивистские фотоны и нерелятивистские электроны, причем температура последних ниже температуры фотонов и определяется формулой (III.85).

Реальная ситуация, однако, несколько сложнее рассмотренной выше, поскольку кроме всего прочего в плазме имеются еще и ионы, взаимодействующие с электронами. Несложный анализ кинетических уравнений показывает, что при учете электрон-ионных столкновений максвелловские распределения вида (III.79) уже не являются следствием специфической зависимости от скорости частиц кулоновского сечения рассеяния. Тем не менее и в этом случае можно сделать определенные выводы. Предположим, что выполнено условие  $\tau_{ei} \ll t$ , - тогда между электронами и ионами в процессе расширения поддерживается ЛТР, вследствие чего  $T_i = T_e$ . Поскольку в этом случае энергия фотона при каждом акте столкновения с электроном затем распределяется поровну между электроном и ионом (при  $Z = 1$ ). Этот процесс можно снова описать уравнением (III.78), в котором  $N_\gamma$  необходимо заменить на  $N_\gamma/2$  ( $N_\gamma/(1 + Z^{-1})$  при  $Z \neq 1$ ). Таким образом, в этом случае, температура нерелятивистской компоненты будет описываться решением (III.81), в котором  $\tau_k^0$  необходимо заменить на  $2\tau_k^0$ . Соответственно этому для конечной температуры нерелятивистской компоненты вместо (III.85) получим выражение:

$$\frac{T_e(t)}{T_\gamma(t)} = \sqrt{\frac{\pi t}{4\tau_k}}. \quad (\text{III.86})$$

Если же в ходе расширения выполняется обратное условие,  $\tau_{ei} \gg t$ , вплоть до времен, когда нарушится ЛТР между электронами и фотонами, то к моменту восстановления ЛТР между электронами и ионами последние будут иметь температуру гораздо меньшую температуры электронов. Поэтому при восстановлении ЛТР электронная температура изменится в 2 раза (в  $(1 + Z^{-1})$  при  $Z \neq 1$ ) по сравнению с (III.85), т.е. в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с (III.86).

Исследованные выше эффекты несущественны в стандартной горячей модели Вселенной, поскольку в этой модели вплоть до стадии рекомбинации поддерживаются ЛТР между электронами и фотонами  $\tau_k/t \lesssim 10^{-5}$ , хотя возможны и такие космологические сценарии, где эти эффекты принципиально важны. Перечисленные формулы могут претендовать на качественную достоверность при оценке температуры фотонов и электронов во взрывных астрофизических объектах. Критерием применимости результатов данного раздела к взрывным объектам является достаточно высокая однородность последних, т.е.  $\Delta l \gg vt$ , где  $\Delta l$  — характерный размер неоднородности объекта,  $v$  — скорость расширения,  $t$  — время расширения.

## III.5 Релятивистская кинетика столкновительного затухания гравитационных волн в горячей Вселенной

Воспользуемся предыдущими результатами для исследования космологической эволюции гравитационных волн [105], [158]. Возмущения метрики пространственно плоского мира Фридмана (III.28), соответствующие ГВ, представим в виде ( $h_{ik} = g'_{ik} - g_{ik}$ ):

$$h_{ik} = \tilde{h}_{ik}(\eta)e^{-in_\alpha x^\alpha}, \quad (III.87)$$

где  $n_\alpha = \text{Const}$  - волновой вектор ГВ. Реперные компоненты этого вектора, измеренные синхронным в метрике (III.28) наблюдателем, равны

$$K(\alpha) = \frac{n_\alpha}{a}; \quad K = \frac{n}{a}, \quad (III.88)$$

где  $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$ . Гравитационные возмущения, соответствующие ГВ, удовлетворяют следующим условиям [47]:

$$h_{i4} = 0; \quad h = 0; \quad h^{ik}_{,k} = 0 \implies h^\beta_\alpha n_\beta = 0. \quad (III.89)$$

Как это будет видно из дальнейшего, возмущение ТЭИ среды, обязанное появлению ГВ, представимо в форме

$$\delta T_{ik} \sim h_{ik} \tau(\eta). \quad (III.90)$$

Тогда с учетом результатов [44], [76], [82] систему линеаризованных уравнений Эйнштейна, описывающих распространение слабых ГВ в пространственно плоском мире Фридмана, можно записать в виде

$$\psi'' + n^2 \psi + 8\pi a^{-2} \psi \left[ 2\tau_* - \frac{1}{6}(\mathcal{E}^* - 2P^*) + 2P^* \right] = 0, \quad (III.91)$$

где мы положили

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(\eta) = S_{\alpha\beta} a \psi(\eta), \quad (III.92)$$

причем  $S_{\alpha\beta} = \text{Const}$ .

Для вычисления  $\tau_*(\eta)$  обратимся к релятивистским кинетическим уравнениям

$$[\mathcal{H}, f] = J[f]. \quad (III.93)$$

Появление ГВ приводит к искажению массовой поверхности, вследствие чего необходимо произвести перенормировку импульса [44], [76]. Проще всего указанную перенормировку осуществить преобразованием (III.93) от импульсных переменных  $P_i$  к переменным  $\mathcal{P}_i$

$$\mathcal{P}_i = P_i - \frac{1}{2} h_i^k P_k; \quad P_i = \mathcal{P}_i + \frac{1}{2} h_i^k \mathcal{P}_k + O^2(h). \quad (III.94)$$

Якобиан этого преобразования в случае бесследовых возмущений метрики ( $h = 0$ ) равен

$$\frac{\partial(P_1, P_2, P_3, P_4)}{\partial(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)} = 1 + O^2(h). \quad (III.95)$$

### III.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

В переменных  $\mathcal{P}_i$  функция Гамильтона с точностью до членов совпадает со своим невозмущенным значением

$$\bar{\mathcal{H}}(x, P) = \frac{1}{2}g^{ik}\mathcal{P}_i\mathcal{P}_k = \mathcal{H}(x, \mathcal{P}.) \quad (\text{III.96})$$

Поскольку для ГВ  $g' = g + O^2(h)$ , элемент объема пространства импульсов инвариантен по отношению к преобразованиям(III.94)

$$d\pi' = \frac{(2S + 1)}{\sqrt{-g}(2\pi)^3}d\mathcal{P}_1d\mathcal{P}_2d\mathcal{P}_3d\mathcal{P}_4\delta\left(\mathcal{H} - \frac{1}{2}m^2\right) = d\pi. \quad (\text{III.97})$$

Учитывая тот факт, что в инвариантные амплитуды рассеяния  $M_{jf}$  импульсные переменные могут входить лишь путем всевозможных сверток типа  $(P, P')$  можно строго показать, что интеграл столкновений инвариантен с точностью  $O^2(h)$  по отношению к преобразованиям (III.94). Таким образом, представляя функцию распределения  $f(x, P)$  в виде

$$f(x^i, P_i) = f_0(\mathcal{P}, \eta) + \delta f(\eta, \Phi(x), \mathcal{P}_i), \quad (\text{III.98})$$

где  $f_0(\eta, \mathcal{P})$  - изотропное решение кинетических уравнений (III.50), и линеаризируя кинетические уравнения, получим для функции  $\delta f$ :

$$\mathcal{P}^i\frac{\partial\delta f}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{P}_4}\mathcal{P}_\beta\mathcal{P}^\alpha h'_\alpha{}^\beta = J^1[f_0, \delta f]. \quad (\text{III.99})$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной  $\eta$ ,  $J^1$  - линеаризованный интеграл столкновений, введенный в разделе II.1. Вычисляя возмущение ТЭИ после преобразования (III.94), найдем

$$\delta T_{ik} = -Ph_{ik} + \sum \int \mathcal{P}_i\mathcal{P}_k\delta f d\pi. \quad (\text{III.100})$$

Из линейных уравнений (III.99) видно, что  $\delta f \sim S_{\alpha\beta}\mathcal{P}^\alpha\mathcal{P}^\beta$ . Действительно, предполагая такую зависимость, приходим к выводу, что интеграл столкновений вследствие его инвариантности может быть линейной комбинацией сверток типа  $S_{\alpha\beta}\mathcal{P}^\alpha\mathcal{P}^\beta$ ,  $S_{\alpha\beta}n^\alpha\mathcal{P}^\beta$ ,  $S_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta$ ,  $S_{\alpha\beta}\delta^{\alpha\beta}$ , из которых лишь первая отлична от нуля. Интегралы же вида (III.100) определяются лишь одним выделенным направлением,  $n_\alpha$ . Поэтому эти интегралы являются линейной комбинацией сверток

$$S_{\gamma\delta}n^\gamma n^\delta n^\alpha n^\beta, \quad S_{\gamma\delta}\delta^{(\gamma\alpha}n^\beta n^{\delta)}, \quad S_{\gamma\delta}\delta^{(\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta)},$$

из которых лишь последняя отлична от нуля и равна  $S'_{\alpha\beta}$ . В связи с этим уравнение (III.91) может быть упрощено:

$$\psi'' + n^2\psi + 16\pi a^{-2}\tau_f^* - \frac{4\pi a^{-2}\psi}{3}(\mathcal{E}^* - 3P^*) = 0, \quad (\text{III.101})$$

где

$$\tau_f^* = S^{-2} \sum \int S'_{\alpha\beta}\mathcal{P}_\alpha\mathcal{P}_\beta\delta f d\pi^*; \quad S^2 \equiv S_{\alpha\beta}S'_{\alpha\beta}. \quad (\text{III.102})$$

Глава III. Кинетика ранних стадий космологического расширения

Перейдем к вычислению  $\tau_f^*$ . Вследствие указанных свойств интеграл столкновений  $J^1$  для равновесных распределений может быть представлен в виде [157]

$$J^1[\delta f, f_0] = -\frac{\delta f}{1 \pm f_0} \mathcal{K}(\mathcal{P}, \eta), \quad (\text{III.103})$$

где

$$\mathcal{K}(\mathcal{P}, \eta) = \sum \int \Pi' d\pi \delta(\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_I) W_{IF} f_I^0 (1 + f_F^0). \quad (\text{III.104})$$

Вычислим  $\mathcal{K}(\mathcal{P}, \eta)$  для четырехчастичных взаимодействий. Для этого рассмотрим более общую задачу об упрощении интеграла четырехчастичных взаимодействий (III.29), определенного на изотропных распределениях  $f^0(P_4, \eta)$ . Для выполнения двух внутренних интегрирований по импульсным пространствам конечных состояний перейдем с помощью преобразований Лоренца в локальную СО центра масс. В этой СО внутреннее интегрирование проводится элементарно. После обратного преобразования Лоренца и перехода к сферической системе координат в импульсном пространстве, найдем

$$\begin{aligned} J_{ab}(p) = & -\frac{(2S_b + 1)}{8\pi^4 2^4 p} \int_0^\infty \frac{qdq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{s_-}^{s_+} \frac{ds}{1 + \left(\frac{m_a^2 - m_b^2}{S}\right)^2} \frac{1}{16\pi\lambda^2} \times \\ & \times \int_{-\frac{\lambda^2}{s}}^0 dt |\overline{M}(s, t)|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \{ f_a(p_4) f_b(q_4) [1 \pm f_a(P_4 - \Delta)] [1 \pm f_b(q_4 + \Delta)] - \\ & - f_a(P_4 - \Delta) f_b(q_4 + \Delta) [1 \pm f_a(P_4)] [1 \pm f_b(q_4)] \}, \end{aligned} \quad (\text{III.105})$$

где

$$\begin{aligned} \Delta = & -\frac{ts}{\lambda^2} \left[ p_4 - q_4 - (p_4 + q_4) \frac{m_a^2 - m_b^2}{s} \right] - \cos \varphi \sqrt{-\frac{ts}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{ts}{\lambda^2} \right)} \times \\ & \times \left[ 4p_4 q_4 \left( 1 - \frac{m_a^2 + m_b^2}{S} \right) - \frac{\lambda^2}{S} - \frac{4m_b^2 p_4^2}{S} - \frac{4m_a^2 q_4^2}{S} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{III.106})$$

$$\lambda^2 = S^2 + m_a^4 + m_b^4 - 2S(m_a^2 + m_b^2) - 2m_a^2 m_b^2 \quad (\text{III.107})$$

- функции треугольника [143];  $S, t$  - кинематические инварианты (III.22);

$$S_\pm = m_a^2 + m_b^2 + 2(p_4 q_4 \pm pq). \quad (\text{III.108})$$

При этом необходимо иметь ввиду определение полного сечения взаимодействия [143]

$$\sigma_{t_0 t}(S) = \frac{1}{16\pi\lambda^2} \int_{-\frac{\lambda^2}{S}}^0 dt |\overline{M}(S, t)|^2. \quad (\text{III.109})$$

### III.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

В частности, в ультрарелятивистском пределе эти выражения значительно упрощаются:

$$J_{ab}(p) = -\frac{(2S_b + 1)4\pi}{8p(2\pi)^4} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{dS}{16\pi} \int_0^1 dx \overline{|M(S, x)|^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ \times \{f_a(p)f_b(q)[1 \pm f_c(p - \Delta)][1 \pm f_d(q + \Delta)] - \\ - f_c(p - \Delta)f_d(q + \Delta)[1 \pm f_a(p)][1 \pm f_b(q)]\}, \quad (\text{III.110})$$

где  $x = -t/s$ ;

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx \overline{|M(s, x)|^2} \equiv \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (\text{III.111})$$

Затухание ГВ на нерелятивистских частицах всегда мало вследствие малого количества последних. Как видно из оценок  $\tau \sim P\psi$ , поэтому в нерелятивистской Вселенной поведение ГВ в жидкостях и газах описывается одним уравнением

$$\psi'' + n^2\psi - \frac{2}{\eta^2}\psi = 0, \quad (\text{III.112})$$

согласно которому для высокочастотных ГВ

$$K^2 \gg 8\pi\mathcal{E} \implies n\eta \gg 1 \quad (\text{III.113})$$

возможно бесстолкновительное затухание (см.[159], [160]); амплитуда же низкочастотных ГВ эволюционирует по закону

$$\psi = c_1\eta^2 + c_2\eta^{-1}. \quad (\text{III.114})$$

Указанные случаи подробно проанализированы в работе [82]. Обратимся к исследованию эволюции ГВ в ультрарелятивистской плазме. В этом случае  $\mathcal{E} = 3P$ , и уравнение (III.101) принимает вид:

$$\psi'' + n^2\psi + 16\pi a^{-2}\tau_f^* = 0. \quad (\text{III.115})$$

С учетом (III.110), (III.112), отбрасывая несущественные в горячей Вселенной статистические множители, найдем для ультрарелятивистских частиц [157],[105],[158]<sup>1</sup>

$$\mathcal{K}(P, \eta) = \nu(P, \eta)P;$$

$$\nu(P, \eta) = \frac{1}{8P^2} \sum \frac{4\pi(2S + 1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f_0(q)dq \int_0^{4pq} S\sigma_{tot}(S')dS'. \quad (\text{III.116})$$

Кинетическое уравнение (III.99) для ультрарелятивистских частиц принимает вид

$$\frac{\partial \delta f}{\partial \eta} + a\nu\delta f - \frac{\mathcal{P}_\alpha}{\mathcal{P}} \frac{\partial \delta f}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{df_0}{d\mathcal{P}} \frac{S_{\alpha\beta}\mathcal{P}_\alpha\mathcal{P}_\beta}{\mathcal{P}} \left(\frac{\psi}{a}\right)' e^{-in_\alpha x^\alpha}. \quad (\text{III.117})$$

<sup>1</sup>Статья [158], по существу, является более поздней англоязычной версией статьи [105], но более доступной читателю.

Глава III. Кинетика ранних стадий космологического расширения

Будем искать решение уравнения (III.117), обращающееся в нуль при  $S_{\alpha\beta} = 0$  и имеющее структуру бесстолкновительного решения (III.117) при  $\eta \rightarrow 0$ . Указанное решение удобно записать в форме

$$\delta f = -\frac{1}{2} \frac{df_0}{d\mathcal{P}} \frac{S_{\alpha\beta} \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta}{\mathcal{P}} \exp[-in_\alpha x^\alpha - i\pi_\alpha n_\alpha - \gamma(\eta)] \times \\ \times \lim_{\eta_0 \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\psi}{a} \right)_{\eta_0} e^{i\pi_\alpha n_\alpha \eta_0} + \int_{\eta_0}^{\eta} \left( \frac{\psi}{a} \right)' e^{\gamma(\eta') + i\pi_\alpha n_\alpha \eta'} d\eta' \right], \quad (\text{III.118})$$

где введены единичный вектор  $\pi_\alpha = \mathcal{P}_\alpha / \mathcal{P}$  и декремент затухания

$$\gamma(\mathcal{P}, \eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \nu(\eta', \mathcal{P}) a(\eta') d\eta' \equiv \int_{t_0}^t \nu(t, \mathcal{P}) dt. \quad (\text{III.119})$$

Полагая  $\left( \frac{\psi}{a} \right)_{\eta_0} \rightarrow 0$ ,  $\frac{\psi}{a} = h_0 e^{-in\eta}$ ,  $\gamma = 0$ , получим из (III.118) первый член разложения точного решения бесстолкновительного уравнения (III.117).

Нетрудно вычислить возмущение ТЭИ, обозначенное  $\delta f$ ,

$$\delta T_{\alpha\beta} = -\frac{\pi S_{\alpha\beta}}{4a^2} e^{-in_\alpha x^\alpha} \sum \frac{(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathcal{P}^4 \frac{df_0}{d\mathcal{P}} e^{-\gamma(\mathcal{P}, \eta)} \times \\ \lim_{\eta_0 \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\psi}{a} \right)_{\eta_0} J[\eta - \eta_0] + \int_{\eta_0}^{\eta} e^{\gamma(\mathcal{P}, \eta')} \left( \frac{\psi}{a} \right)' J[n(\eta - \eta')] d\eta' \right], \quad (\text{III.120})$$

где введена функция

$$J(x) = \frac{8}{x^2} \left[ \frac{\sin x}{x} \left( \frac{3}{x^2} - 1 \right) - \frac{3 \cos x}{x^2} \right], \quad (\text{III.121})$$

имеющая асимптотики:

$$J(x)|_{x \rightarrow \infty} \simeq -\frac{8 \sin x}{x^3}; \quad J(0) = \frac{16}{15}. \quad (\text{III.122})$$

Таким образом, согласно определению (III.102) и с учетом соотношения, справедливого на ультрарелятивистской стадии расширения ( $a = a_1 \eta$ ):

$$T^{*4} = \frac{45 a_1^2}{16 \pi^3 N} \quad (\text{III.123})$$

получим

$$16 \pi a^{-2} \tau_F^* = -\frac{45}{16 \pi^2 N \eta} \sum \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^\infty x^4 \frac{df_0}{dx} e^{-\gamma(x, \eta)} \times \\ \lim_{\eta_0 \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\psi}{\eta_0} \right)_{\eta_0} J[n(\eta - \eta_0)] + \int_{\eta_0}^{\eta} e^{\gamma(x, \eta')} J[n(\eta - \eta')] d\eta' \left( \frac{\psi}{\eta'} \right)' \right], \quad (\text{III.124})$$

### III.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

где  $x = \mathcal{P}/T^* \equiv p/T$ .

1. Рассмотрим сначала случай *сильного затухания* ( $\gamma \gg 1$ )

$$\nu(t, \mathcal{P}) \gg k; \quad \nu(t, \mathcal{P})t \gg 1. \quad (\text{III.125})$$

Производя асимптотическую оценку методом Фурье интеграла (III.124) с учетом (III.123) приведем уравнение (III.115) к виду:

$$\psi'' + n^2\psi + \frac{8}{5} \left( \frac{\psi}{\eta} \right)' \frac{1}{a\bar{\nu}_{eff}\eta} = 0, \quad (\text{III.126})$$

где

$$\frac{1}{\bar{\nu}_{eff}} \stackrel{def}{=} \frac{\sum (2S+1) \int_0^\infty x^4 \frac{df_0}{dx} \frac{dx}{\nu(x, \eta)}}{4 \sum (2S+1) \int_0^\infty x^3 f_0 dx}. \quad (\text{III.127})$$

Вследствие (III.125) последний член в левой части уравнения (III.126) мал по сравнению с первыми двумя, - он отвечает слабому затуханию вакуумных колебаний ГВ:

$$h_\beta^\alpha = -\psi S_{\alpha\beta} a^{-1} = -\frac{1}{a} \exp \left( - \int_0^\eta \frac{4d\eta}{5\bar{\nu}a\eta^2} \right) [S_{\alpha\beta}^+ e^{-i(n\eta - n_\alpha x^\alpha)} + S_{\alpha\beta}^- e^{+i(n\eta - n_\alpha x^\alpha)}]. \quad (\text{III.128})$$

При  $\bar{\nu}t \rightarrow \infty$  затухание ГВ исчезает: в ультрарелятивистской жидкости ГВ распространяется также как в вакууме.

2. Пусть теперь *затухание слабо*, т.е. имеет место одно из неравенств противоположных (III.125), или оба одновременно. Тогда в бесстолкновительном приближении (III.124) можно упростить:

$$\begin{aligned} 16\pi a^{-2} \tau_F^* &= \\ &= \frac{3}{2\eta} \lim_{\eta_0 \gg 0} \left[ \left( \frac{\psi}{\eta} \right)_{\eta_0} J[n(\eta - \eta_0)] + \int_0^\eta \left( \frac{\psi}{\eta'} \right)' [n(\eta - \eta')] d\eta' \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.129})$$

Выражение (III.129) имеет две асимптотики.

В *длинноволновом приближении*  $n\eta \ll 1$  найдем

$$16\pi a^{-2} \tau_F^* \simeq \frac{8\psi}{5\eta^2}. \quad (\text{III.130})$$

Подставляя (III.130) в уравнение (III.115), получим колебания, исследованные в работе [82]:

$$\psi = \sqrt{\eta} \left[ c_+ \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \ln n\eta \right) + c_- \sin \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \ln n\eta \right) \right]. \quad (\text{III.131})$$

### Глава III. Кинетика ранних стадий космологического расширения

Такие колебания, однако, происходят лишь в том случае, если бесстолкновительная ситуация имеет место с сингулярного состояния  $\eta = 0$ . Если же бесстолкновительной фазе предшествовала сильностолкновительная, окончившаяся в момент «времени»  $\eta_0$ , то вместо (III.130)  $\tau_F^*$  будет описываться выражением

$$16\pi a^{-2} \tau_F^* \simeq \frac{8}{5} \left\{ \frac{\psi}{\eta^2} - \frac{\psi(\eta_0)}{\eta\eta_0} \right\}, \quad (\text{III.132})$$

и уравнение (III.123) становится неоднородным

$$\psi'' + \frac{8\psi}{5\eta^2} = \frac{8\psi(\eta_0)}{5\eta\eta_0}. \quad (\text{III.133})$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию сшивки в момент  $\eta = \eta_0$ , имеет вид:

$$\psi = \psi(\eta_0) \frac{\eta}{\eta_0} + c_- \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \sin \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \ln \frac{\eta}{\eta_0} \right). \quad (\text{III.134})$$

При этом главная часть амплитуды ГВ,  $h_\beta^\alpha$ , остается постоянной. Таким образом решение для длинных ГВ (III.131) полученное в [82], верно в том случае, когда бесстолкновительная фаза имела место вблизи космологической сингулярности, и неверно, когда бесстолкновительному этапу предшествовал гидродинамический. В последнем случае, как это видно из (III.134), ГВ «запоминает» свое состояние на гидродинамическом этапе  $h_\beta^\alpha = \text{Const}$ .

Рассмотрим теперь эволюцию *коротких* в смысле (III.113) ГВ при произвольном затухании  $\gamma(\eta, \mathcal{P})$ . В этом случае удобно положить

$$\psi = \tilde{\psi}(\eta) \exp(-i \int \Omega(\eta) d\eta),$$

где  $\Omega(\eta)$  - большая величина,  $\tilde{\psi}(\eta)$  - медленно меняющаяся функция. При  $\eta \rightarrow 0$  ГВ с любыми  $n$  являются длинными, поэтому решение (III.118) необходимо переопределить на момент времени  $\eta_0$ , когда ГВ становится короткой:  $\eta_0 \gtrsim n^{-1}$ . Переопределим в (III.118) начальные условия на этот момент времени и вычислим интеграл в (III.124) методом Фурье. При оценке методом Фурье этого интеграла необходимо иметь ввиду, что асимптотикой (III.122) пользоваться нельзя, так как она приводит к расходящемуся выражению. Вычисление можно провести и в случае нерелятивистских частиц, при этом выражение (III.116) необходимо заменить на  $\mathcal{K} = \sqrt{m^2 + p^2} \nu(p, \eta)$ . Проведя необходимые вычисления, найдем:

$$16\pi a^{-2} \tau_F^* = -\psi \frac{2\pi\Omega a^2}{n^4} \sum \frac{(2S+1)}{2\pi^2} \int_0^\infty p \sqrt{m^2 + p^2} \frac{df_0}{dp} \Omega' dp \times \left[ \frac{5}{3} p^2 n^2 \Omega'^2 (m^2 + p^2) + \frac{[\Omega'^2 m^2 + p^2 (\Omega'^2 - n^2)]^2}{2\Omega' n p \sqrt{m^2 + p^2}} \times \ln \left| \frac{\Omega' \sqrt{m^2 + p^2} + np}{\Omega' \sqrt{m^2 + p^2} - np} \right| \right], \quad (\text{III.135})$$

где  $\Omega' = \Omega + ia(\eta)\nu(p, \eta)$ . В частности, для ультрарелятивистских частиц получим из (III.135):

III.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

$$16\pi a^{-2}\tau_F^* = -\frac{3\Omega}{4n^4\eta^2}\psi \sum \frac{(2S+1)}{2\pi^2} \times \\ \times \int_0^\infty x^4 \frac{df_0}{dx} \Omega' dx \left[ \frac{2}{3}n^2 - (\Omega'^2 - n^2) + \frac{(\Omega'^2 - n^2)^2}{2\Omega'n} \ln \left| \frac{\Omega' + n}{\Omega' - n} \right| \right]. \quad (\text{III.136})$$

Для слабостолкновительной плазмы  $\Omega \approx n$ , поэтому отбрасывая в (III.136) члены, пропорциональные  $\Omega^2 - n^2$ , приведем уравнение (III.115) к виду

$$\tilde{\psi}'' - 2i\tilde{\psi}'\Omega - (\Omega^2 - n^2)\tilde{\psi} + \frac{2\Omega^2}{n^2\eta^2}\tilde{\psi} - \frac{4i\bar{\nu}a}{n\eta^2}\tilde{\psi} = 0, \quad (\text{III.137})$$

где  $\bar{\nu}$  определяется формулой, аналогичной (III.127). Решая (III.137) в указанном приближении, найдем

$$\Omega^2 \simeq n^2 + 2\eta^{-2}; \quad (\text{III.138})$$

$$\tilde{\psi} \simeq \mathcal{K}^{1/2}(\eta) \stackrel{def}{=} \exp \left[ -\frac{1}{2}\gamma_G(\eta) \right]; \quad (\text{III.139})$$

где

$$\gamma_G(\eta) = \frac{4}{\eta^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\bar{\nu}a}{\eta^2} d\eta = \int_{t_0}^t \frac{\bar{\nu}dt}{k^2 t^2}. \quad (\text{III.140})$$

Последняя формула согласуется с выражениями для коэффициента затухания ГВ, рассмотренными в [77], [75], [157]. Отметим любопытный факт, связанный с высокочастотными ГВ. Пренебрегая затуханием ГВ и вводя вместо  $\psi$  конформно соответствующую величину  $\Phi = \psi/a \sim h_\beta^\alpha$ , приведем уравнение (III.137) к виду уравнения для массивного скалярного поля без источников (скалярная кривизна в ультрарелятивистском мире равна нулю)

$$\Delta_2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi + m_G^2 \Phi = 0 \quad (\text{III.141})$$

с эффективной массой гравитона

$$m_G = \frac{1}{\sqrt{2}t}. \quad (\text{III.142})$$

Выясним вопрос об эволюции энергии ГВ, которая вследствие нелокализваемости энергии гравитационного поля имеет смысл лишь в приближении геометрической оптики. Усредненный псевдотензор энергии-импульса ГВ в этом приближении равен [47]:

$$\langle t^{ik} \rangle = \frac{1}{32\pi} \langle h_q^{n,i} h_n^{*q,k} \rangle. \quad (\text{III.143})$$

Глава III. Кинетика ранних стадий космологического расширения

Подставляя в (III.143)  $h_{\beta}^{\alpha}$  в виде (III.92) и усредняя полученное выражение по всем направлениям  $n_{\alpha}$ , получим ТЭИ идеальной ультррелятивистской жидкости с плотностью энергии

$$\mathcal{E}_G = \frac{S^2 n^2}{a^4} \exp[-\gamma_G(\eta)]. \quad (\text{III.144})$$

Таким образом энергия ГВ в сопутствующем объеме падает пропорционально  $\exp(-\gamma_G(\eta))$ , т.е. в приближении (III.113) величину  $\mathcal{K}(\eta)$  можно назвать декрементом затухания энергии ГВ.

Подводя итоги, отметим, что столкновительное затухание космологических ГВ на всех мыслимых реакциях невелико. Однако причиной слабости затухания ГВ является не слабость межчастичных взаимодействий, а то обстоятельство, что в среде с обильными межчастичными взаимодействиями, т.е. в идеальной жидкости, ГВ не затухают. Для того, чтобы обеспечить заметное затухание ГВ, столкновения должны быть слишком частыми, что в свою очередь приводит к слабости затухания. Для иллюстрации проведем расчет затухания ГВ в реакциях типа  $ee^+ \rightarrow$  адроны. Сечение этого процесса имеет скейлинговый характер [161]

$$\sigma_{tot}(S) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} \sum e_i^2 \equiv \frac{4\pi\alpha^2 Q^2(S)}{3S}, \quad (\text{III.145})$$

где  $e_i$  - фундаментальные заряды, число которых слабо, возможно логарифмически, растет с ростом  $S$ . Проводя необходимые вычисления, найдем

$$\bar{\nu} = \frac{45\xi(3)N'}{2\pi^3} T\alpha^2 Q^2(T), \quad (\text{III.146})$$

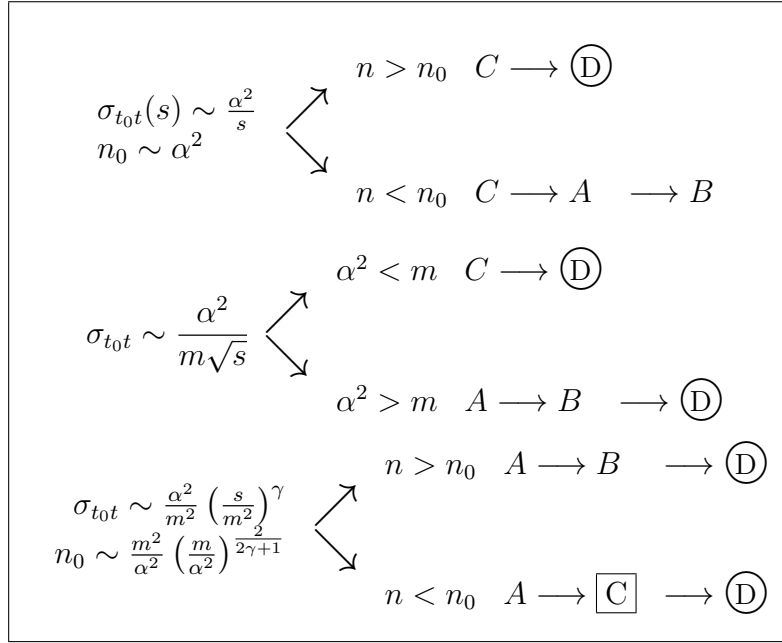
где

$$N' = \sum (2S + 1)\delta;$$

Изобразим схематически эволюцию ГВ в горячей Вселенной в зависимости от поведения полного сечения рассеяния. Выделим следующие ситуации:

- $A$  :  $n\eta \ll 1$ ,  $av\eta \gg 1$  - длинные волны в жидкости,
- $B$  :  $n\eta \gg 1$ ,  $av\eta \gg 1$  - короткие волны в жидкости,
- $C$  :  $n\eta \ll 1$ ,  $av\eta < 1$  - длинные волны в слабостолкновительном газе,
- $D$  :  $n\eta \gg 1$ ,  $av\eta < 1$  - короткие волны в слабостолкновительном газе.

III.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной



**Рис.3.** Столкновительные процессы в космологической плазме, приводящие к затуханию космологических гравитационных волн. Кружками обведены ситуации, в которых происходит столкновительное затухание ГВ, квадратом - область фиксации амплитуды ГВ.

Вопрос эффективности затухания требует проведения расчетов для конкретных реакций. Результаты таких расчетов, выполненных в работах [77], [75], [157], проведены в Таблице 2.

В последних двух столбцах таблицы приведены результаты, просуммированные по всем реакциям данного типа.  $G$  - константа Ферми,

$$\sigma = \frac{0,1\alpha_X N^2 m_{p1}}{m_X},$$

$m_{p1}$  - планковская масса,  $m_X$  - масса  $X$  - бозонов,  $\alpha_X$  - константа взаимодействия,  $N_X$  - число участвующих в реакциях частиц.

$$N' = \sum (2S + 1)\delta; \quad (III.147)$$

величина  $\delta$  введена в разделе III.3. Таким образом

$$\gamma_G(\infty) = \frac{4(\bar{\nu}a)\eta_0}{n^2\eta_0} \sim \frac{1}{\eta_0}. \quad (III.148)$$

Как выбрать момент  $\eta_0$ ? Затухание ГВ возможно при одновременном выполнении условий  $n\eta > 1$  и  $\bar{\nu}a < n$  (см. Рис. III.5) - в противном случае имеем либо длинные ГВ, либо ГВ в жидкости, и в обоих случаях ГВ не затухают. Комбинируя эти два условия, приходим к выводу что  $\gamma_G(\infty)$  на скейлинговых взаимодействиях может быть порядка 1:  $\gamma_G(\infty) \simeq 4\beta^2$ , где  $\beta < 1$  - неизвестный фактор, гарантирующий строгость сделанных приближений,

Глава III. Кинетика ранних стадий космологического расширения

причем с таким декрементом затухают все ГВ, имеющие на сегодняшний момент длину волны

$$\lambda > \frac{\lambda\gamma\beta \cdot 2\pi^3}{45\xi(3)Q^2(t_0)N'\alpha^2} \sim 10^4\lambda_\gamma,$$

где  $\lambda_\gamma$  - длина волны реликтовых фотонов. Более строгий результат в случае скейлинговых взаимодействий вряд ли возможно получить, так как в этом случае коротковолновой фазе предшествует длинноволновая в газе (III.131) и с уточнением декремента затухания все менее ясным становится его смысл.

**Таблица 2.** Декремент затухания космологических гравитационных волн в ранней Вселенной для различных процессов в космологической плазме

Процесс	Полное сечение рассеяния $\sigma_{tot}(s)$	Область современных длин волн, где затухание максимально (в см)	Максимальное значение $\gamma_G$
$e\gamma^+ \leftrightarrow e\gamma^1)$ $ee^+ \leftrightarrow \gamma\gamma$	$\frac{2\pi\alpha^2}{s} \left( \ln \frac{s}{m^2} + \frac{1}{2} \right)$	$\sim 100$	0,01
$ee^+ \leftrightarrow \mu\mu^+ 2)$ $ee^+ \leftrightarrow$ адроны	$\frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q^2(s)$	$\lambda > \frac{10^4\beta^2\lambda_\gamma}{Q^2N'} \sim 10^3$	$4\beta^2$
$e\nu \leftrightarrow e\nu 3)$ $ee^+ \leftrightarrow \nu\bar{\nu}$ $e\bar{\nu} \leftrightarrow e\bar{\nu}$ $\nu_\mu e \leftrightarrow \nu_e\mu$ $\nu_\mu\bar{\nu}_e \leftrightarrow e_+\mu^-$ $\nu_\mu\mu_+ \leftrightarrow e_+\nu_e$	$G_F^2 s (g_L^2 + \frac{1}{3}g_R^2)/\pi$ $G_F^2 s (\frac{1}{3}g_L^2 + \frac{1}{3}g_R^2)/\pi$ $G_F^2 s (\frac{1}{3}g_L^2 + g_R^2)/\pi$ $G_F^2 s/\pi$ $G_F^2 s/3\pi$ $G_F^2 s/3\pi$	$\sim 2 \cdot 10^{20}$	0,74
$X \leftrightarrow \bar{q}\bar{q} 4)$ $X \leftrightarrow ql$	$ M ^2 = 8\pi\alpha_x m_x^2 N$ $\sigma > 1$	$\frac{\sigma^{1/3}}{\alpha_X N}$	$0,29 \frac{N_X}{N}$ $\sim 3 \cdot 10^{-2}$

<sup>1)</sup>По данным работы [48]; <sup>2)</sup>по данным работ [77],[75]; <sup>3)</sup>по данным работы [48]; <sup>4)</sup>по данным работ [48],[162].

Подводя итоги, отметим, что столкновительное затухание космологических ГВ на всех мыслимых реакциях невелико. На этот факт указывалось и ранее (см.[151]). Однако причиной слабости затухания ГВ является не слабость межчастичных взаимодействий, а то обстоятельство, что как раз в среде с интенсивными межчастичными взаимодействиями, т.е., в идеальной жидкости, ГВ не затухают. Для того, чтобы обеспечить заметное затухание ГВ, столкновения не должны быть слишком частыми, что в свою очередь приводит к слабости затухания. Единственными достаточно эффективными взаимодействиями, приводящими к затуханию ГВ, являются взаимодействия, имеющие скейлинговое

### III.5. Столкновительное затухание ГВ в горячей Вселенной

поведение сечения. Именно масштабно инвариантные взаимодействия вследствие одинаковой с частотой ГВ временной зависимостью эффективной частоты столкновений могут неограниченно долго влиять на ГВ. Однако при попытке вычислить коэффициент затухания энергии ГВ в наиболее эффективной области  $\bar{\nu} \sim k$  мы попадаем в длинноволновую бесстолкновительную фазу, в которой затруднено определение энергии ГВ. Расчеты коэффициента затухания на электрослабых взаимодействиях, в общем, подтвердили оценку Хоукинга [163] и несколько уточнили ее. Проведенные расчеты указывают на то, что можно ожидать завала энергетического спектра космологических ГВ примерно в  $1,5 \div 2$  раза при длинах волн  $\lambda \gtrsim 10^4 \beta^2 / N' Q^2$  (см) и дополнительно к этому такого же эффекта при  $\lambda \sim 2 \times 10^{20}$  (см). Экспериментальное обнаружение этих завалов дало бы информацию о значении фундаментальных констант взаимодействия при сверхвысоких энергиях.

## Глава IV

# Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием

### IV.1 Каноническая формулировка классического скалярного взаимодействия

В последнее время опубликовано большое количество работ по позднему ускорению Вселенной. Для решения проблемы вторичного ускорения Вселенной во многих работах предлагается коренным образом изменить фундаментальные принципы физики. Однако, сейчас появляются некоторые аргументы в пользу того, что сложные, многокомпонентные, классические физические системы также могут приводить ко вторичному ускорению Вселенной. В частности, такие аргументы были приведены Д. Гальцовым, а также автором в докладах на семинаре Gracos-2009 (см., например, [164], [165]). В цитированной работе [165] был приведен пример космологической эволюции полностью выродившейся Ферми-системы со скалярным взаимодействием частиц, с начальной инфляцией и поздним ускорением. В работе В. Журавлева [166] исследовалась космологическая эволюция двухкомпонентной системы, состоящей из идеальной жидкости и скалярного поля. В этих работах показано, что такие космологические модели могут иметь начальную инфляционную стадию и позднее ускорение. Таким образом, космологические модели с многокомпонентной материей в состоянии описать основные наблюдательные данные о расширении Вселенной. Некоторые указания на возможность такого поведения сложных систем со скалярным взаимодействием частиц были даны также в работах [167], [181]. В отличие от двухкомпонентной системы «скалярное поле + идеальная жидкость», в которой взаимодействие компонентов осуществляется лишь через гравитацию, мы рассмотрим статистические системы скалярно заряженных частиц, в которой некоторые сорта частиц могут прямым образом взаимодействовать со скалярным полем через некоторый фундаментальный *скалярный заряд*. С другой стороны, статистическая система, обладая, вообще говоря, ненулевым скалярным зарядом и сама являясь источником скалярного поля, может эффективно влиять на скалярное поле, управляя его поведением. Такое скалярное взаимодействие было введено в общерелятивистскую кинетическую теорию в 1983 г авто-

#### IV.1. Каноническая формулировка классического скалярного взаимодействия

ром [169, 170, 171, 172] и несколько позже – Г.Г. Ивановым [173]. В частности, в работах [170, 171] на основе кинетической теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием.

##### IV.1.1 Канонические уравнения движения

Канонические уравнения движения релятивистской частицы относительно пары канонически сопряженных динамических переменных  $x^i$  (координат) и  $P_i$  (обобщенного импульса) имеют вид (см., например, [170]):

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \quad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (IV.1)$$

где  $H(x, P)$  - релятивистски инвариантная функция Гамильтона. Вычисляя полную производную от функции динамических переменных  $\Psi(x^i, P_k)$ , с учетом (IV.1) найдем:

$$\frac{d\Psi}{ds} = [H, \Psi], \quad (IV.2)$$

где введены инвариантные скобки Пуассона:

$$[H, \Psi] = \frac{\partial H}{\partial P_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}. \quad (IV.3)$$

Вследствие (IV.3) функция Гамильтона является интегралом движения частицы, - этот интеграл движения называется массой покоя частицы (заметим, что здесь и в дальнейшем принята универсальная система единиц  $G = c = \hbar = 1$ ):

$$\frac{dH}{ds} = [H, H] = 0, \Rightarrow H = \frac{1}{2}m^2 = Const. \quad (IV.4)$$

Соотношение (IV.4) называется соотношением нормировки. Инвариантная функция Гамильтона определяется неоднозначно. Действительно, вследствие (IV.3) если  $H(x, P)$  – функция Гамильтона, то и любая непрерывно дифференцируемая функция  $f(H)$  также является функцией Гамильтона. В работе автора [169] релятивистски - инвариантная Функция Гамильтона частицы со скалярным зарядом  $q$ , находящейся в скалярном поле с потенциалом  $\Phi$  вводилась соотношением:

$$H(x, P) = \frac{1}{2}m \left[ \frac{(P, P)}{m + q\Phi} - q\Phi \right], \quad (IV.5)$$

где  $(a, b)$  здесь и в дальнейшем есть скалярное произведение векторов четырехмерных векторов  $a$  и  $b$ :

$$(a, b) = g_{ik}a^i b^k.$$

В другой работе автора [169] релятивистски - инвариантная функция Гамильтона вводилась соотношением:

$$H(x, P) = \sqrt{(P, P)} - q\Phi. \quad (IV.6)$$

В этой работе, мы дадим другое, более гибкое, определение инвариантной функции Гамильтона частицы в скалярном поле, соответствующей нулевой ее нормировке [174]:

$$H(x, P) = \frac{1}{2}[m_*^{-1}(P, P) - m_*] = 0, \quad (\text{IV.7})$$

где  $m_*(\Phi)$  – пока произвольная скалярная функция. Из определения (IV.7) следует, что вектор обобщенного импульса времени подобен:

$$(P, P) = m_*^2. \quad (\text{IV.8})$$

Отметим полезное для дальнейшего соотношение, являющееся следствием (IV.3), (IV.7) и (IV.8):

$$[H, P^k] = \nabla^k m_* \equiv g^{ik} \partial_i m_*. \quad (\text{IV.9})$$

Из канонических уравнений (IV.1) получим связь между обобщенным импульсом и вектором скорости частицы:

$$u^i \equiv \frac{dx^i}{ds} = m_*^{-1} P^i \Rightarrow P^i = m_* u^i, \quad (\text{IV.10})$$

который автоматически удовлетворяет соотношению нормировки:

$$(u, u) = 1. \quad (\text{IV.11})$$

### IV.1.2 Уравнения движения в Лагранжевой формулировке

Из второй группы канонических уравнений (IV.1) получим уравнения движения в Лагранжевой формулировке:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \partial_{,k} \ln |m_*| \mathcal{P}^{ik}, \quad (\text{IV.12})$$

где:

$$\mathcal{P}^{ik} = \mathcal{P}^{ki} = g^{ik} - u^i u^k \quad (\text{IV.13})$$

– тензор ортогонального проектирования на направление  $u$ , такой что:

$$\mathcal{P}^{ik} u_k \equiv 0; \quad \mathcal{P}^{ik} g_{ik} \equiv 3. \quad (\text{IV.14})$$

Из этих соотношений и уравнений Лагранжа (IV.12) вытекает строгое следствие ортогональности векторов скорости и ускорения:

$$g_{ik} u^i \frac{du^k}{ds} \equiv 0. \quad (\text{IV.15})$$

Из соотношений (IV.8), (IV.10), а также уравнений Лагранжа (IV.12) следует, что скаляр  $\varphi$  имеет смысл *эффективной инертной массы частицы,  $m_*$ , в скалярном поле*:

$$\varphi = m_*. \quad (\text{IV.16})$$

Заметим, что указанному выбору функции Гамильтона соответствует следующая функция действия:

$$S = \int m_* ds. \quad (\text{IV.17})$$

### IV.1.3 Интегралы движения

Найдем теперь условия существования линейного интеграла канонических уравнений движения (IV.1), для чего вычислим полную производную по каноническому параметру от скалярного произведения  $(\xi, P)$ . Используя канонические уравнения движения (IV.1), соотношение нормировки (IV.8), а также связь обобщенного импульса с кинематическим (IV.10), найдем:

$$\frac{d(\xi, P)}{ds} = \frac{1}{m_*} P^i P^k \frac{L}{\xi} g_{ik} + \frac{L}{\xi} m_*, \quad (\text{IV.18})$$

где  $\frac{L}{\xi}$  – производная Ли по направлению  $\xi$ <sup>1</sup>. Полагая далее

$$\frac{d(\xi, P)}{ds} = 0 \Leftrightarrow (\xi, P) = \text{Const}, \quad (\text{IV.19})$$

с учетом произвольности вектора обобщенного импульса и соотношения нормировки для него получим условия выполнения этого равенства:

$$\frac{L}{\xi} g_{ik} = \rho g_{ik} \Rightarrow \rho = -\frac{L}{\xi} \ln |m_*|. \quad (\text{IV.20})$$

Подставляя этот результат обратно в соотношение (IV.18), получим окончательно необходимые и достаточные условия существования линейного интеграла канонических уравнений движения (см., например, [175]):

$$\frac{L}{\xi} m_* g_{ik} = 0. \quad (\text{IV.21})$$

Таким образом, для того, чтобы существовал линейный интеграл канонических уравнений движения (IV.1) необходимо и достаточно, чтобы конформно соответствующее пространство с метрикой  $m_* g_{ik}$  допускало группу движений с вектором Киллинга  $\xi$ . Заметим, что линейные интегралы (IV.19) имеют смысл полного импульса (при пространственно-подобном векторе  $\xi$ ) или полной энергии (при временно-подобном векторе  $\xi$ ).

### IV.1.4 Выбор функции массы

Возникает вопрос о выборе функции  $m_*(\Phi)$ . Не конкретизируя пока эту функцию, отметим следующее важное обстоятельство. Рассмотрим статические поля  $g_{ik}$  и  $\Phi$ , допускающие времениподобный вектор Киллинга  $\xi^i = \delta_4^i$ , когда сохраняется полная энергия частицы,  $P_4$ . Рассмотрим далее систему отсчета, в которой  $g_{\alpha 4} = 0$ , так что координата  $x^4$  совпадает с мировым временем  $t$ . Тогда из соотношений связи между вектором кинематической скорости  $u^i$  и вектором полного импульса частицы  $P_i$  (IV.10) следует:

$$P_4 ds = m_* dt, \quad (\text{IV.22})$$

---

<sup>1</sup>См., например, [1].

где  $P_4 = E_0 = Const > 0$  - полная энергия заряженной частицы. Поэтому, если мы хотим сохранить одинаковую ориентацию мирового и собственного времени (т.е.,  $dt/ds > 0$ ), необходимо выбрать такую функцию массы, которая всегда бы оставалась неотрицательной:

$$m_* > 0. \quad (IV.23)$$

Как видно, например, из уравнений Лагранжа (IV.12), эту функцию удобно выбрать так, чтобы:

$$m_*(\Phi) = |m_*(\Phi)| \geq 0. \quad (IV.24)$$

Далее, с одной стороны, в отсутствие скалярного поля, точнее, в постоянном скалярном поле, функция массы должна переходить в массу покоя частицы,  $m \geq 0$ . С другой стороны, уравнения Лагранжа (IV.12) в случае слабого скалярного поля должны переходить в классические уравнения движения в скалярном поле. Таким образом, исходя из принципа соответствия, мы должны иметь:

$$m_*(0) = m; \quad (m_*)_{,k}|_{\Phi=0} = q\Phi_{,k}, \quad (IV.25)$$

где  $q$  - некоторая фундаментальная константа - *скалярный заряд частицы*. Условия (IV.25) означают, что при малых значениях скалярного потенциала  $\Phi$  функция  $m_*(\Phi)$  должна иметь разложение вида:

$$m_*(\Phi) \simeq m \left( 1 + \frac{q\Phi}{m} + \dots \right). \quad (IV.26)$$

Этому условию соответствует и использованная в цитированных работах линейная функция  $m_*(\Phi) = |m + q\Phi|$ .

Можно предложить и другой, более радикальный подход, который при этом не противоречит соотношениям (IV.25) и (IV.26), полагая что вся инертная масса частиц возникает вследствие взаимодействия со скалярным полем:

$$\varphi(\Phi) \equiv m_* = |q\Phi|. \quad (IV.27)$$

Тогда под массой покоя частицы,  $m_0$ , следует понимать ее массу (IV.27) на современной стадии эволюции Вселенной, которой отвечает скалярный потенциал  $\Phi_0$ :  $m_0 = m_*(\Phi(t_0))$ . Такому выбору функции  $\phi(\Phi)$  соответствует функция действия:

$$S = \int |q\Phi| ds. \quad (IV.28)$$

Этот выбор отвечает и эстетическим критериям, так как в этом случае функция Гамильтона (IV.7) не зависит от массы покоя. С другой стороны видно, что при выборе функции  $\varphi(\Phi)$  в форме (IV.27) уравнения Лагранжа (IV.12) становятся симметричными относительно замены  $\Phi \rightarrow -\Phi$  и при условии  $q \neq 0$  вообще не зависят явно от скалярного заряда:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = (\ln |\Phi|)_{,k} \mathcal{P}^{ik}, \quad (IV.29)$$

При выводе уравнений (IV.29) мы учли дифференциальное тождество:  $d|y| = y/|y| dy$ . Однако, посредством соотношения нормировки (IV.8) зависимость решений от скалярного заряда все же сохраняется и при таком выборе функции массы в виде зависимости энергии от импульса  $P_4(P^2)$ .

## IV.1. Каноническая формулировка классического скалярного взаимодействия

### IV.1.5 Одномерное движение

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в пространстве Минковского имеется статическое скалярное поле, потенциал которого зависит только от одной координаты,  $x^1 = x$ , и пусть для простоты  $m_* = |q\Phi| = |x|$ . Таким образом, имеются 3 вектора Киллинга - один времениподобный и два пространственноподобных:

$$\xi_1^i = \delta_4^i; \quad \xi_2^i = \delta_2^i; \quad \xi_3^i = \delta_3^i.$$

Соответственно этим векторам Киллинга существуют три линейных интеграла движения:

$$P_2 = P_2^0 = Const; \quad P_3 = P_3^0 = Const; \quad P_4 = P_4^0 = Const. \quad (IV.30)$$

Пусть для простоты  $P_2 = P_3 = 0$ . Тогда с учетом соотношения нормировки (IV.8) получим из канонических уравнений движения одно нетривиальное:

$$\frac{dx}{dt} = \mp \frac{\sqrt{P_4^2 - x^2}}{P_4}. \quad (IV.31)$$

Положим для простоты  $P_4 = 1$ ,  $x(0) = 1/2$ . Тогда в уравнении (IV.31) необходимо выбрать отрицательный знак в правой части. Решение этого уравнения есть:

$$x = \cos(t + \pi/3); \quad (IV.32)$$

– и описывает гармонические колебания в мировом времени  $t$ ; при этом обобщенный импульс,  $P_1$  также является гармонической функцией мирового времени:

$$P_1 = \sin(t + \pi/3). \quad (IV.33)$$

Однако, координаты 4-х мерного вектора кинематической скорости частицы,  $u^i$

$$u^1 = \frac{dx}{ds} \equiv -P_1/\phi = -\tan(t + \pi/3)$$

претерпевают разрывы 2-го рода в моменты времени  $t = \pi/6 + \pi k$ , в которые  $x = 0$ . Это свидетельствует либо о разрыве связи между координатами и собственным временем в указанные моменты мирового времени, либо о необходимости переопределения собственного времени для скалярно заряженных частиц. Для кинематического импульса частицы,  $p^i$ , если мы введем его как

$$p^i = m_* \frac{dx^i}{ds} \equiv P^i, \quad (IV.34)$$

такой проблемы не возникает, как и для трехмерной скорости  $v^\alpha = u^\alpha/u^4$ . Заметим, что, фактически, лишь эти непрерывные величины и являются физически измеримыми. Тем не менее, указанный пример показывает, что необходимо аккуратно проводить вычисления для скалярно заряженных частиц.

В дальнейшем мы будем пока не будем конкретизировать нормировку эффективной массы, полагая лишь выполненным соотношение (IV.24).

## IV.2 Статистические системы частиц со скалярным взаимодействием

### IV.2.1 Функция распределения и макроскопические плотности потоков

Пусть  $F(x, P)$  - инвариантная функция распределения частиц в 8-мерном фазовом пространстве и пусть  $\psi(x, P)$  - некоторая тензорная функция динамических переменных  $(x, P)$ . Согласно [1] каждой тензорной динамической функции может быть поставлена в соответствие макроскопическая плотность потока:

$$\Psi^i(x) = \int_{P(x)} F(x, P) \psi(x, P) \frac{\partial H}{\partial P_i} dP \equiv m_*^{-1} \int_{P(x)} F(x, P) \psi(x, P) P^i dP, \quad (\text{IV.35})$$

Определим согласно (IV.35) моменты относительно распределения  $F(x, P)$  [165]:

$$n^i(x) = \int_{P(x)} F(x, P) \frac{\partial H}{\partial P_i} dP \equiv m_*^{-1} \int_{P(x)} F(x, P) P^i dP, \quad (\text{IV.36})$$

вектор плотности потока числа частиц<sup>2</sup>, так что:

$$n^i = n v^i, \quad (\text{IV.37})$$

где  $v^i$ -времениподобный единичный вектор кинематической макроскопической скорости частиц:

$$n = \sqrt{(n, n)}. \quad (\text{IV.38})$$

Далее:

$$T_p^{ik}(x) = \int_{P(x)} F(x, P) P^i \frac{\partial H}{\partial P_k} dP \equiv m_*^{-1} \int_{P(x)} F(x, P) P^i P^k dP, \quad (\text{IV.39})$$

- макроскопический тензор энергии-импульса (ТЭИ). След этого тензора можно вычислить с помощью соотношения нормировки (IV.8):

$$T_p \equiv g_{ik} T_p^{ik} = m_* \int_{P(x)} F(x, P) dP. \quad (\text{IV.40})$$

Инвариантный элемент объема 4-х мерного импульсного пространства в выражениях (IV.36), (IV.39) в принятой нами системе единиц есть [169]:

$$dP = \frac{2S + 1}{(2\pi)^3 \sqrt{-g}} dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3 \wedge dP_4, \quad (\text{IV.41})$$

---

<sup>2</sup>Числовой вектор по Дж. Сингу [42].

## IV.2. Статистические системы частиц со скалярным взаимодействием

где  $S$  – спин частицы. Инвариантная восьмимерная функция распределения  $F(x, P)$ , сингулярная на массовой поверхности (IV.8) связана с несингулярной семимерной функцией распределения  $f(x, P)$  с помощью  $\delta$ -функции соотношением [169]:

$$F(x, P) = f(x, P)\delta(H) = m_* \frac{\delta(P_4 - P_4^+)}{P_4^+}, \quad (\text{IV.42})$$

где  $P_4^+$  – положительный корень уравнения нормировки (IV.8);  $P_+^4 = g^{4k}P_k^+$  – соответствующее этому корню значение контрвариантной компоненты импульса. В локально – лоренцевой системе отсчета:

$$P_+^4 = \sqrt{m_*^2 + P^2}, \quad (\text{IV.43})$$

где  $P^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (P^\alpha)^2$  – квадрат физического импульса. Таким образом, получим инвариантный элемент объема 3-х мерного импульсного пространства:

$$dP_+ = m_* \frac{2S+1}{(2\pi)^3 \sqrt{-g}} \frac{dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3}{P_+^4} \equiv m_* dP_0, \quad (\text{IV.44})$$

где

$$dP_0 = \sqrt{-g} \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \frac{dP^1 dP^2 dP^3}{P_+^4} \equiv \sqrt{-g} \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P}{P_+^4}. \quad (\text{IV.45})$$

Тогда выражения (IV.36), (IV.39) и (IV.40) принимают вид (для простоты записи мы опустили суммирование по сортам частиц):

$$n^i(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P(x)} f(x, P) P^i \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_+^4}; \quad (\text{IV.46})$$

$$T_p^{ik}(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P(x)} f(x, P) P^i P^k \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_+^4}; \quad (\text{IV.47})$$

$$T_p = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} m_*^2 \int_{P(x)} f(x, P) \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_+^4}. \quad (\text{IV.48})$$

Таким образом, явная зависимость макроскопических потоков от эффективной массы  $m_*$  в конечных выражениях исчезает.

## IV.2.2 Общерелятивистские кинетические уравнения

Вследствие принципа локального соответствия и предположения о 4-х точности столкновений частиц, в каждом акте межчастичного взаимодействия сохраняется обобщенный импульс системы взаимодействующих частиц:

$$\sum_I P_i = \sum_F P'_i, \quad (\text{IV.49})$$

где суммирование проводится по всем начальным,  $P_i$ , и конечным,  $P'_i$ , состояниям. Пусть в плазме протекают реакции:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A a_A \rightleftharpoons \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B, \quad (\text{IV.50})$$

где  $a_A$  - символы частиц, а  $\nu_A$  - их числа. Таким образом, обобщенные импульсы начального и конечного состояний равны:

$$P_I = \sum_{A=1}^m \sum_{\alpha=1}^{\nu_A} P_A^\alpha; \quad P_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\beta=1}^{\nu'_B} P_B^\beta \quad (\text{IV.51})$$

Функции распределения частиц определяются инвариантными кинетическими уравнениями [170]:

$$[H_a, f_a] = I_a(x, P_a), \quad (\text{IV.52})$$

где  $J_a(x, P_a)$  - интеграл столкновений:

$$I_a(x, P_a) = - \sum \nu_a \int_a' \delta^4(P_F - P_I) W_{IF} (Z_{IF} - Z_{FI}) \prod_{I,F}' dP; \quad (\text{IV.53})$$

$$W_{FI} = (2\pi)^4 |M_{IF}|^2 2^{-\sum \nu_A + \sum \nu'_B}$$

- матрица рассеяния канала реакций (IV.67), ( $|M_{IF}|$  - инвариантные амплитуды рассеяния);

$$Z_{IF} = \prod_I f(P_A^\alpha) \prod_F [1 \pm f(P_B^{\alpha'})]; \quad Z_{FI} = \prod_I [1 \pm f(P_A^\alpha)] \prod_F f(P_B^{\alpha'}),$$

знак “+” соответствует бозонам, “-” - фермионам (подробности см. в [169], [170]).

### IV.2.3 Уравнения переноса динамических величин

Строгими следствиями общерелятивистских кинетических уравнений (IV.52) являются уравнения переноса динамических величин  $\Psi_a(x, P_a)$  [170]:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \sum_a \int_{P(x)} \Psi_a F_a \frac{\partial H_a}{\partial P_i} dP_a - \sum_a \int_{P(x)} F_a [H_a, \Psi_a] dP_a = \\ & - \sum_{\text{by channels}} \int \left( \sum_{A=1}^m \nu_A \Psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \Psi'_B \right) \delta^4(P_F - P_I) (Z_{IF} W_{IF} - Z_{FI} W_{FI}) \prod_{I,F} dP, \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

где суммирование проводится по всем каналам реакций (IV.67).

Полагая в (IV.54)  $\Psi_a = g_a$ , где  $g_a$  – некоторые фундаментальные заряды, сохраняющиеся в реакциях (IV.67), получим с учетом (IV.49), (IV.51) и (IV.67) уравнения переноса плотностей потоков числа частиц плазмы:

$$\nabla_i J_G^i = 0, \quad (\text{IV.55})$$

где:

$$J_G^i = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} g_a \int_{P(x)} f(x, P) P^i \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_4^+}. \quad (\text{IV.56})$$

– вектор плотности фундаментального тока, соответствующего зарядам  $g_a$ . В частности, закон сохранения (IV.55) всегда имеет место для каждого сорта частиц  $b$  ( $g_a = \delta_a^b$ ) при условии упругости их столкновений.

Полагая в (IV.54)  $\Psi_a = P^k$ , получим с учетом (IV.9), (IV.49) и (IV.51) уравнения переноса энергии-импульса плазмы:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi = 0, \quad (\text{IV.57})$$

где введена *скалярная плотность заряда*,  $\sigma$ , [171]:

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \frac{dm_*^2}{d\Phi} \int_{P(x)} f(x, P) \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_4^+}, \quad (\text{IV.58})$$

В частности, при выборе функции массы в виде (IV.27) выражение для скалярной плотности зарядов принимает вид;

$$\sigma = \Phi \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q^2 \int_{P(x)} f(x, P) \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_4^+}. \quad (\text{IV.59})$$

Следует отметить, что форма (ТЭИ) (IV.39) или (IV.47), а также скалярной плотности заряда (IV.58), найденная для скалярно заряженных частиц в [170], при заданной функции Гамильтона является однозначным следствием предположения о сохранении полного импульса в локальных столкновениях частиц.

В частности, для системы, состоящей из односортовых частиц, вследствие (IV.40) и (IV.58) имеет место соотношение:

$$\sigma = \frac{d \ln m_* T_p}{d\Phi}. \quad (\text{IV.60})$$

При выборе функции эффективной массы в виде (IV.27) предыдущей работы это выражение упрощается и становится справедливым и для многокомпонентной системы:

$$\sigma = \frac{T_p}{\Phi}, \quad (\text{IV.61})$$

#### IV.2.4 Локальное термодинамическое равновесие

Если время свободного движения частиц столкновений,  $\tau_{eff}$ , гораздо меньше характерного временного масштаба эволюции статистической системы,  $t$ , т.е.,

$$\tau_{eff} \ll t, \quad (\text{IV.62})$$

то в статистической системе поддерживается локальное термодинамическое равновесие (ЛТР). В условиях ЛТР функции распределения частиц принимают локально равновесный вид [171]:

$$f_a^0(x, P) = \frac{1}{e^{-\gamma_a + (\xi, P_a)} \pm 1} \quad (\text{IV.63})$$

где  $\xi^i(x)$  – времениподобный вектор

$$\xi^2 \equiv (\xi, \xi) > 0, \quad (\text{IV.64})$$

причем в условиях ЛТР кинематическая скорость плазмы (см. (37)):

$$v^i = \xi^i / \xi \quad (\text{IV.65})$$

совпадает с динамической скоростью<sup>3</sup>, а скаляр

$$\theta(x) = \xi^{-1} \quad (\text{IV.66})$$

является локальной температурой плазмы. Подчеркнем то обстоятельство, что в условиях ЛТР локальная температура  $\theta$  и макроскопическая скорость  $v^i$  одинаковы для всех компонент плазмы. Далее, в (IV.63)  $\gamma_a = \gamma_a(x)$  – приведенный химический потенциал  $a$ -той компоненты плазмы, связанный с классическим,  $\mu_a$ , соотношением:

$$\gamma_a = \frac{\mu_a}{\theta}.$$

---

<sup>3</sup>Определение этих скоростей см., например, в [42].

### IV.3. Самосогласованная модель плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием

В условиях ЛТР химические потенциалы статистической системы, в которой протекают реакции (IV.67), должны удовлетворять системе алгебраических уравнений химического равновесия:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A \gamma_A = \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \gamma_{B'} \Leftrightarrow \sum_{A=1}^m \nu_A \mu_A = \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \mu_{B'}, \quad (\text{IV.67})$$

в которых должны быть учтены все каналы реакций с участием данных частиц. Тензор энергии-импульса частиц (IV.47) относительно локально равновесной функции распределения (IV.63) принимает структуру тензора энергии-импульса идеальной жидкости:

$$T_p^{ik} = (\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl})v^i v^k - \mathcal{P}_{pl}g^{ik}, \quad (\text{IV.68})$$

где  $\mathcal{E}_{pl}$  и  $\mathcal{P}_{pl}$  – суммарные плотность энергии и давление плазмы. Для вычисления плотностей (IV.46), (IV.47) и (IV.48) относительно равновесного распределения (IV.63) перейдем в локально-лоренцевую систему отсчета, движущуюся со скоростью  $v^i$ , затем перейдем к сферической системе координат в пространстве импульсов и вычислим интегралы по угловым переменным. Ковариантно обобщая результаты и производя замену импульсной переменной  $p = m_* shx$ , получим для равновесных скалярных плотностей выражения:

$$n_a = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{sh^2 x ch x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* chx} \pm 1}; \quad (\text{IV.69})$$

$$\mathcal{E}_{pl} = \sum_a \mathcal{E}_a = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{sh^2 x ch^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* chx} \pm 1}; \quad (\text{IV.70})$$

$$\mathcal{P}_{pl} = \sum_a \mathcal{P}_a = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{sh^4 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* chx} \pm 1}; \quad (\text{IV.71})$$

$$T_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^2 \int_0^\infty \frac{sh^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* chx} \pm 1}; \quad (\text{IV.72})$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{4\pi^2} \frac{dm_*^2}{d\Phi} m_*^2 \int_0^\infty \frac{sh^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* chz} \pm 1}, \quad (\text{IV.73})$$

где  $\lambda_* = m_*/\theta$ .

## IV.3 Самосогласованная кинетическая модель самогравитирующей плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием

Рассмотрим систему, состоящую из многокомпонентной плазмы и классического скалярного поля  $\Phi$ .

### IV.3.1 Конформное скалярное поле

Рассмотрим сначала функцию Лагранжа классического массивного вещественного конформного скалярного поля  $\Phi$  (см., например, [7,8])<sup>4</sup>:

$$L_s = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left[ g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} + \left( \frac{R}{6} - m_s^2 \right) \Phi^2 \right], \quad (\text{IV.74})$$

где  $m_s$  – масса квантов скалярного поля, фактор  $\varepsilon = \pm 1$  учитывает характер взаимодействия скалярного поля ([1], [169]) – для систем с отталкиванием одноименно скалярно заряженных частиц этот фактор равен  $+1$ , для систем с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц этот фактор равен  $-1$ . Приведенный здесь Лагранжиан скалярного поля отличается множителем  $1/4\pi$  по сравнению с Лагранжианом, использованным в [7, 8] (см. [1]). Этот множитель введен для обеспечения канонического вида уравнения поля с источником. Кроме того, в работах [7, 8] тензор Риччи получен сверткой тензора Римана по первому и четвертому индексам, тогда как мы используем свертку по первому и третьему индексу. Компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (IV.74) равны:

$$T_s^{ik} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left[ \frac{4}{3} \Phi^{,i} \Phi^{,k} - \frac{1}{3} g^{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + m_s^2 g^{ik} \Phi^2 + \frac{1}{3} \left( R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} \right) \Phi^2 - \frac{2}{3} \Phi \Phi^{,ik} + \frac{2}{3} g^{ik} \Phi \square \Phi \right], \quad (\text{IV.75})$$

где

$$\square \Phi \equiv g^{ik} \nabla_i \nabla_k \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \Phi$$

– оператор д'Аламбера. Ковариантная дивергенция от этого тензора с учетом коммутационных соотношений для вторых ковариантных производных вектора равна:

$$\nabla_k T_s^{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \nabla^i \Phi \left( \square \Phi + m_s^2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi \right), \quad (\text{IV.76})$$

Уравнения Эйнштейна для статистической системы скалярно заряженных частиц имеют вид:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = 8\pi (T_p^{ik} + T_s^{ik}), \quad (\text{IV.77})$$

куда необходимо подставить выражения для компонент тензоров энергии импульса плазмы (IV.68) и скалярного поля (IV.75). Вычисляя ковариантные дивергенции от обеих

<sup>4</sup>Для массивного скалярного поля конформная инвариантность понимается как асимптотическое свойство при ( $m_s \rightarrow 0$ ).

### IV.3. Самосогласованная модель плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием

частей уравнений Эйнштейна (IV.77), получим из (IV.57) и (IV.76) законы сохранения суммарных энергии - импульса:

$$\nabla_k(T_p^{ik} + T_s^{ik}) = \frac{1}{4\pi} \nabla^i \Phi \left[ \varepsilon \left( \square \Phi + m_s^2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi \right) + 4\pi \sigma \right] = 0, \quad (\text{IV.78})$$

откуда с учетом  $\Phi \neq Const$  получим уравнение массивного скалярного поля с источником (см. [?]):

$$\square \Phi + m_s^2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi = -4\pi \varepsilon \sigma. \quad (\text{IV.79})$$

Система уравнений (IV.52), (IV.57), (IV.77) и (IV.79) совместно с определениями (IV.47) и (IV.58) и представляют искомую замкнутую систему самосогласованных уравнений, описывающих статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. Вычисляя след тензора энергии-импульса скалярного поля (IV.75), получим с учетом (IV.79):

$$T_s = \frac{\varepsilon}{4\pi} m_s^2 \Phi^2 - \varepsilon \sigma \Phi. \quad (\text{IV.80})$$

В частности, при выборе функции массы в виде (IV.27) с учетом (IV.61) получим отсюда:

$$T = T_p + T_s = \frac{\varepsilon}{4\pi} m_s^2 \Phi^2. \quad (\text{IV.81})$$

#### IV.3.2 Неконформное скалярное поле

В этом случае Лагранжиан вещественного скалярного поля можно выбрать в виде:

$$L_s = \frac{\varepsilon}{8\pi} (g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - m_s^2 \Phi^2). \quad (\text{IV.82})$$

Тогда тензор энергии-импульса скалярного поля есть:

$$T_s^{ik} = \frac{\varepsilon}{8\pi} (2\Phi^{,i} \Phi^{,k} - g^{ik} \Phi^{,j} \Phi_{,j} + g^{ik} m_s^2 \Phi^2). \quad (\text{IV.83})$$

Аналогично (IV.78) получим закон сохранения:

$$\nabla_k(T_p^{ik} + T_s^{ik}) = \frac{1}{4\pi} \nabla^i \Phi [\varepsilon(\square \Phi + m_s^2 \Phi) + 4\pi \sigma] = 0, \quad (\text{IV.84})$$

откуда получим уравнение массивного неконформного скалярного поля с источником (см. [?]):

$$\square \Phi + m_s^2 \Phi = -4\pi \varepsilon \sigma. \quad (\text{IV.85})$$

След тензора энергии-импульса скалярного поля (IV.83) равен:

$$T_s = \frac{\varepsilon}{4\pi} (-\Phi^{,j} \Phi_{,j} + 2m_s^2 \Phi^2). \quad (\text{IV.86})$$

## IV.4 Самосогласованная космологическая модель для локально равновесной плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием

В случае выполнения условия ЛТР (IV.62) интеграл столкновений в правой части кинетических уравнений становится большой величиной, поэтому для локально равновесной плазмы вместо решения кинетических уравнений необходимо воспользоваться определением тензора энергии-импульса жидкости (IV.68), а также соотношениями (IV.69) – (IV.73), определяющими макроскопические скаляры, и уравнениями химического равновесия (IV.67). При этом необходимо учитывать, что локально-равновесные функции распределения (IV.63) при выполнении условий химического равновесия автоматически обращают в нуль интеграл столкновений (IV.53). Однако, согласно логике гидродинамического приближения (см., например, [1]) равенство нулю правой части кинетических уравнений в этом случае необходимо понимать лишь как приближенное соотношение, справедливое лишь для макроскопических моментов локально равновесной функции распределения.

### IV.4.1 Самосогласованная система уравнений для изотропной однородной пространственно плоской Вселенной

Рассмотрим пространственно-плоскую космологическую модель Фридмана

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (\text{IV.87})$$

когда материя состоит из равновесной плазмы скалярно взаимодействующих частиц и массивного скалярного поля, зависящего лишь от космологического времени,  $\Phi(t)$ . Состоянию покоя плазмы относительно синхронной в метрике (IV.87) системы отсчета соответствует вектор макроскопической скорости:

$$v^i = \delta_4^i. \quad (\text{IV.88})$$

Компоненты тензора Эйнштейна относительно метрики (IV.87) равны:

$$G_k^i = 2 \frac{\dot{a}^2 - a\ddot{a}}{a^2} v^i v_k + \frac{\dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{a^2} \delta_k^i. \quad (\text{IV.89})$$

Далее, вычисляя компоненты  $\Phi_{,k}^i$ , найдем:

$$\Phi_{,k}^i = \left( \ddot{\Phi} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} \right) v^i v_k + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} \delta_k^i. \quad (\text{IV.90})$$

Из (IV.89) и (IV.80) следует:

$$R = -6 \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2} = -8\pi\epsilon\sigma\Phi + 2\epsilon m_s^2 \Phi^2. \quad (\text{IV.91})$$

IV.4. Космологическая модель для равновесной плазмы со скалярным взаимодействием

**Конформное скалярное поле**

Уравнение конформного скалярного поля (IV.79) в метрике (IV.87) с учетом (IV.91) может быть записано в виде:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m_s^2\Phi \left(1 + \frac{1}{3}\Phi^2\right) = -4\pi\varepsilon\sigma(1 - \Phi^2). \quad (\text{IV.92})$$

Учитывая соотношения (IV.89)–(IV.91), вычислим компоненты тензора энергии-импульса конформного скалярного поля (IV.75) и представим их в виде компонент тензора энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_s^i{}_k = (E_s + P_s)v^i v_k - P_s\delta_k^i, \quad (\text{IV.93})$$

где  $E_s$  и  $P_s$  - плотность энергии и давление скалярного поля, соответственно:

$$E_s = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left[ \left( \frac{1}{a} \frac{d}{dt} a\Phi \right)^2 + m_s^2\Phi^2 \right]; \quad (\text{IV.94})$$

$$P_s = \frac{\varepsilon}{24\pi} \left[ \left( \frac{1}{a} \frac{d}{dt} a\Phi \right)^2 - m_s^2\Phi^2 + 8\pi\sigma\Phi \right]. \quad (\text{IV.95})$$

Нетрудно проверить, что вследствие (IV.94) и (IV.95) тождественно выполняется соотношение (IV.80) для следа тензора энергии-импульса скалярного поля.

**Неконформное скалярное поле.**

В этом случае получим из (IV.83):

$$E_s = \frac{\varepsilon}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2); \quad P_s = \frac{\varepsilon}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 - m_s^2\Phi^2). \quad (\text{IV.96})$$

При этом для следа тензора энергии-импульса скалярного поля получим:

$$T_s = E_s - 3P_s = \frac{\varepsilon}{4\pi}(-\dot{\Phi}^2 + 2m_s^2\Phi^2), \quad (\text{IV.97})$$

а также:

$$E_s + P_s = \varepsilon \frac{\dot{\Phi}^2}{4\pi}. \quad (\text{IV.98})$$

## IV.4.2 Полная система уравнений для локально равновесной плазмы

Сформулируем теперь замкнутую систему уравнений, определяющих космологическую эволюцию локально равновесной плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. Как известно, в метрике (IV.87) независимые уравнения Эйнштейна принимают вид:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi E; \quad (\text{IV.99})$$

$$\dot{E} + 3\frac{\dot{a}}{a}(E + P) = 0. \quad (\text{IV.100})$$

Уравнение переноса энергии-импульса плазмы (IV.57) в метрике (IV.87) можно записать в виде:

$$\dot{E}_{pl} + 3\frac{\dot{a}}{a}(E_{pl} + P_{pl}) = \sigma\dot{\Phi}. \quad (\text{IV.101})$$

Пусть далее локально равновесная плазма состоит из  $N$  различных сортов частиц  $a = \overline{1, N}$ . Тогда вся исследуемая космологическая система «плазма+скалярное поле» определяется  $N + 3$ -мя функциями времени  $a(t), \Phi(t), \gamma_a(t), \theta(t)$ , где  $\theta$  – локальная температура плазмы,  $\gamma_a$  – приведенные химические потенциалы, определяющие локально-равновесные функции распределения (IV.63). Химические потенциалы  $\gamma_a$  определяются из условий химического равновесия (IV.67), представляющих систему линейных однородных алгебраических уравнений и наследующих симметрию алгебры взаимодействия частиц плазмы. Вследствие однородности системы уравнений химического равновесия, по крайней мере, одна из функций  $\gamma_c(t)$  остается неопределенной. Эта функция должна быть найдена из закона сохранения некоторого фундаментального заряда  $G$  (IV.55). В космологической ситуации этот закон имеет вид:

$$a^3(t) \sum_{a=1}^N g_a \gamma_a(t) = Const \quad (\text{IV.102})$$

Оставшиеся три неизвестные функции,  $\theta(t), a(t), \Phi(t)$  определяются из уравнений (IV.99) – (IV.101), причем следует отметить, что уравнение (IV.100), в свою очередь, является следствием уравнения скалярного поля ((79) или (IV.85)) и уравнения переноса (IV.101). Поэтому в дальнейшем мы будем заменять его соответствующим уравнением поля.

Таким образом, уравнения (IV.99), (IV.101), (IV.79) (или (85)) совместно с уравнениями химического равновесия (IV.67) и законами сохранения фундаментальных зарядов (IV.102) составляют полную самосогласованную систему уравнений, определяющих эволюцию локально равновесной плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. Ниже мы рассмотрим численные модели космологического расширения, основанные на представленной здесь системе уравнений.

## IV.5 Полностью вырожденный Ферми-газ со скалярным взаимодействием

В этом разделе в качестве статистической системы мы рассмотрим полностью вырожденный односортовый Ферми-газ, состоящий из массивных частиц со спином 1/2. Условие полного вырождения предполагает

$$\frac{\mu}{\theta} \rightarrow \infty. \quad (\text{IV.103})$$

В этом случае локально-равновесная функция распределения имеет вид:

$$f^0(x, P) = \begin{cases} 0, & \mu \leq \sqrt{m_*^2 + p^2}; \\ 1, & \mu > \sqrt{m_*^2 + p^2} \end{cases}. \quad (\text{IV.104})$$

Поэтому интегрирование макроскопических плотностей представимо в элементарных функциях:

$$\mathcal{E}_f = \frac{m_*^4}{8\pi^2} \left[ \psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right];$$

$$P_f = \frac{m_*^4}{24\pi^2} \left[ \psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right];$$

$$T = \mathcal{E}_f - 3P_f = \frac{m_*^4}{2\pi^2} \left[ \psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right],$$

$$\mathcal{E}_f + P_f = \frac{m_*^4}{3\pi^2} \psi^3 \sqrt{1 + \psi^2}, \quad (\text{IV.105})$$

$$\sigma = \frac{q \cdot m_*^3}{2\pi^2} \left[ \psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right], \quad (\text{IV.106})$$

где  $\psi = p_F/|m_*|$  - отношение импульса Ферми к эффективной массе. При этом самосогла-сованное уравнение массивного скалярного поля принимает вид [164]:

$$\square\Phi + \mu^2\Phi = -\frac{4\pi}{(m + q\Phi)^2} qT,$$

причем плотность числа фермионов с импульсом Ферми связана соотношением [271]:

$$n(x) = \frac{p_F^3}{3\pi^2} \Rightarrow p_F = (3\pi^2 n(x))^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{IV.107})$$

Таким образом, переменную  $\xi$  можно выразить через два скаляра - плотность числа частиц в собственной системе отсчета и скалярный потенциал:

$$\psi = \frac{(3\pi^2 n(x))^{\frac{1}{3}}}{|m + q\Phi|}. \quad (\text{IV.108})$$

## IV.6 Космологическая вырожденная плазма со скалярным взаимодействием

Рассмотрим космологическую ситуацию, когда материя представлена лишь вырожденной Ферми-системой со скалярным взаимодействием частиц. В этом случае самосогласованная система уравнений Эйнштейна и Клейна-Гордона со скалярным источником в метрике

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{IV.109})$$

принимает вид:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi \quad (\text{IV.110})$$

В этой метрике

$$v^i = \delta_4^i$$

и из соотношения (IV.107) и закона сохранения частиц:

$$\partial_i \sqrt{-g} n v^i = 0$$

получим интеграл импульса:

$$a p_F = \text{Const.} \quad (\text{IV.111})$$

Полагая

$$\Phi = \Phi(t); \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}(t); P = P(t),$$

получим структуру суммарного тензора энергии-импульса скалярного поля в форме тензора энергии-импульса идеальной жидкости с макроскопической скоростью  $v^i$  и плотностью энергии  $\mathcal{E}_S$  и давлением  $P_S$ :

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + \mu_s^2 \Phi^2); \quad P_s = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{3}\dot{\Phi}^2 - \mu_s^2 \Phi^2\right). \quad (\text{IV.112})$$

Как известно, (см., например, [272]), в метрике (IV.109) независимые уравнения Эйнштейна имеют форму:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\varepsilon; \quad (\text{IV.113})$$

$$3\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon + P}. \quad (\text{IV.114})$$

Из уравнений (IV.103), (IV.104) можно получить соотношение:

$$P_f = \frac{1}{3}\mathcal{E}_f - \frac{m_*^4}{24\pi^2} \left[ 4\psi\sqrt{1+\psi^2} - 3\ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2}) \right] \quad (\text{IV.115})$$

Легко видеть, что выражение в квадратных скобках правой части (IV.115) неотрицательно при неотрицательных  $\psi$ . Поэтому выполняется неравенство:

$$0 \leq P_f \leq \frac{1}{3}\mathcal{E}_f.$$

#### IV.7. Численное решение для вырожденной плазмы со скалярным полем

Аналогично из соотношения (IV.112) найдем:

$$P_s = \frac{1}{3}\mathcal{E}_s - \frac{1}{6\pi}\mu^2\Phi^2, \quad (\text{IV.116})$$

Таким образом и для скалярного поля выполняется неравенство:

$$P_s \leq \frac{1}{3}\mathcal{E}_s.$$

В результате найдем:

$$\kappa(t) = \frac{1}{3} - \frac{m_*^4 \left[ 4\psi\sqrt{1+\psi^2} - 3\ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2}) \right] + 4\pi\mu^2\Phi^2}{24\pi^2(\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_f)}.$$

Таким образом, для исследуемой системы всегда выполняется соотношение:

$$\Rightarrow -1 \leq \kappa(t) \leq \frac{1}{3}. \quad (\text{IV.117})$$

т.е., случай квинтэссенции исключается.

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa), \quad (\text{IV.118})$$

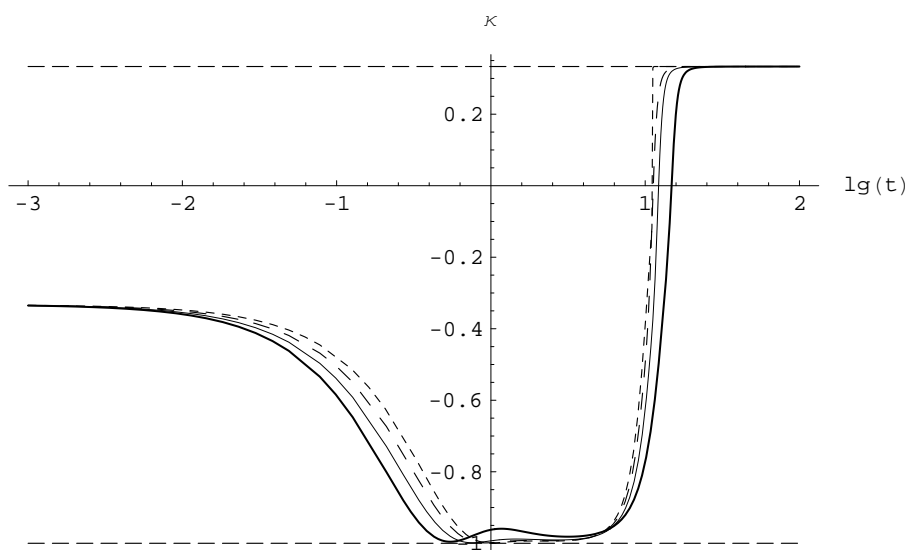
## IV.7 Численное решение уравнений Эйнштейна для вырожденной плазмы со скалярным полем

Ниже мы приведем результаты численных решений полученных уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона для вырожденной Ферми-системы в прикладном математическом пакете Mathematica. Заметим, что попытки прямого численного интегрирования системы таких уравнений в большинстве случаев не дают результатов вследствие специфического нелинейного характера этих уравнений, неприятных для численных методов. В частности, одним из таких препятствий является наличие радикалов и логарифмов от искомым функций в правых частях уравнений. Для обхода этих трудностей приходится идти на моделирование функций источников с помощью элементарных аналитических функций. Очевидно, что вследствие большого количества существенных параметров модели, (4 параметра,  $p_f, m, \mu, q$ ), и начальных условий, (2 независимых условия,  $\Phi(0), \dot{\Phi}(0)$ ), рассматриваемая космологическая модель чрезвычайно богата типами поведения. Рассмотрим поэтому основные из них. На примере одного случая рассмотрим основные особенности численного решения, чтобы не отвлекаться на их анализ в дальнейшем.

### IV.7.1 Решения с однократным нырянием в квазивакуумное состояние

**Простое однократное ныряние - зависимость от скалярного заряда фермионов:**  
 $p_f(0) = 0.1, m = 1, \mu = 1, \Phi(0) = 1, \dot{\Phi}(0) = 1$ .

Этот тип поведения реализуется при достаточно больших начальных значениях производной потенциальной функции. Ниже на графиках космологическое время и все физические единицы всюду измеряются в планковских масштабах.

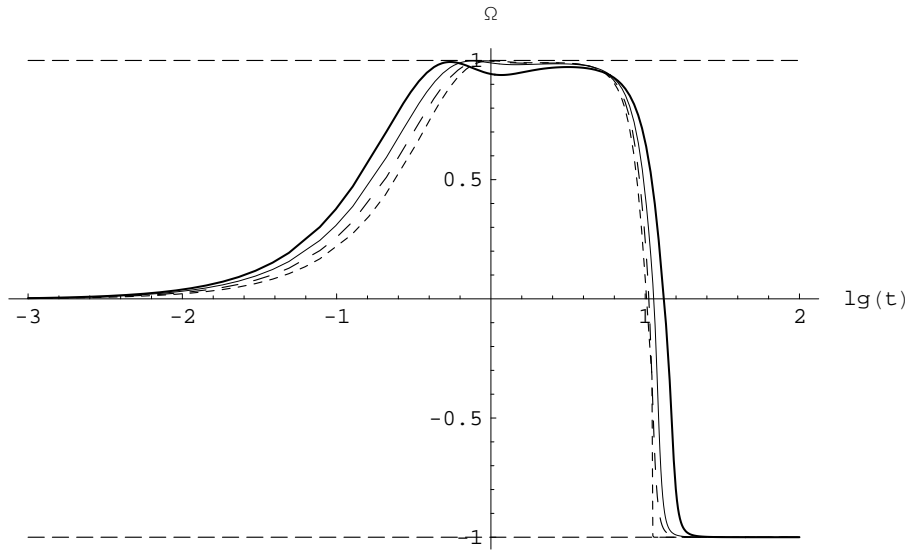


**Рис. 1.** Эволюция коэффициента баротропы,  $\kappa$  в зависимости от скалярного заряда фермионов: пунктирная линия -  $q \rightarrow 0$ , разреженная пунктирная линия -  $q = 0.3$ , сплошная линия -  $q = 1$ , сплошная жирная линия -  $q = 5$ .

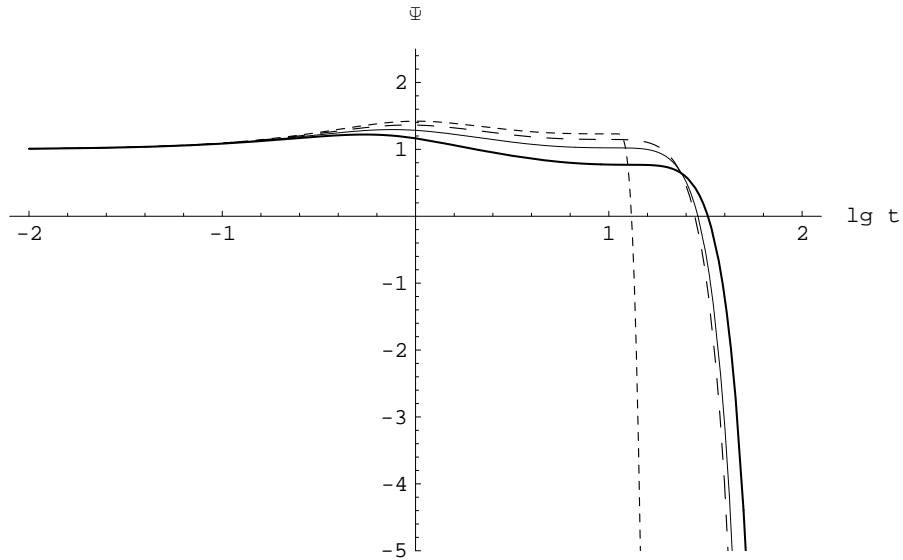
Может создаться впечатление, что потенциальная функция, изображенная на Рис. 3, сингулярна при значении  $\lg(t) \approx 1$ . Однако, следующий график на Рис. 4 показывает, что это не так. Вблизи этой точки сильно вырастает производная потенциала (Рис. 5), которая, тем не менее, также остается конечной (Рис.6). Указанная ситуация типична и для других значений параметров и начальных условий, поэтому, подробно показав основные особенности поведения решений, в дальнейшем мы не будем останавливаться на этом вопросе.

Для рассмотренного

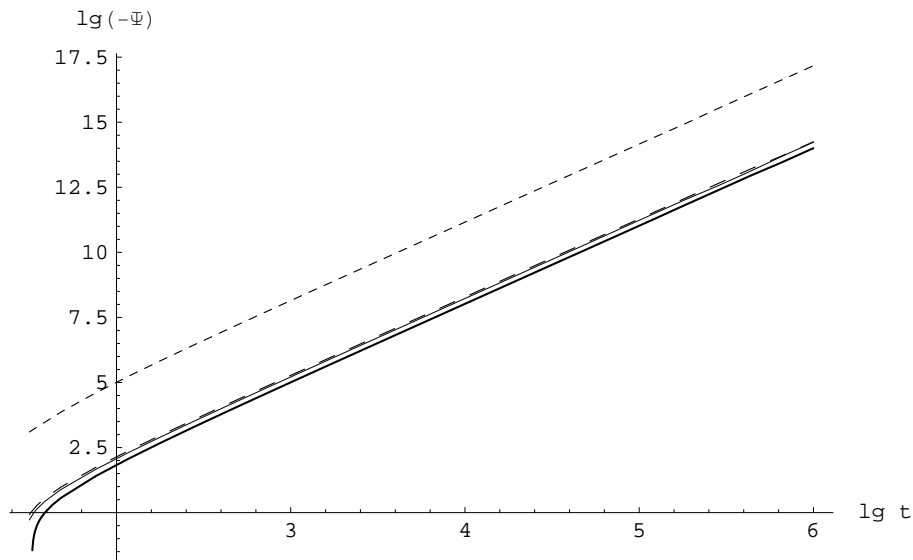
IV.7. Численное решение для вырожденной плазмы со скалярным полем



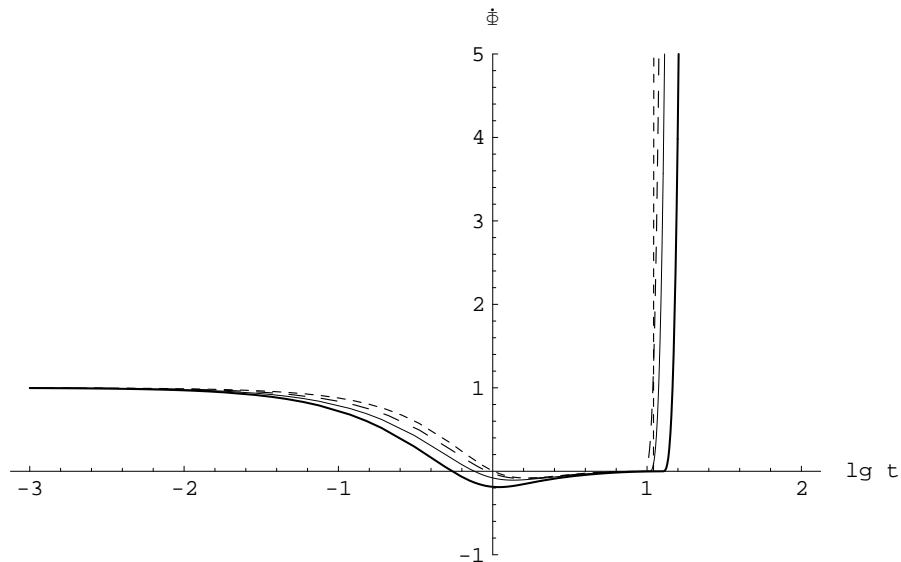
**Рис. 2.** Эволюция космологического ускорения (IV.118) в зависимости от скалярного заряда фермионов: пунктирная линия -  $q \rightarrow 0$ , разреженная пунктирная линия -  $q = 0.3$ , сплошная линия -  $q = 1$ , сплошная жирная линия -  $q = 5$ .



**Рис. 3.** Эволюция скалярного потенциала,  $\Phi$ , в зависимости от скалярного заряда фермионов: пунктирная линия -  $q = 0$ , разреженная пунктирная линия -  $q \rightarrow 0.3$ , сплошная линия -  $q = 1$ , сплошная жирная линия -  $q = 5$ .

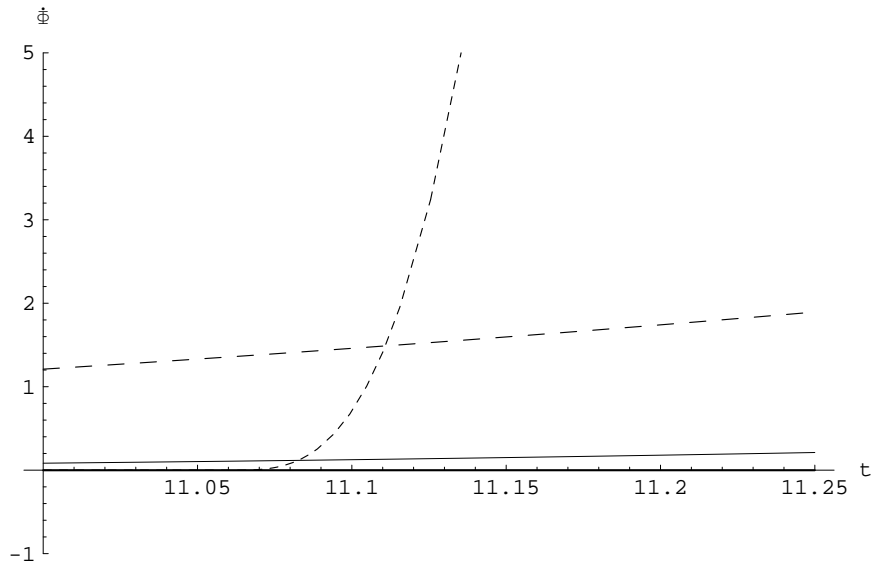


**Рис. 4.** Эволюция десятичного логарифма скалярного потенциала,  $\lg(-\Psi)$ , при больших временах в зависимости от скалярного заряда фермионов: пунктирная линия -  $q = 0$ , разреженная пунктирная линия -  $q \rightarrow 0.3$ , сплошная линия -  $q = 1$ , сплошная жирная линия -  $q = 5$ .

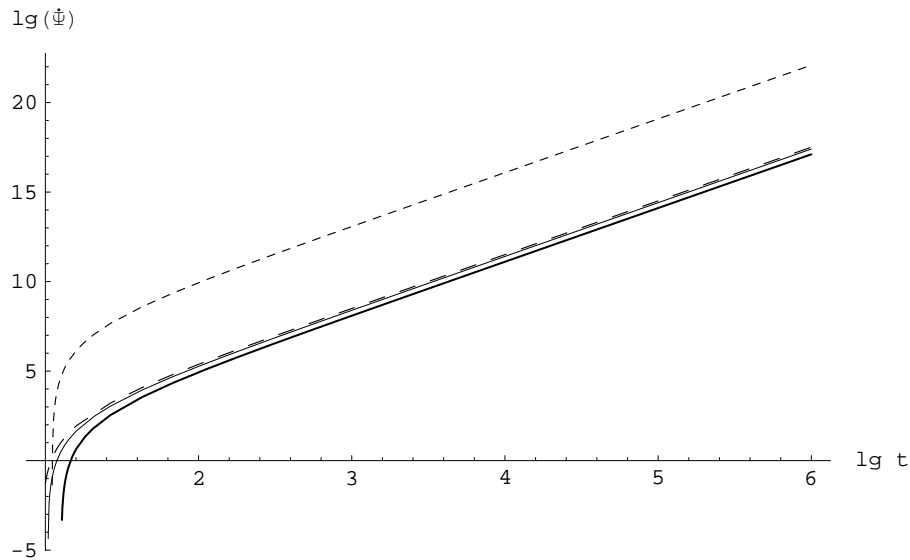


**Рис. 5.** Эволюция производной скалярного потенциала,  $\dot{\Phi}$ , в зависимости от скалярного заряда фермионов: пунктирная линия -  $q \rightarrow 0$ , разреженная пунктирная линия -  $q = 0.3$ , сплошная линия -  $q = 1$ , сплошная жирная линия -  $q = 5$ .

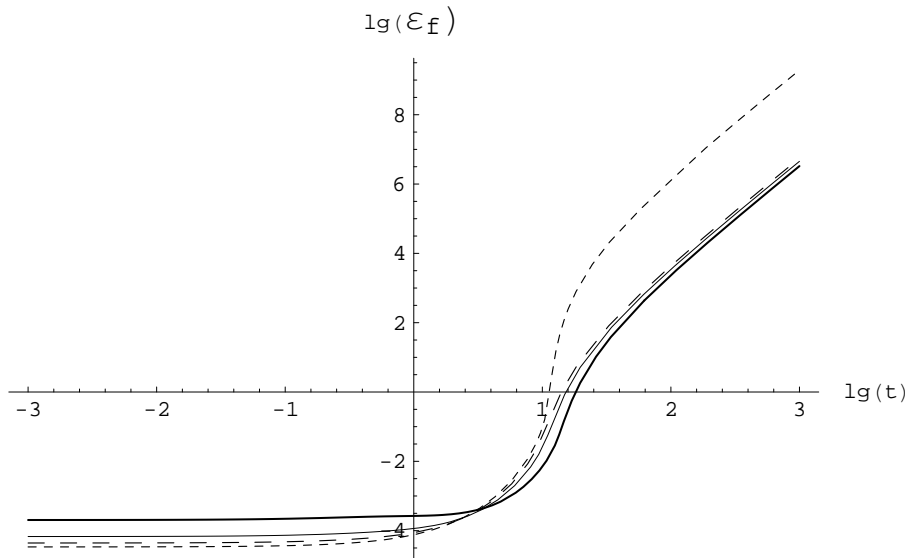
IV.7. Численное решение для вырожденной плазмы со скалярным полем



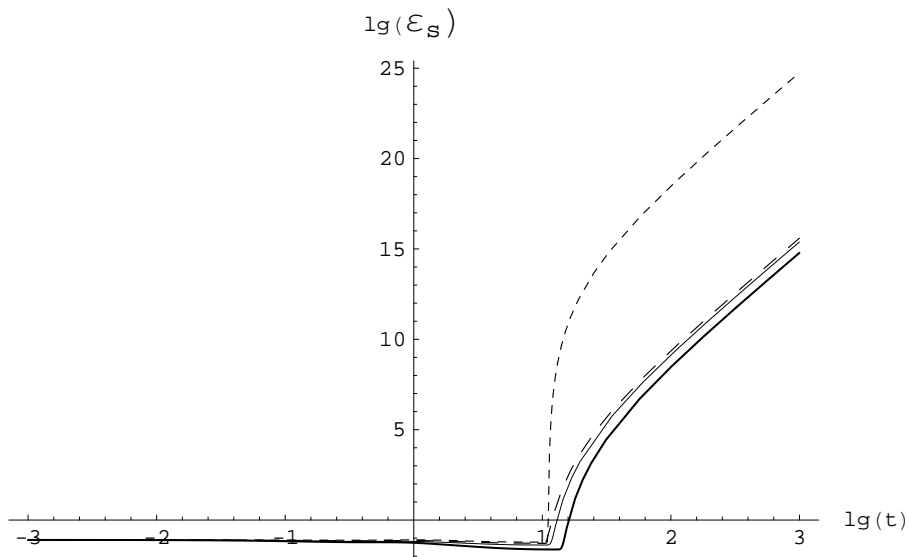
**Рис. 6.** То же, что и на Рис.5, в крупном масштабе. Видно, что кажущиеся изломы производной потенциала в области значений  $\lg t \approx 10$  фиктивны.



**Рис. 7.** Эволюция десятичного логарифма производной скалярного потенциала,  $\lg(\dot{\Phi})$ , при больших временах в зависимости от скалярного заряда фермионов: пунктирная линия -  $q = 0$ , разрезанная пунктирная линия -  $q = 0.3$ , сплошная линия -  $q = 1$ , сплошная жирная линия -  $q = 5$ .

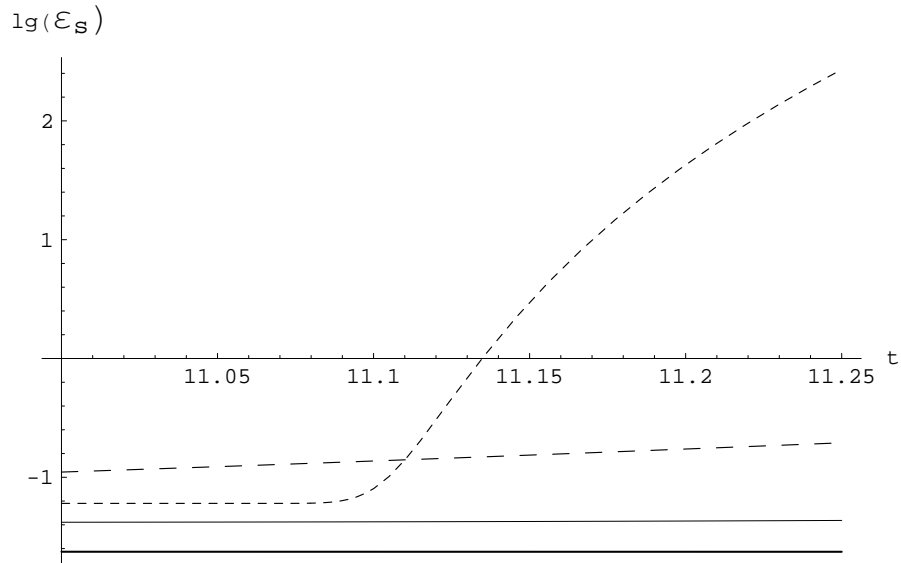


**Рис. 8.** Эволюция десятичного логарифма конформной плотности энергии фермионов,  $lg(\varepsilon_f)$ , в зависимости от скалярного заряда фермионов: пунктирная линия -  $q = 0$ , разреженная пунктирная линия -  $q = 0.3$ , сплошная линия -  $q = 1$ , сплошная жирная линия -  $q = 5$ .



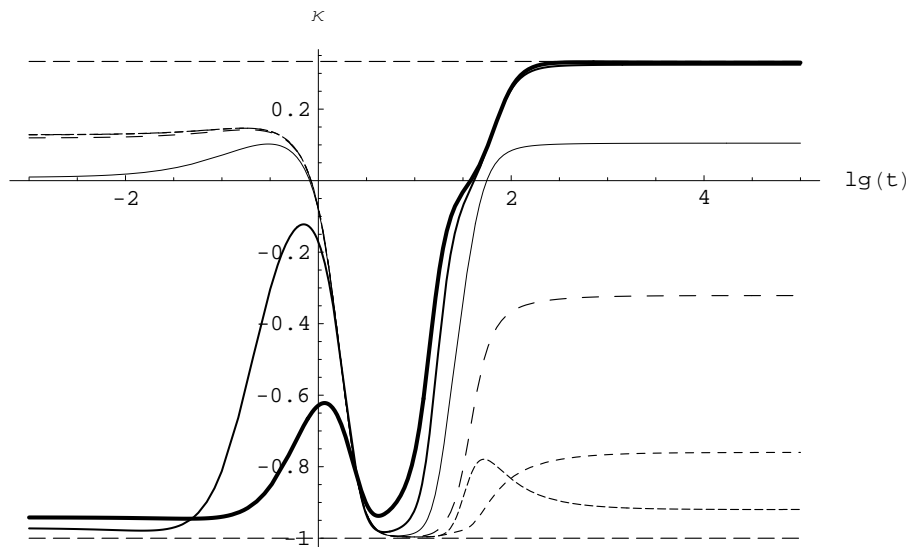
**Рис. 9.** Эволюция десятичного логарифма конформной плотности энергии скалярного поля,  $lg(\varepsilon_s)$ , в зависимости от скалярного заряда фермионов: пунктирная линия -  $q = 0$ , разреженная пунктирная линия -  $q = 0.3$ , сплошная линия -  $q = 1$ , сплошная жирная линия -  $q = 5$ .

IV.7. Численное решение для вырожденной плазмы со скалярным полем

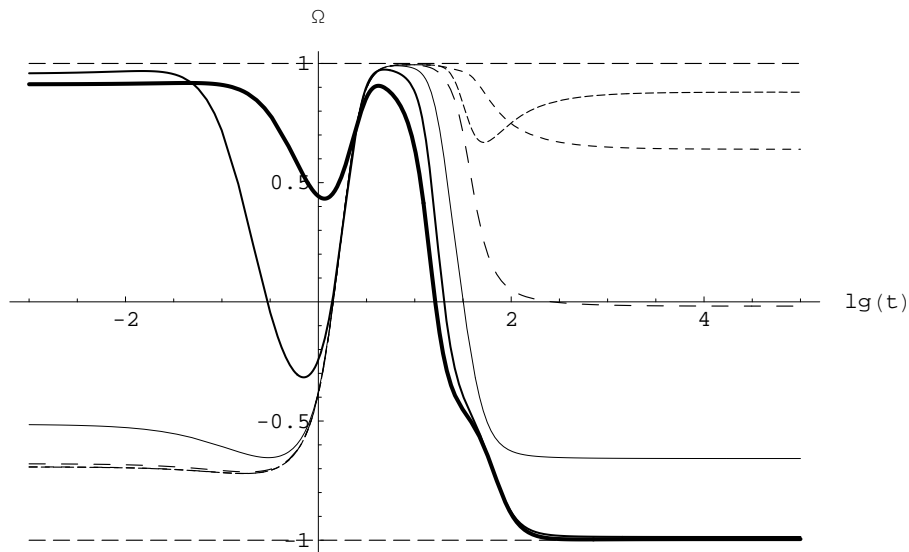


**Рис. 10.** То же самое, что и на Рис. 7, в крупном масштабе. Видно, что кажущиеся изломы графиков Рис. 9 в области  $\lg t \approx 1$  фиктивны.

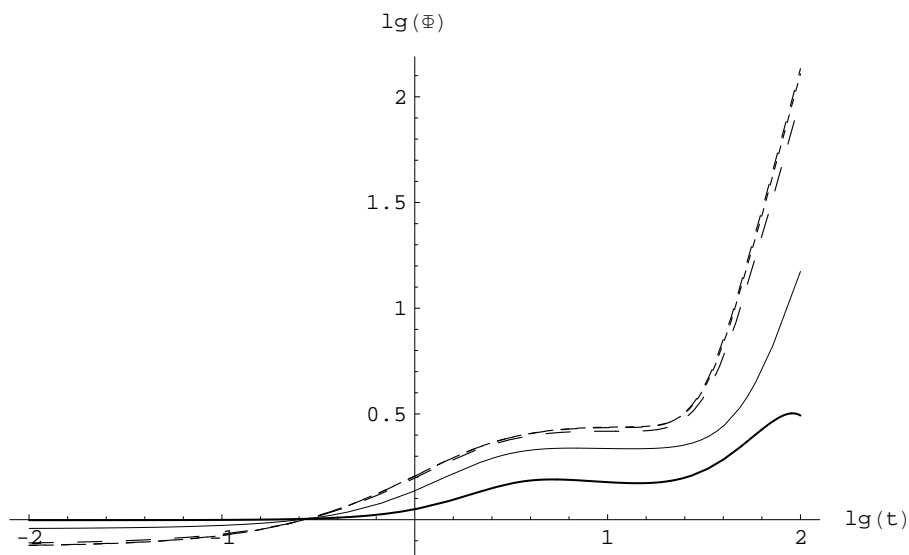
IV.7.2 Фигурное однократное ныряние в квазивакуумное состояние - зависимость от массы фермионов:  $p_f = 0.1, \mu = 0.3, q = 1, \Phi(0) = 1, \dot{\Phi}(0) = 0$ .



**Рис. 11.** Эволюция коэффициента баротропы,  $\kappa$  в зависимости от массы фермионов - частая пунктирная линия:  $m = 0.001$ , пунктирная линия -  $m =$ , разреженная пунктирная линия:  $m = 0.0015$ , разреженная пунктирная линия:  $m = 0.01$ ; сплошная тонкая линия:  $m = 0.1$ , Сплошная линия:  $m = 1$ , сплошная жирная линия:  $m = 5$ .

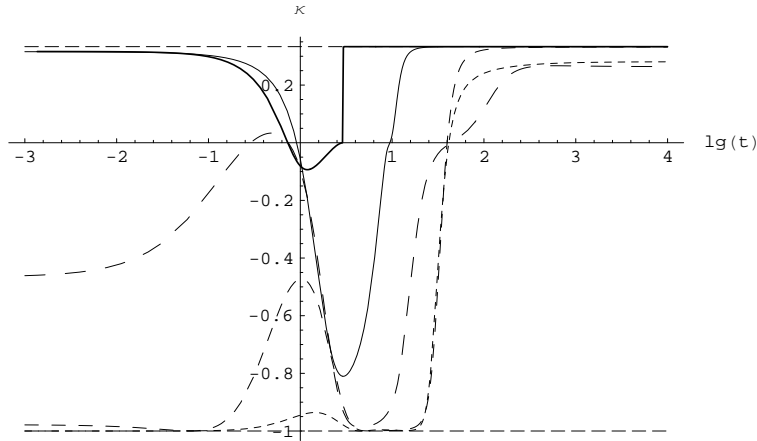


**Рис. 12.** Эволюция космологического ускорения (IV.118) в зависимости от массы фермионов - частая пунктирная линия:  $m = 0.001$ , пунктирная линия -  $m =$ , разреженная пунктирная линия:  $m = 0.0015$ , разреженная пунктирная линия:  $m = 0.01$ ; сплошная тонкая линия:  $m = 0.1$ , Сплошная линия:  $m = 1$ , сплошная жирная линия:  $m = 5$ .

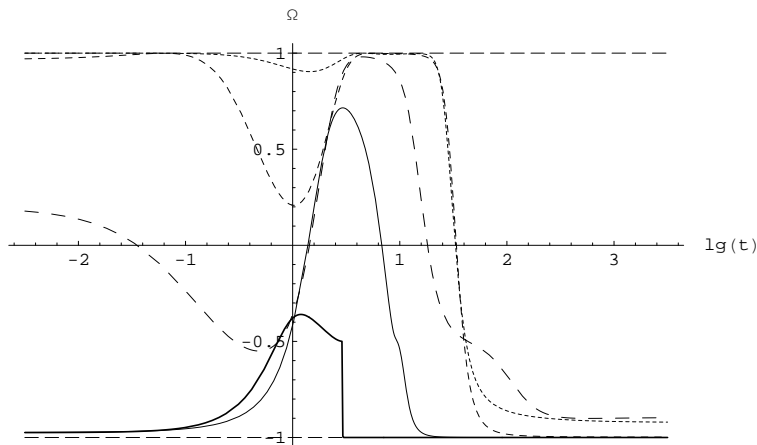


**Рис. 13.** Эволюция десятичного логарифма потенциала скалярного поля в зависимости от массы фермионов - частая пунктирная линия:  $m = 0.001$ , пунктирная линия -  $m = 0.0015$ , разреженная пунктирная линия:  $m = 0.01$ ; сплошная тонкая линия:  $m = 0.1$ , сплошная линия:  $m = 1$ , сплошная жирная линия:  $m = 5$ .

**IV.7.3 Фигурное однократное ныряние в квазивакуумное состояние — зависимость от начального импульса Ферми:  $m = 1, \mu = 0.3, q = 0.3, \Phi(0) = 1, \dot{\Phi}(0) = 0$ .**

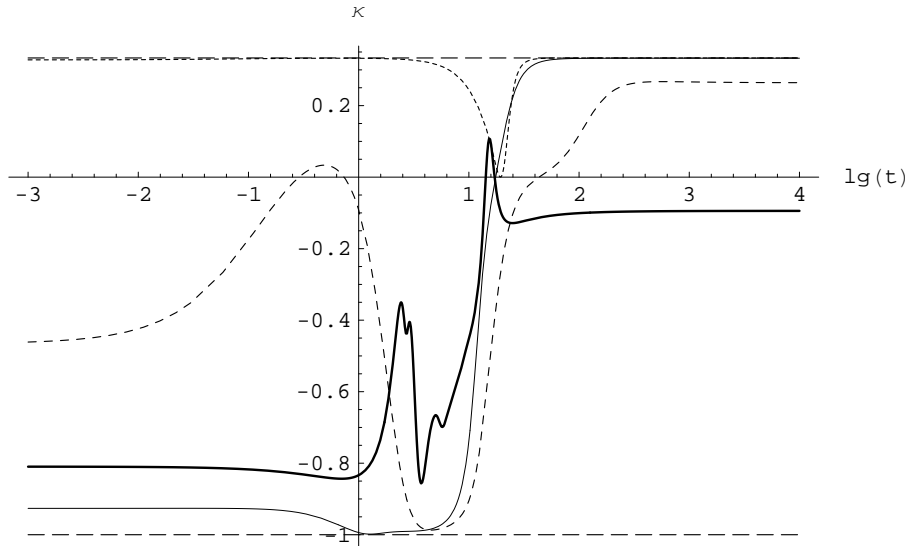


**Рис. 14.** Эволюция коэффициента баротропы,  $\kappa$  в зависимости от импульса Ферми - частая пунктирная линия:  $p_f = 0.01$ , пунктирная линия -  $p_f = 0.03$ , разреженная пунктирная линия -  $p_f = 0.1$ , сплошная тонкая линия:  $p_f = 0.3$ , сплошная жирная линия:  $p_f = 1$ .

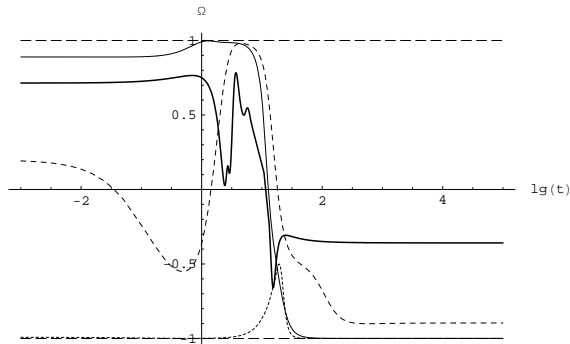


**Рис. 14.** Эволюция космологического ускорения,  $\kappa$  в зависимости от импульса Ферми. Частая пунктирная линия:  $p_f = 0.01$ , пунктирная линия -  $p_f = 0.03$ , разреженная пунктирная линия -  $p_f = 0.1$ , сплошная тонкая линия:  $p_f = 0.3$ , сплошная жирная линия:  $p_f = 1$ .

**IV.7.4 Судорожное всплывание в ультрарелятивистское состояние - зависимость от массы скалярных бозонов:  $p_f = 0.1, m = 1, q = 0.3, \Phi(0) = 1, \dot{\Phi}(0) = 0$ .**



**Рис. 15.** Эволюция коэффициента баротропы,  $\kappa$  в зависимости от массы скалярных бозонов  $\mu$ . Частая пунктирная линия:  $\mu = 0$ , пунктирная линия -  $\mu = 0.3$ , сплошная тонкая линия -  $\mu = 1$ , сплошная жирная линия:  $\mu = 3$ .



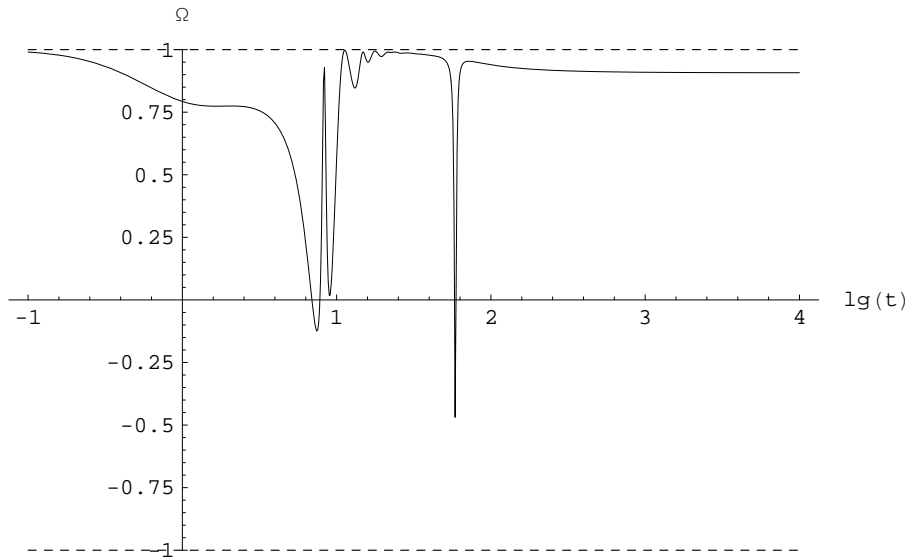
**Рис. 16.** Эволюция космологического ускорения,  $\Omega$ , в зависимости от массы скалярных бозонов  $\mu$ . Частая пунктирная линия:  $\mu = 0$ , пунктирная линия -  $\mu = 0.3$ , сплошная тонкая линия -  $\mu = 1$ , сплошная жирная линия:  $\mu = 3$ .

Заметим, что, численное исследование системы для больших значений начального импульса Ферми провести не удастся.

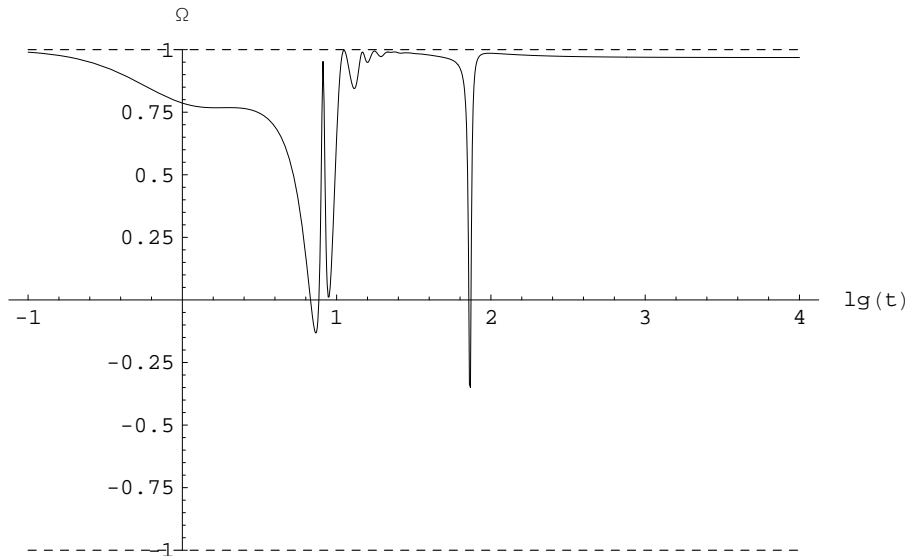
## IV.8 Решения со вторичным ускорением

В этом разделе ввиду чрезвычайной важности мы подробно проанализируем результаты численного моделирования систем с малым стартовым значением энергии Ферми, обнаруживающих тенденцию ко вторичному ускорению.

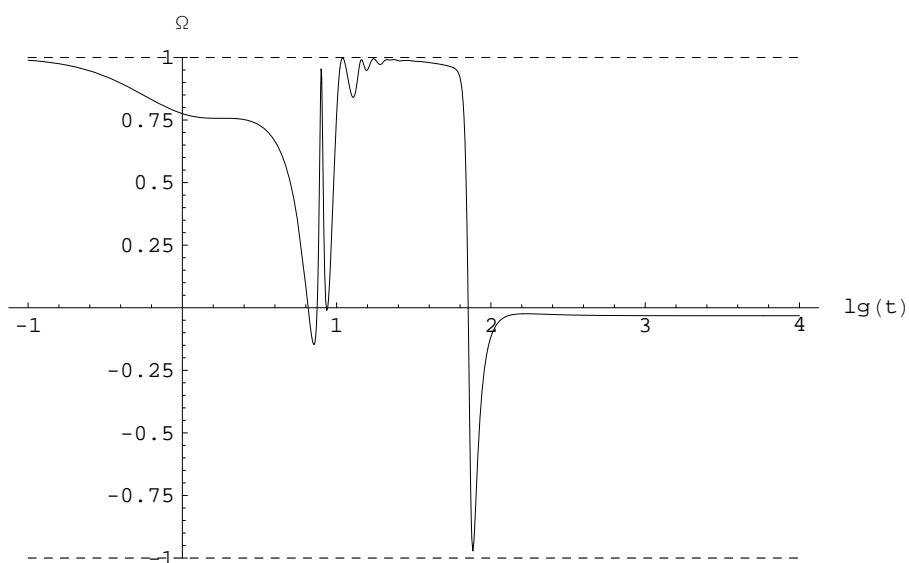
### IV.8.1 Зависимость от скалярного заряда фермионов: $p_f = 0.01, m = 1, \mu = 1, \Phi(0) = 1, \dot{\Phi}(0) = 0$ .



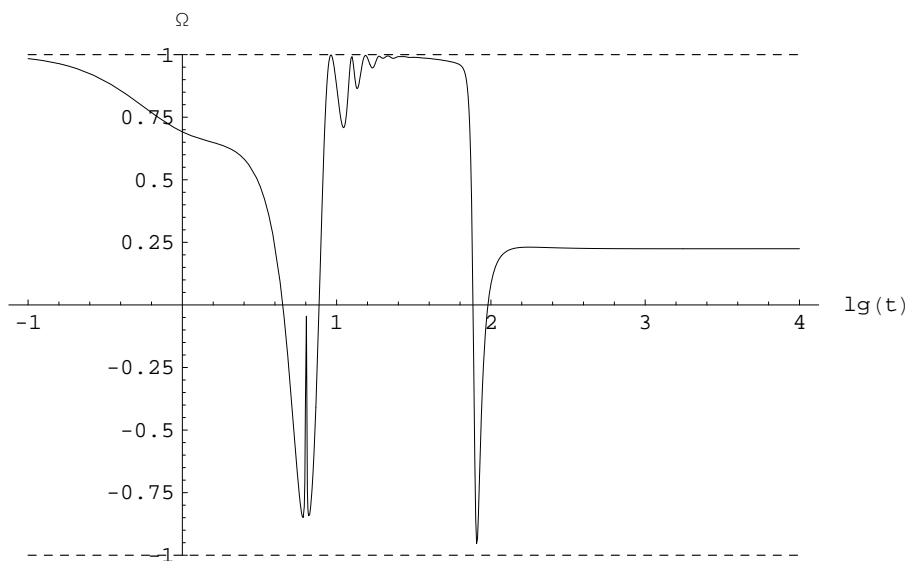
**Рис. 19.** Эволюция космологического ускорения,  $\Omega$ , при скалярном заряде фермионов,  $q = 0.001$ .



**Рис. 19.** Эволюция космологического ускорения,  $\Omega$ , при скалярном заряде фермионов,  $q = 0.1$ .



**Рис. 19.** Эволюция космологического ускорения,  $\Omega$ , при скалярном заряде фермионов,  $q = 0.3$ .



**Рис. 20.** Эволюция космологического ускорения,  $\Omega$ , при скалярном заряде фермионов,  $q = 10$ .

IV.9. Статистические систем частиц с притяжением одноименных скалярных зарядов

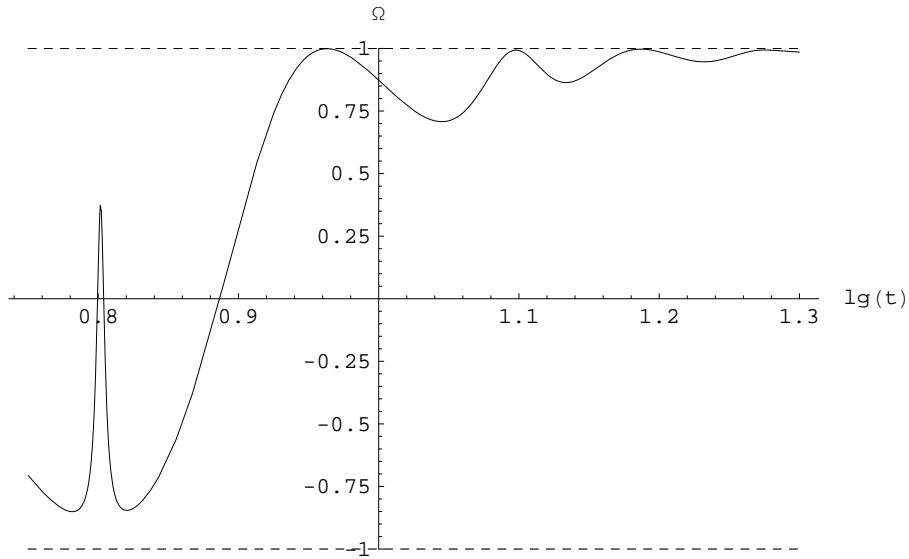


Рис. 21. То же, что и на Рис. 20 в большем масштабе.

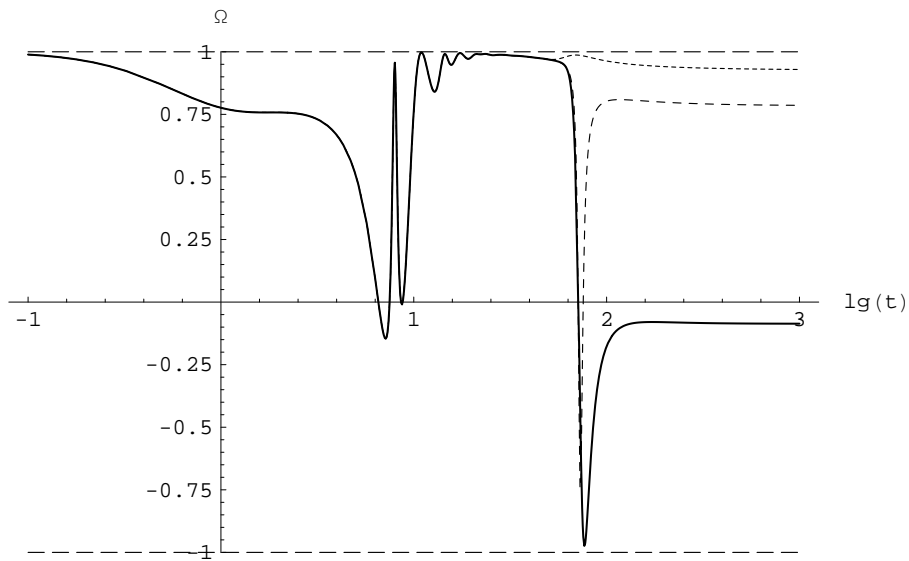


Рис. 22. Параметрическая неустойчивость космологического ускорения. Частая пунктирная линия:  $q = 0.28$ , пунктирная линия:  $q = 0.28363$ , сплошная линия -  $q = 28364$ .

## IV.9 Особенности статистических систем частиц с притяжением одноименных скалярных зарядов

В разделе 4 мы ввели функцию Лагранжа для скалярного массивного поля (IV.74)

$$L_s = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left[ g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} + \left( \frac{R}{6} - m_s^2 \right) \Phi^2 \right]$$

в которой значению  $\varepsilon = +1$  соответствует случай взаимного отталкивания одноименно скалярно заряженных частиц, а значению  $\varepsilon = -1$  соответствует взаимного притяжения одноименно скалярно заряженных частиц. Для более точного выяснения физического смысла параметров модели статистической системы со скалярным взаимодействием рассмотрим систему, состоящую из одной частицы с определенными значениями фазовых координат. Пусть нами выбрана система отсчета, в которой четырехмерное пространство представимо в виде прямого произведения трехмерного риманова пространства  $V_3$  времени  $T$ :  $V_4 = V_3 \times T$ . Согласно [170] инвариантная функция распределения такой системы имеет вид:

$$F(x, P) = (2\pi)^3 D(x|x_0) \delta^3(P^\alpha - P_0^\alpha), \quad (\text{IV.119})$$

где  $D(x|x_0)$  – инвариантная симметричная двухточечная функция Дирака, связанная со скалярной плотностью  $\Delta(x_1|x_2)$ , обычно и называемой  $\delta$ -функцией Дирака, соотношением:

$$\Delta(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{-g}} D(x_1|x_2). \quad (\text{IV.120})$$

Инвариантная функция Дирака определена обычным образом:

$$\int_{X_2} D(x_1|x_2) f(x_2) dX_2 = \begin{cases} f(x_1), & x_1 \in X_2; \\ 0, & x_1 \notin X_2 \end{cases},$$

где  $f(x)$  – произвольное тензорное поле в  $V_n$ ,  $dX = \sqrt{-g} dx^1 \cdot dx^2 \cdot \dots \cdot dx^n$  – инвариантный элемент объема  $V_n$ . Таким образом, вектор плотности потока числа частиц (IV.46) для частицы с определенными фазовыми координатами принимает вид:

$$n^i = D(x|x_0) \iiint_{P(x)} \frac{d^3 P}{\sqrt{-g} P_4^0} \delta^3(P^\alpha - P_0^\alpha) \equiv D(x|x_0) \frac{P_0^i}{P_4^0}, \quad (\text{IV.121})$$

где  $P_4^0$  – положительный корень уравнения массовой поверхности (IV.8):

$$(P, P) = m_*^2.$$

Вычисляя теперь полное число частиц в конфигурационном пространстве, получим:

$$N(t) = \iiint_{V_3} n^i u_i dV_3 = \iiint_{V_3} \sqrt{-g} D(x|x_0) d^3 x = 1, \quad (\text{IV.122})$$

где  $u_i$  – единичная времениподобная нормаль к гиперповерхности (вектор скорости наблюдателя). Таким образом, (IV.119) определяет правильную нормировку функции распределения одиночной частицы с фиксированными фазовыми координатами.

Вычисляя с помощью (IV.119) и (IV.48) след ТЭИ частиц, получим:

$$T_p = \frac{m_*^2}{P_4^0} D(x|x_0) \quad (\text{IV.123})$$

IV.9. Статистические систем частиц с притяжением одноименных скалярных зарядов

и, таким образом, согласно (IV.60) найдем скалярную плотность одиночного заряда:

$$\sigma = q \frac{m_0 + q\Phi}{P_4^0} D(x|x_0). \quad (\text{IV.124})$$

В частности, в случае покоящейся в пространстве Минковского частицы получим отсюда:

$$\sigma = q \text{sgn}(m_0 + q\Phi) \delta^3(r). \quad (\text{IV.125})$$

В случае ненулевой массы покоя частицы и нулевого скалярного поля получаем отсюда классический результат для ньютоновской плотности заряда.

Рассмотрим уравнения статического центрально-симметрического конформно инвариантного скалярного поля (IV.85)  $\square\Phi + m_s^2\Phi = -4\pi\varepsilon\sigma$  (IV.85) в пространстве Минковского с плотностью скалярного заряда (IV.125):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \Phi \right) - m_s^2 \Phi = 4\pi\varepsilon q \text{sgn}(m_0 + q\Phi) \delta^3(r). \quad (\text{IV.126})$$

Учитывая известное соотношение:<sup>5</sup>

$$\Delta \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta^3(r),$$

найдем формальное, сходящееся на бесконечности решение уравнения (IV.126):

$$\Phi = \varepsilon \text{sgn}(m_0 + q\Phi)_{r \rightarrow 0} \frac{q e^{-m_s r}}{r} \quad (\text{IV.127})$$

Далее, поскольку  $\Phi(0) \rightarrow \infty$ , то знаковая функция определяется лишь знаком выражения  $q\Phi(r)$  при  $r \rightarrow 0$ :

$$\Phi = \varepsilon \text{sgn}(q\Phi)_{r \rightarrow 0} \frac{q e^{-m_s r}}{r} \quad (\text{IV.128})$$

Умножая обе части решения (IV.127) на  $q$ , приходим к выводу, что знак функции  $\varphi = q\Phi$  определяется лишь знаком фактора  $\varepsilon$ :

$$\text{sgn}(q\Phi) = \varepsilon \quad (\text{IV.129})$$

– это очень важное свойство классического скалярного поля. Как раз это свойство и показывает, что значениям  $\varepsilon = -1$  соответствует отрицательная потенциальная энергия  $U = q\Phi$ , т.е., притяжение, а случаю  $\varepsilon = +1$  – положительная потенциальная энергия, т.е., отталкивание. При этом, в обоих случаях имеем потенциал взаимодействия (IV.128) типа потенциала Юкавы. Заметим, что классический случай притяжения ( $\varepsilon = -1$ ) для безмассового скалярного поля, фактически, соответствует, так называемым, фантомным полям. В этой схеме при ненулевой массе скалярного поля его потенциал подчиняется закону Юкавы. В этом разделе мы также рассмотрим и фантомные скалярные поля с

<sup>5</sup>См., например, [47].

отрицательным массивным членом – точнее говоря мы сохраним знак массивного члена в функции Лагранжа, но изменим знак «кинетического» члена<sup>6</sup>:

$$L_s = -\frac{1}{8\pi} \left[ g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} + \left( \frac{R}{6} + m_s^2 \right) \Phi^2 \right]. \quad (\text{IV.130})$$

Причину введения такой функции Лагранжа для статистических систем с притяжением одноименно заряженных частиц мы поясним позднее.

Тензор энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (IV.130) имеет вид:

$$T_s^{ik} = \frac{1}{8\pi} \left( -\frac{4}{3} \Phi^i \Phi^k + \frac{1}{3} g^{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + m_s^2 g^{ik} \Phi^2 \right). \quad (\text{IV.131})$$

При этом определение скалярной плотности зарядов  $\sigma$  (IV.58) остается неизменным:

$$\sigma = \sum \frac{d \ln |m_*|}{d\Phi} T_p \quad (\text{IV.132})$$

а уравнение скалярного поля принимает вид:

$$\square \Phi - m_s^2 \Phi - \frac{R}{6} \Phi = 4\pi \sigma \quad (\text{IV.133})$$

Решая аналогичную предыдущей задаче для центрально-симметричного статического поля в пространстве Минковского, получим:

$$\Phi = \text{sgn}(m_0 + q\Phi)_{r \rightarrow 0} \frac{q \sin m_s r}{r}. \quad (\text{IV.134})$$

Поскольку в этом случае потенциал в начале координат конечен, вычисляя предел, получим отсюда:

$$\Phi(0) = q m_s \text{sgn}(m_0 + q\Phi(0)).$$

Нетрудно показать, что это алгебраическое уравнение имеет лишь один корень:

$$\Phi(0) = q m_s. \quad (\text{IV.135})$$

Таким образом, несмотря на кажущуюся формальную сложность найденного решения, получим из (IV.134) и (IV.135) простое решение уравнения для скалярного поля одиночного покоящегося скалярного заряда:

$$\Phi = q \frac{\sin m_s r}{r}. \quad (\text{IV.136})$$

Следовательно, массивные фантомные скалярные поля являются несингулярными в источниках далекодействующими полями с притяжением одноименно заряженных частиц.

---

<sup>6</sup>Для конформно инвариантного скалярного поля необходимо опустить член со скалярной кривизной в соотношении (114).

## IV.10 Самосогласованная космологическая модель для локально равновесной плазмы с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц

Вычисляя тензор энергии-импульса скалярного поля относительно метрики пространственно-плоской Вселенной Фридмана

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (\text{IV.137})$$

получим из (IV.131) плотность энергии и давление скалярного поля с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц:

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 \mp m_s^2\Phi^2); \quad \mathcal{P}_s = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{3}\dot{\Phi}^2 \mp m_s^2\Phi^2\right), \quad (\text{IV.138})$$

где верхний знак соответствует классическому скалярному полю с притяжением, нижний знак – фантомному скалярному полю с притяжением<sup>7</sup>. Таким образом, плотность энергии классического скалярного поля с притяжением строго отрицательна, что и препятствует использованию классического скалярного поля с потенциалом типа Юкавы в качестве модели физического вакуума. В случае же фантомного скалярного поля с массивным членом, соответствующем мнимой массе, такого препятствия не возникает. Именно этот фактор, по-видимому, и является определяющим корректную релятивистскую модель скалярного взаимодействия частиц. В частности, класс космологических моделей с инфляционной начальной стадией для скалярных полей с притяжением однозначно приводит к выбору именно фантомных скалярных полей, поскольку уравнения Эйнштейна для классического скалярного поля с притяжением имеют вид  $\dot{a}^2 = -b^2$ , т.е., не имеют действительных решений.

Заметим, что след тензора энергии-импульса скалярного поля равен:

$$T_s = E_s - 3P_s = \frac{1}{2\pi}m_s^2\Phi^2, \quad (\text{IV.139})$$

а также:

$$\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s = -\frac{\dot{\Phi}^2}{4\pi}. \quad (\text{IV.140})$$

Уравнение для скалярного поля принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} \pm m_s^2\Phi = 4\pi\sigma, \quad (\text{IV.141})$$

где опять-таки верхний знак соответствует классическому скалярному полю с притяжением, нижний знак – фантомному скалярному полю. Равновесная плотность скалярного заряда,  $\sigma$ , в уравнении (IV.141) описывается формулой (IV.73):

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q(m+q\Phi)^3 \int_0^\infty \frac{sh^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* chx} \pm 1}, \quad (\text{IV.142})$$

<sup>7</sup>Как видно, фактор притяжения-отталкивания одноименно скалярно заряженных частиц полностью определяется знаком кинетического члена в функции Лагранжа, поэтому в дальнейшем мы не будем для фантомного поля добавлять «с притяжением».

в котором мы положили функцию массы равной  $m_* = |m + q\Phi|$ , и  $\lambda_* = m_*/\theta$ . Если мы сделаем дополнительное предположение о сохранении скалярного заряда во всех реакциях, тогда мы получим условие на химический потенциал скалярно заряженных частиц:

$$a^3(t) \sum q_a n_a = a^3(t) \sum q_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{sh^2 x ch x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* ch x} \pm 1} = Const, \quad (IV.143)$$

где суммирование проводится по всем скалярно заряженным частицам. В частности, если предположить, что частицы одного сорта «а» с противоположными скалярными зарядами могут аннигилировать:

$$a + \bar{a} = \gamma + \bar{\gamma}, \quad (IV.144)$$

из условий химического равновесия (IV.67) получим связь приведенных химических потенциалов скалярно заряженных частиц и античастиц:

$$\bar{\gamma}_a = -\gamma_a. \quad (IV.145)$$

При этом с учетом алгебраического уравнения (IV.143) мы получаем замкнутую систему уравнений для космологической модели (IV.99), (IV.101), (IV.141).

## IV.11 Математическая модель двухкомпонентной бозе-мановской космологической плазмы с притяжением одноименных скалярных зарядов

В ряде работ Автора на основе релятивистской кинетической теории развивалась самоогласованная общерелятивистская теория плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием (ранние работы [169] – [172] и более поздние работы [177] – [179]). В результате была построена строгая теория, обеспечивающая микроскопическое обоснование классических статистических систем с макроскопическими скалярными полями. В отличие от множества так называемых «моделей с неминимальным скалярным взаимодействием», появившихся в последние годы эта теория является, по существу, динамической, отталкивающаяся от классического прямого взаимодействия частиц со скалярным полем посредством некоего *скалярного заряда*  $q$ . При этом следует отметить, что указанное прямое взаимодействие вследствие строгих законов классической гамильтоновой динамики автоматически приводит к изменению эффективной массы частицы, что является прямым аналогом квантово-полевого механизма Хиггса генерации массы элементарных частиц. В последней работе одного из авторов, [179], в частности, была развита макроскопическая теория плазмы со скалярным притяжением одноименно скалярно заряженных частиц и показано, что единственно непротиворечивой теоретической моделью скалярного поля может быть лишь фантомная модель, отличающаяся от стандартной классической модели знаком кинетического члена в тензоре энергии-импульса скалярного поля. В работах [180] – [182] были построены математические и компьютерные модели космологической эволюции односортовой вырожденной плазмы ферми-частиц с отталкиванием одноименно

IV.11. Математическая модель двухкомпонентной бoльцмановской плазмы

скалярно заряженных частиц с ненулевой голой массой и путем численного моделирования установлен факт богатого разнообразия типов космологической эволюции такой плазмы в зависимости от ряда фундаментальных параметров и начальных условий. В частности, были выявлены типы позднего асимптотического выхода плазмы на режимы с постоянным коэффициентом баротропы ( $\kappa = p/\varepsilon$ ), соответствующие ультрарелятивистскому, нерелятивистскому уравнениям состояний, а также уравнению состояния, соответствующему инфляции. Следует отметить, что вырожденная ферми-система в этих работах была выбрана благодаря математической простоте ее описания. В данной работе мы проведем математическое и компьютерное моделирование двухкомпонентной почти зарядово-симметричной космологической бoльцмановской плазмы с равной нулю голой массой частиц в случае притяжения одноименно скалярно заряженных частиц в фантомной модели скалярного поля.

Выпишем полную самосогласованную систему уравнений Эйнштейна-скалярного поля и следствий кинетической теории для рассматриваемого космологического случая относительно пространственно плоской метрики Фридмана [179]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (\text{IV.146})$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi E; \quad (\text{IV.147})$$

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma; \quad (\text{IV.148})$$

$$\dot{E}_{pl} + 3\frac{\dot{a}}{a}(E_{pl} + P_{pl}) = \sigma\dot{\Phi}, \quad (\text{IV.149})$$

где

$$E = E_s + E_{pl}; \quad P = P_s + P_{pl} \quad (\text{IV.150})$$

– плотности энергии и давление скалярного поля и плазмы, соответственно;  $\sigma$  – плотность скалярного заряда,  $\Phi$  – потенциал скалярного поля. Соответствующие макроскопические плотности для локально равновесной плазмы определяются следующими выражениями (IV.69) – (IV.73):

$$n_a = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch} x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1};$$

$$E_{pl} = \sum_a E_a = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1};$$

$$P_{pl} = \sum_a P_a = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^4 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1};$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{4\pi^2} \frac{dm_*^2}{d\Phi} m_*^2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1},$$

где  $S$  – спин частиц,  $\lambda_* = m_*/\theta$  – обратная температура,  $\gamma_a$  – приведенные химические потенциалы,  $m_*$  – эффективная масса частиц, которая в рассматриваемом двухкомпонентном случае совпадает для частиц и античастиц:

$$m_*^\pm = |m \pm q\Phi| \rightarrow m_* = q|\Phi| \Rightarrow \lambda_+ = \lambda_- = \lambda. \quad (\text{IV.151})$$

Аналогичные величины для скалярного поля имеют вид [179]:

$$E_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2); \quad P_s = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{3}\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2\right), \quad (\text{IV.152})$$

где  $m_s$  – масса скалярного поля. К указанным уравнениям мы присоединим и закон сохранения скалярного заряда, полагая, что скалярный заряд является фундаментальным зарядом [179]:

$$a^3(t) \sum q_a n_a = a^3(t) \sum q_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch} x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1} = \text{Const}. \quad (\text{IV.153})$$

Поскольку мы рассматриваем двухкомпонентную плазму, состоящую из частиц и античастиц, сумма их химических потенциалов должна быть равна нулю:

$$\gamma_+ = -\gamma_- = \gamma. \quad (\text{IV.154})$$

Таким образом, мы имеем замкнутую систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (IV.147), (IV.148), (IV.149), (IV.153) совместно с определениями (IV.69) – (IV.73) относительно четырех неизвестных функций:  $a(t)$ ,  $\Phi(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $\gamma(t)$ . В дальнейшем будем полагать  $S = 1/2$ .

## IV.12 Упрощение и анализ математической модели

В дальнейшем будем полагать, что космологическая плазма является почти зарядово-симметричной, что, в свою очередь, означает малость химического потенциала  $\gamma$ :

$$\gamma \rightarrow 0. \quad (\text{IV.155})$$

Учитывая (IV.151) и (IV.155), приведем уравнение (IV.153) к виду:

$$a^3(t) \text{sh} \gamma \frac{qm_*^3}{\pi^2} \int_0^\infty e^{-\lambda \text{ch} x} \text{sh}^2 x \text{ch} x dx = \text{Const}.$$

Вычисляя интеграл и переходя к пределу (IV.155), решим это уравнение относительно малого химического потенциала:

$$\gamma \approx \text{Const} \frac{\lambda}{a^3 m_*^3 K_2(\lambda)}, \quad (\text{IV.156})$$

где

$$K_\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^\mu}{2^\mu \Gamma(\mu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-z \text{ch} x} \text{sh}^{2\mu} x dx, \quad \text{Re}(z) > 0, \quad \text{Re}(\mu) > -\frac{1}{2}$$

#### IV.12. Упрощение и анализ математической модели

– функции Макдональда (см., например, [86]). Далее, в пределе (IV.155) с учетом рекуррентных соотношений между функциями Бесселя найдем приближенные значения плотностей (IV.69) – (IV.73):

$$E_{pl} \approx \frac{2q^4\Phi^4}{\pi^2} \left( \frac{K_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} \right); \quad (IV.157)$$

$$P_{pl} \approx \frac{2q^4\Phi^4}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2}; \quad (IV.158)$$

$$\sigma \approx \frac{2q^4\Phi^3}{\pi^2} \frac{K_1(\lambda)}{\lambda}. \quad (IV.159)$$

Заметим, во-первых, что малый химический потенциал в приближении (IV.155) согласно (IV.156) полностью определяется функциями  $a(t)$ ,  $\Phi(t)$ ,  $\lambda(t)$ , которые не зависят, в свою очередь, от него. В оставшиеся 3 уравнения (IV.147) – (IV.149) масштабный фактор входит всюду в комбинации  $\dot{a}/a$ , что позволяет перейти к новой переменной:

$$\Lambda(t) = \ln a \Leftrightarrow a = e^\Lambda, \quad (IV.160)$$

т.е., вычислять масштабный фактор в «efold» -ах. Произведя преобразование (IV.160) с учетом (IV.151), (IV.157), (IV.158), (IV.159), а также полагая  $\dot{a} > 0$ , приведем уравнения (IV.147) – (IV.149) к виду:

$$\dot{\Lambda} = \left[ \frac{8\pi}{3} \left( \frac{1}{8\pi} \left( -\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2 \right) + \frac{2m_*^4}{\pi^2} \left( \frac{K_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (IV.161)$$

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Lambda}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi = \frac{4q^4\Phi^3}{\pi} \frac{K_1(\lambda)}{\lambda}; \quad (IV.162)$$

$$4 \frac{d \ln |\Phi|}{dt} \left[ \frac{K_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} \right] - \dot{\lambda} \left( 3 \frac{K_3(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^3} \right) + 3\dot{\Lambda} \frac{K_3(\lambda)}{\lambda} = 0. \quad (IV.163)$$

Уравнения (IV.161) – (IV.163) представляют замкнутую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков. Для их решения необходимо задать начальные условия в форме:

$$\Lambda(0) = \Lambda_0; \quad \Phi(0) = \Phi_0; \quad \dot{\Phi}(0) = \dot{\Phi}_0; \quad \lambda(0) = \lambda_0. \quad (IV.164)$$

Однако, поскольку величина  $\dot{\Lambda}$  явно находится из уравнения (IV.20), фактически в системе уравнений (IV.161) – (IV.163) выделяется автономная подсистема (IV.21) – (IV.22) относительно переменных  $\Phi, \lambda$ , которая эквивалентна нормальной системе 3-х обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Таким образом, фактически, фазовое пространство переменных  $\{\Phi, \dot{\Phi}, \lambda\}$  трехмерно. Однако, кроме множества начальных условий задача имеет еще два неизвестных параметра,  $q$  и  $m_s$ , что приводит к необходимости построения большого числа численных моделей для проведения достаточно полного исследования.

## Глава V

# Релятивистская кинетика бариогенезиса в симметричной горячей Вселенной

### V.1 Механизм нарушения барионной симметрии Вселенной

Важным примером нарушения локального термодинамического равновесия (ЛТР) массивными частицами в ходе космологического расширения является процесс производства барионов (бариогенеза) в первоначально барионно-симметричной Вселенной. В [14], [15] была высказана гипотеза о том, что наблюдаемая барионная асимметрия Вселенной

$$\delta_b = \frac{n_B}{n_\gamma} \sim 10^{-9} \quad (\text{V.1})$$

вызвана  $CP$ -неинвариантными процессами, нарушающими сохранение барионного заряда. Примером такого процесса является распад сверхмассивных  $X$ -бозонов, к которым приводят модели Великого объединения:<sup>1</sup>

$$X \rightleftharpoons \bar{q} + \bar{q}; \quad X \rightleftharpoons q + l, \quad (\text{V.2})$$

где  $q$  - символ кварка,  $l$  - лептона. В [184], однако, показано, что если данные процессы протекают в условиях ЛТР, то даже наличие  $CP$ -неинвариантности и нарушение сохранения барионного заряда недостаточно для возникновения избытка барионов над антибарионами. Для производства барионного заряда в первоначально барионно-симметричной Вселенной кроме указанных факторов требуется нарушение ЛТР в реакциях типа (V.2) и вывод барионов из состояния статистического равновесия. Такая возможность:

$$\tau_x \gtrsim t \quad (\text{V.3})$$

( $\tau_x$  - время полураспада  $X$ -бозона,  $t$  - космологическое время) реализуется при условии [185]:

$$m_X > \alpha_X m_{pl} \sqrt{N}, \quad (\text{V.4})$$

---

<sup>1</sup>Здесь и далее  $\bar{a}$  означает античастицу  $a$ .

### V.1. Механизм нарушения барионной симметрии Вселенной

( $m_X$  - масса  $X$ -бозона,  $m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$  - планковская масса,  $N$  - число степеней свободы).  
Условие (V.4) жестко ограничивает снизу допустимые значения масс  $X$ - бозонов.

В работах [185], [186], [187] (см. также [188], [189] и др.) были сделаны оценки барионной асимметрии Вселенной в предположении нарушения ЛТР. Для отношения плотности числа барионов к плотности полной энтропии,  $\delta_S$ , было получено:

$$\delta_S = \frac{n_b}{S} \simeq \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \frac{N_X}{N} \Delta r, \quad (V.5)$$

где  $\zeta(x)$  -  $\zeta$  - функция Римана,  $N_X$  - число типов сверхмассивных  $X$ - бозонов,  $\Delta r$  - разность относительных вероятностей распадов в каналах

$$X \rightarrow q + l \text{ и } \bar{X} \rightarrow \bar{q} + \bar{l},$$

возникающая вследствие нарушения  $CP$  - инвариантности. Далее в работах [190]-[192] на основе релятивистской кинетической теории были проведены численные расчеты отношения  $n_B/S$ , в основном, подтвердившие вышеуказанные оценки. В цитированных выше работах на основании проведенных расчетов был установлен нижний предел массы  $X$  - бозона:

$$m_X \geq 10^{16} \text{ ГэВ}, \quad (V.6)$$

который создал значительные трудности для стандартной  $SU(5)$  теории.

Указанные работы, однако, имеют существенный недостаток - вместо прямого решения кинетических уравнений для  $X$  - бозонов в условиях *существенного* нарушения ЛТР бозонные функции распределения моделируются квазиравновесными распределениями, параметры которых определяются из гидродинамических уравнений для моментов функции распределения, т.е., в этих работах фактически используется гидродинамический метод Энскога-Чемпена-Града. Как следует из результатов релятивистской кинетической теории (см., например, [87]-[89]), глобальное термодинамическое равновесие в однородной изотропно расширяющейся плазме достигается лишь в крайнем нерелятивистском пределе, либо в крайнем ультрарелятивистском, что является следствием асимптотической конформной инвариантности релятивистской кинетической теории [52]. В области промежуточных энергий частиц и при условии нарушения ЛТР распределение частиц не аппроксимируется равновесным распределением. В работах [193, 194] автора в рамках кинетической модели была найдена неравновесная функция распределения  $X$  - бозонов и показано, что эта функция может существенно отличаться от равновесной. Поэтому результаты полученные в [190]-[192], правильные при выполнении *сильного* неравенства (V.4), нуждаются в уточнении в других областях. Оценка (V.5) хотя и является, по-видимому, достаточно надежной, ничего не говорит о тех ситуациях, когда условие (V.4) невыполняется, тогда как ширина перекрытия экспериментальных и теоретических значений  $\delta_S$  допускает возможность, когда барионный заряд производится в условиях менее выгодных, чем (V.4).

Ответить на вопрос, какова будет величина  $\delta_S$  при  $m_X \leq \alpha_X m_{pl} \sqrt{N}$ , может лишь детальный кинетический анализ. При условии доверия к гипотезе изначально барионно-и зарядово-симметричной Вселенной такой анализ с другой стороны позволил бы более определенно очертить область возможных значений фундаментальных констант Великого объединения. В середине 80-х - начале 90-х годов Автором была сформулирована

кинетическая модель описания процессов нарушения симметрии и были получены некоторые оценки, вытекающие из предложенной модели [194], [195]. В частности, на основе сделанных оценок было высказано предположение, что учет кинетики процесса бариогенезиса позволит снизить нижнюю оценку массы сверхмассивных бозонов до величины порядка  $5 \cdot 10^{14}$  ГэВ. Однако детальный анализ этой модели в этих работах произведен не был и в силу внешних обстоятельств исследования в этом направлении не были завершены. Эти работы были завершены лишь в 2005-2007 годах в связи с появлением мощных вычислительных средств прикладных математических пакетов [196, 197, 198].

Следует заметить, что несмотря на то, что ниже приведены результаты для конкретной модели взаимодействий, основанной на минимальной  $SU(5)$  симметрии, обобщение результатов на другие аналогичные полевые модели или аналогичные модели спонтанного нарушения симметрии в результате Т-несимметричного распада любых типов распадающихся частиц не представляет труда - оно сводится к построению соответствующей алгебры взаимодействий и простому арифметическому пересчету соответствующих кинетических коэффициентов.

## V.2 Алгебра взаимодействий $SU(5)$

Рассмотрим, например, стандартную  $SU(5)$  модель взаимодействий (см., например, [189]). В этой модели участвуют 12 векторных калибровочных бозонов, представляющих два заряженных цветовых триплета:

$$\{X_{v,-4/3}^i, \bar{X}_{v,4/3}^i; X_{v,-1/3}^i, \bar{X}_{v,1/3}^i\}$$

-  $i$  - цветовой индекс (красный, зеленый, синий), число внизу - электрический заряд - и 12 скалярных хиггсовых бозонов:

$$\{X_{s,-1/3}^i, \bar{X}_{s,1/3}^i; X_{s,-4/3}^i, \bar{X}_{s,4/3}^i\}.$$

В более общих моделях число векторных бозонов доводится до 24, - при этом добавляется еще два триплета

$$\{X_{v',-1/3}^i, \bar{X}_{v',1/3}^i; X_{v',2/3}^i, \bar{X}_{v',-2/3}^i\},$$

а число хиггсовых бозонов - до 30, при этом добавляются три  $SU(3)$  - триплета, входящих в три  $SU(2)$  триплета:

$$\{X_{s',-1/3}^i, \bar{X}_{s',1/3}^i; X_{s',2/3}^i, \bar{X}_{s',-2/3}^i; X_{s',-4/3}^i, \bar{X}_{s',4/3}^i\}.$$

Сверхмассивные  $X$ -бозоны часто называются  $Y, Y, Z$ -бозонами соответственно их зарядам:  $-4/3, -1/3, 2/3$ . Законы сохранения электрического заряда позволяют протекать лишь следующим реакциям распада/рождения этих бозонов:

$$\begin{aligned} X_{-4/3} &\rightleftharpoons \bar{q}_\alpha + \bar{q}_\alpha; X_{-4/3} \rightleftharpoons q_\kappa + l_e; \\ X_{-1/3} &\rightleftharpoons \bar{q}_\alpha + \bar{q}_\kappa; X_{-1/3} \rightleftharpoons q_\kappa + l_\nu; X_{-1/3} \rightleftharpoons q_\alpha + l_e; \\ X_{2/3} &\rightleftharpoons \bar{q}_\kappa + \bar{q}_\kappa; X_{2/3} \rightleftharpoons q_\alpha + l_\nu \end{aligned} \tag{V.7}$$

### V.3. Релятивистские кинетические уравнения в $SU(5)$

где  $\alpha$  - индекс апокварка ( $\alpha = u, c, t$  - кварки с зарядом  $2/3$ ),  $\kappa$  - катокварка ( $\kappa = d, s, b$  - кварки с зарядом  $-1/3$ ),  $e$  - символ заряженного лептона ( $e = e, \mu, \tau$ , заряд=-1),  $\nu$  - нейтрального лептона ( $\nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ). В реакциях (V.7) сохраняется также цветовой заряд, поэтому в реакциях распада  $X$ -бозона и кварковой аннигиляции участвуют антикварки различных цветов, дополнительных к цвету  $X$  - бозона, например:

$$\bar{X}_{-4/3}^R = d_r^R + e_- = \bar{u}_l^{\bar{G}} + \bar{u}_l^{\bar{B}};$$

$$\bar{X}_{-4/3}^G = d_l^G + e_- = \bar{u}_l^{\bar{R}} + \bar{u}_l^{\bar{B}},$$

где  $R, G, B$  - обозначения красного, синего, зеленого цветов; соответствующие начеркнутые индексы  $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$  - антицвета, равные суммам соответствующих дополнительных,  $l, r$  - обозначения левых и правых частиц. Можно предположить, как это часто делается, что в правых частях реакций (V.7) участвуют частицы с одинаковым ароматом. В этом случае в стандартном варианте  $SU(5)$  будет 90 пар реакций типа (V.7), а в расширенном варианте модели - 198 пар<sup>2</sup>. Далее, число степеней свободы в стандартном варианте модели равно:

$$N = \sum_B (2s + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2s + 1) = 185$$

- 24 векторных бозона ( $s = 1$ ), - 29 скалярных бозонов ( $s = 0$ ), 36 кварков ( $s = 1/2$ ), 12 лептонов ( $s = 1/2$ ). В расширенных вариантах  $SU(5)$  это число еще больше.

## V.3 Релятивистские кинетические уравнения в $SU(5)$

Для удобства выразим усредненные по спиновым состояниям инвариантные элементы матрицы перехода распадов сверхмассивных бозонов с помощью безразмерных чисел ( $r_i, \bar{r}_i$ ):

$$\begin{aligned} |M_{X \rightarrow ql_e}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 r_e; & |M_{X \rightarrow ql_\nu}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 r_\nu; \\ |M_{\bar{X} \rightarrow \bar{q} \bar{l}_e}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 \bar{r}_e; & |M_{\bar{X} \rightarrow \bar{q} \bar{l}_\nu}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 \bar{r}_\nu; \end{aligned} \quad (V.8)$$

$$|M_{X \rightarrow \bar{q} \bar{q}}|^2 = \frac{1}{6} s^2 (1 - r); \quad |M_{\bar{X} \rightarrow q q}|^2 = \frac{1}{6} s^2 (1 - \bar{r}),$$

( $r = r_e + r_\nu, \bar{r} = \bar{r}_e + \bar{r}_\nu$ ), которые должны быть еще снабжены индексами электрического и цветового зарядов, а также ароматов кварков и лептонов.

Вследствие  $CPT$  - инвариантности усредненные матричные элементы обратных переходов (аннигиляции) равны:

$$\begin{aligned} |M_{ql_e \rightarrow X}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 \bar{r}_e; & |M_{ql_\nu \rightarrow X}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 \bar{r}_\nu; \\ |M_{\bar{q} \bar{l}_e \rightarrow \bar{X}}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 r_e; & |M_{\bar{q} \bar{l}_\nu \rightarrow \bar{X}}|^2 &= \frac{1}{3} s^2 r_\nu; \\ |M_{\bar{q} \bar{q} \rightarrow X}|^2 &= \frac{1}{6} s^2 (1 - \bar{r}); & |M_{q q \rightarrow \bar{X}}|^2 &= \frac{1}{6} s^2 (1 - r). \end{aligned} \quad (V.9)$$

<sup>2</sup>С учетом распада и рождения сверхмассивных антибозонов.

Инвариантные матричные элементы вероятности двухчастичного распада постоянны. Вычисление полной вероятности распада в однопетлевом приближении в рамках, например, стандартной  $SU(5)$  модели дает:

$$W_{X \rightarrow ql} = \frac{\pi\alpha}{108} (2\pi)^4 m_X^2 \delta^{(4)}(P_F - P_I),$$

где  $P$ -полные 4-импульсы начального и конечного состояния,  $\alpha \approx 1/45$ . В этом случае:

$$\sum_{A,C} s^2 = \frac{8\pi m_X^2}{27}, \quad (\text{V.10})$$

где суммирование проводится по всем ароматам и цветам частиц, участвующих в распаде данного  $X$ -бозона.

В дальнейшем мы, однако, не будем конкретизировать  $s^2$ , полагая только:

$$s^2 = \text{Const}. \quad (\text{V.11})$$

Кроме реакций первого порядка (V.7) возможны и реакции более высокого порядка, протекающие с участием сверхмассивных бозонов и нарушающие  $CP$ -инвариантность а также законы сохранения барионного и лептонного зарядов, например,

$$qq' \xrightarrow{X} \bar{q}l; \quad q\bar{l} \xrightarrow{X} \bar{q}q'. \quad (\text{V.12})$$

Рассмотрим далее метрику однородной изотропной Вселенной<sup>3</sup>:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{V.13})$$

Пусть далее  $p^i$  - 4-импульс частицы, удовлетворяющий соотношению нормировки:

$$(p, p) = (p^4)^2 - p^2 = m^2 \Rightarrow E = \sqrt{m^2 + p^2}, \quad (\text{V.14})$$

где  $p^2 = a^2(t)((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2)$  - квадрат кинематического импульса частицы,  $E = p^4$  - кинетическая энергия частиц.

В [52] показано, что релятивистские кинетические уравнения являются асимптотически конформно инвариантными в ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{m^2} \rightarrow \infty \quad (\text{V.15})$$

с точностью до  $O(m^2/p^2)$ . Таким образом, в ультрарелятивистском пределе (V.15), когда энергии всех частиц, участвующих в реакциях, гораздо больше их масс покоя, кинетические уравнения в метрике Фридмана после соответствующего конформного преобразования совпадают с кинетическими уравнениями в пространстве Минковского. Именно поэтому однородное изотропное расширение ультрарелятивистской плазмы не выводит ее из состояния *глобального* термодинамического равновесия. Далее, в противоположном, нерелятивистском, пределе:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{m^2} \rightarrow 0, \quad (\text{V.16})$$

<sup>3</sup>Здесь и в дальнейшем мы выбираем систему единиц  $\hbar = c = G = 1$ .

### V.3. Релятивистские кинетические уравнения в $SU(5)$

когда кинетические энергии всех частиц, участвующих в процессе, гораздо меньше их масс покоя, в плазме снова восстанавливается глобальное термодинамическое равновесие [147],[87].

Введем согласно [52] конформные импульсы частиц,  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ , являющиеся интегралами движения, по формуле:

$$\mathbb{P} = a(t)p \quad (= \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2}), \quad (\text{V.17})$$

конформную кинетическую энергию частиц  $\mathbb{E} = a(t)E$ :

$$\mathbb{E} = \sqrt{a^2(t)m^2 + \mathbb{P}^2} \quad (\text{V.18})$$

и соответствующие *макроскопические конформные параметры плазмы*, которые остаются постоянными на ультрарелятивистской стадии расширения:

$$\mathcal{T} = a(t)T - \text{температура}; \quad (\text{V.19})$$

$$\mathcal{N} = a^3(t)n - \text{концентрации частиц}; \quad (\text{V.20})$$

$$\mathcal{E} = a^4(t)\varepsilon - \text{плотность энергии}. \quad (\text{V.21})$$

Кинетические уравнения для плазмы в расширяющейся однородной Вселенной с участием  $X$ -бозонов запишем в символическом виде [195]:

$$\frac{1}{a} \sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{P}^2} \frac{\partial f_X}{\partial t} = \sum I_{X \rightarrow \bar{q}q'} + \sum I_{X \rightarrow ql}; \quad (\text{V.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{Q}^2} \frac{\partial f_F}{\partial t} = & \sum I_{X \rightarrow FF'} + \sum^{(2)} I_{FF' \rightarrow \dots} \\ & + (\text{другие взаимодействия}), \end{aligned} \quad (\text{V.23})$$

где  $f_a(P, t)$  - числа заполнения,  $F$  - индекс фермионов,  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$  - конформные импульсы  $X$ -бозонов и фермионов, соответственно. Выражение «другие взаимодействия» в (V.23) означает интеграл столкновений для всех остальных взаимодействий, не нарушающих сохранение барионного и лептонного зарядов: кварко-глюонных, лептонных и кварковых распадов  $W$ - и  $X$ -бозонов, аннигиляции и т.п. Все эти реакции протекают в условиях ЛТР и приводят к установлению теплового равновесия кварков и лептонов.

Интегралы взаимодействий частиц запишем в релятивистски - инвариантном виде [50]:

$$I_a(x, P_a) = - \sum_{f,i} \int \delta^{(4)}(P_f - P_i) (Z_{fi} W_{if} - Z_{if} W_{if}) \prod_{f,i} d\pi, \quad (\text{V.24})$$

где суммирование проводится по всем начальным,  $i$ , и конечным,  $f$ , состояниям частиц, интегрирование ( $d\pi'$ ) проводится по всем 4-х мерным импульсным пространствам, кроме пространства  $a$ -й частицы,  $W_{fi}$  и  $W_{if}$  - соответствующие инвариантные матрицы рассеяния, которые связаны с инвариантными амплитудами рассеяния  $M_{if}$  формулами [61]:

$$W_{fi} = (2\pi)^4 |M_{fi}|^2 \cdot 2^{-(N_i + N_f)} \quad (\text{V.25})$$

-  $N_i$  и  $N_f$  - числа частиц в начальном и конечном состояниях. В формулах (V.39) введены произведения состояний:

$$Z_{fi} = \prod_f f_f \prod_i (1 \pm f_i); \quad Z_{if} = \prod_i f_i \prod_f (1 \pm f_f), \quad (\text{V.26})$$

где знак «-» относится к фермионам, «+» - к бозонам. Инвариантные элементы объемов импульсных пространств равны:

$$d\pi_a = \frac{\rho_a \sqrt{-g} d^4 P_a}{(2\pi\hbar)^3} \delta\left((P_a, P_a) - \frac{m_a^2 c^2}{2}\right),$$

где  $\rho_a$  - статистический фактор вырождения.

Далее, поскольку реакции (V.7), (V.12) протекают при очень высоких температурах  $T \gtrsim 10^{14}$  Гэв, все фермионы можно с очень большой степенью точности считать ультрарелятивистскими, следовательно:

$$f_{F_a} = [\exp(-\lambda_a + \mathcal{Q}/\mathcal{T}) + 1]^{-1}, \quad (\text{V.27})$$

где конформная температура  $\mathcal{T} = aT$ , постоянна в ультрарелятивистской равновесной плазме, а *приведенные* химические потенциалы

$$\lambda_a = \frac{\mu_a}{T}$$

удовлетворяют серии условий химического равновесия, соответствующим реакциям, протекающим в условиях ЛТР. Комбинируя алгебраические уравнения, соответствующие этим условиям, можно прийти к следующему выводу: химические потенциалы каждого типа кварка не зависят от цвета и аромата. Таким образом, остается всего 4 независимых химических потенциала, которые для простоты, следуя [189], обозначим символами самих частиц -  $u, d, e, \nu$ :

$$u = \lambda_{q_u}; \quad d = \lambda_{q_d}; \quad e = \lambda_{l_e}; \quad \nu = \lambda_{l_\nu}, \quad (\text{V.28})$$

причем для них, как для ультрарелятивистских частиц в условиях ЛТР, выполняется известное условие антисимметричности:

$$\bar{\lambda}_a = -\lambda_a. \quad (\text{V.29})$$

В случае, когда масса покоя нейтральных лептонов,  $m_\nu$  равна нулю, то и их химический потенциал равен нулю:  $\nu = 0$ , как химический потенциал безмассовых частиц, находящихся в термодинамическом равновесии<sup>4</sup>. В этом случае остается всего три независимые величины:  $u, d, e$ .

## V.4 Кинетические уравнения для фермионов

При выполнении условий химического равновесия последний член в правой части (V.23) обращается в нуль. Второй же член в правой части (V.23) описывает все реакции, протекающие с нарушением  $CP$ -инвариантности, в которых участвуют кварки, лептоны и виртуальные  $X$ -бозоны. Поскольку эти интегралы полностью определяются равновесными функциями распределения кварков, лептонов и других частиц, то пользуясь *функциональными уравнениями Больцмана* [50]

$$Z_{fi} - Z_{if} = 0 \Rightarrow \sum_i \lambda - \sum_f \lambda' = 0, \quad (\text{V.30})$$

---

<sup>4</sup>см., например, [60].

#### V.4. Кинетические уравнения для фермионов

фермионные интегралы взаимодействий можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sum I_{FF' \rightarrow \dots} &= - \sum \int d\pi_F d\pi_{F'} d\pi_{F''} f_F f_{F'} \times \\ &\times \int \prod d\pi_k (1 \pm f_k) (W_{FF' \rightarrow \dots} - \bar{W}_{\bar{F}\bar{F}' \rightarrow \dots}). \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

Для вычисления этих интегралов нет необходимости конкретизации вероятностей многочастичных переходов  $W$  и  $\bar{W}$ , - достаточно воспользоваться оптической теоремой, являющейся следствием унитарности  $S$ -матрицы, [189], [143]:

$$\sum_k \int \prod d\pi_k (1 \pm f_k) (W_{if} - W_{fi}) = 0, \quad (\text{V.32})$$

где суммирование проводится по всем *конечным* состояниям реакций  $FF' \rightarrow \dots$ . Итак, вследствие оптической теоремы получим равенство:

$$\sum'_{X, F'} (1 + f_X) (W_{X \rightarrow \bar{F}\bar{F}} - W_{\bar{X} \rightarrow FF'}) d\pi_k + \sum'_k (1 \pm f_k) (W_{FF' \rightarrow \dots} - W_{\bar{F}\bar{F}' \rightarrow \dots}) d\pi_k = 0. \quad (\text{V.33})$$

Используя этот результат в уравнениях (V.23) и интегрируя их по пространству импульсов фермионов, получим уравнения, которые в дальнейшем используем для определения химических потенциалов фермионов:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}_F}{dt} &= a(t) \sum'_{\bar{X}, F'} \int W_{X \rightarrow FF'} d\pi_X d\pi_F d\pi_{F'} \times \\ &\times [f_X (1 - f_F) (1 - f_{F'}) - (1 + f_X) f_F f_{F'}]. \end{aligned} \quad (\text{V.34})$$

Последние уравнения можно еще упростить, учитывая соотношения, справедливые для равновесных фермионных функций распределения (V.27):

$$\int d\pi_F d\pi_{F'} \delta^{(4)}(p_X - p_F - p_{F'}) f_F f_{F'} = \frac{1}{2^3 \pi^5} f_X^0(F + F') \beta(F, F'); \quad (\text{V.35})$$

$$\int d\pi_F d\pi_{F'} \delta^{(4)}(p_X - p_F - p_{F'}) (1 - f_F) (1 - f_{F'}) = \frac{1}{2^3 \pi^5} [1 + f_X^0(F + F')] \beta(F, F'), \quad (\text{V.36})$$

где введены обозначения [195]:

$$\begin{aligned} f_X^0(F + F') &= [\exp(-\lambda_F - \lambda_{F'} + E_X/T) - 1]^{-1}; \\ \beta(F, F') &= \beta(F', F) = \beta(F) + \beta(F'); \end{aligned} \quad (\text{V.37})$$

$$\beta(F) = \frac{T}{p} \ln \frac{1 + \exp(-\lambda_F + p_+/T)}{\exp(p/2T) [1 + \exp(-\lambda_F + p_-/T)]},$$

и

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(E \pm p); \quad E = E_X = \sqrt{m_X^2 + p^2}. \quad (\text{V.38})$$

Функция  $\beta(F, F')$  является статистическим фактором, в больцмановской статистике ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) равным  $1/2$ . Аргументы  $\mathbb{P}$  и  $t$  функций  $f_X^0$  и  $\beta$  для краткости опущены. Там, где это потребуется, будем писать подробно:

$$f_X^0(x; \mathbb{P}, t); \quad \beta(x, \mathbb{P}, t).$$

С учетом (V.35), (V.36) уравнения (V.34) существенно упрощаются:

$$\frac{d\mathcal{N}_F}{dt} = a(t) \sum'_{X, F} \frac{\rho_X}{(2\pi)^3} |M_{X \rightarrow FF'}|^2 \int_0^\infty \frac{p^2 [f_X - f_X^0(F + F')] \beta(F, F') dp}{\sqrt{m_X^2 + p^2}}. \quad (\text{V.39})$$

Суммирование в (V.39) проводится по всем  $X$ -бозонам, причем в кварк - кварковых каналах сумма цветов двух кварков дополнительна к цвету  $X$ -бозона, таким образом, в сумме каждому типу  $X$ -бозона соответствует два слагаемых.

## V.5 Кинетические уравнения для $X$ - бозонов

Для  $X$ -бозонов оптическая теорема принимает вид:

$$\sum_{F, F'} d\pi_F d\pi_{F'} (1 - f_F)(1 - f_{F'}) (W_{x \rightarrow \bar{F}\bar{F}'} - W_{\bar{X} \rightarrow FF'}) = 0 \quad (\text{V.40})$$

и, таким образом, бозонные уравнения можно записать в виде:

$$\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2} \frac{\partial f_X}{\partial t} = -\frac{a(t)}{4\pi} \sum_{F, F'} |M_{X \rightarrow \bar{F}\bar{F}'}|^2 \beta(F, F') [f_X - f_X^0(F + F')]. \quad (\text{V.41})$$

Обратим внимание на тот важный и *строгий* факт, что кинетические уравнения для  $X$ -бозонов становятся линейными дифференциальными уравнениями. Уравнения для античастиц получаются из (V.39), (V.41) инверсией начеркнутых индексов частиц - античастиц.

Если полагать, что спонтанное нарушение  $SU(5)$ -симметрии произошло на очень ранних стадиях космологической эволюции, когда еще  $X$ -бозоны были ультрарелятивистскими, то указанную систему кинетических уравнений (V.39), (V.41) необходимо решать с начальными условиями, соответствующими изначальному глобальному термодинамическому равновесию и изначальной барионной и лептонной симметрии:

$$\lambda_a|_{t=0} = 0; \quad f_X(\mathbb{P}, 0) = f_0^0(0) = [\exp(\mathbb{P}/\mathcal{T}_0) - 1]^{-1}, \quad (\text{V.42})$$

где:

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}(0) = \left( \frac{45}{16\pi^3 N} \right)^{1/4}. \quad (\text{V.43})$$

## V.6. Законы сохранения

Из (V.41) видно, что бозонные функции находятся в квадратурах [?], [194]. Эти уравнения в стандартной математической записи имеют вид:

$$\dot{f}_i + f_i A_i(t) = Y_i(t), \quad (\text{V.44})$$

точка здесь и далее обозначает производную по времени,  $i, k$  - теперь индексы  $X$ -бозонов, а векторы  $A$  и  $Y$  определяются соотношениями:

$$A_i(\mathbb{P}, t) = \frac{a(t)}{4\pi\sqrt{m_i^2 a^2(t) + \mathbb{P}_i^2}} \sum_k |M_{X_i \rightarrow F, F'}|^2 \beta(F, F'); \quad (\text{V.45})$$

$$Y_i(\mathbb{P}, t) = \frac{a(t)}{4\pi\sqrt{m_i^2 a^2(t) + \mathbb{P}_i^2}} \sum_k |M_{X_i \rightarrow F, F'}|^2 \beta(F, F') f_X^0(F + F'), \quad (\text{V.46})$$

- суммирование в (V.45), (V.46) проводится по всем каналам реакций, по которым распадается данный  $X$ -бозон.

Решая уравнения (V.44) с начальными условиями (V.42), (V.43), получим решения для бозонных функций в квадратурах:

$$\begin{aligned} f_X(\mathbb{P}, t) = & f_X(\mathbb{P}, 0) \exp\left(-\int_0^t A_i(\mathbb{P}, t') dt'\right) + \\ & \exp\left(-\int_0^t A_i(\mathbb{P}, t') dt'\right) \int_0^t \exp\left(\int_0^{t'} A_i(\mathbb{P}, t'') dt''\right) Y_i(\mathbb{P}, t'') dt''. \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

Подстановка найденного решения для бозонных функций распределения в кинетические уравнения для фермионов (V.39) приводит к замкнутой системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений на химические потенциалы.

## V.6 Законы сохранения

В полной кинетической модели Вселенной к уравнениям (V.39), (V.41) необходимо добавить уравнения, определяющие эволюцию температуры и масштабного фактора. Первое из этих уравнений получается интегрированием кинетических уравнений (V.22), (V.23) с весом  $E_i$  и последующим суммированием [196]:

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{a} \sum_X m_X (\mathcal{K}_X + \mathcal{K}_{\bar{X}}), \quad (\text{V.48})$$

где  $\mathcal{E}$  - суммарная конформная плотность энергии:

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2 N' \mathcal{T}^4}{30} + \sum_X \frac{\rho_X}{2\pi^2} \int_0^\infty f_X \mathbb{P}^2 \sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{P}^2} d\mathbb{P}, \quad (\text{V.49})$$

$$\mathcal{K}_X = \frac{a m_X \rho_X}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{f_X \mathbb{P}^2}{\sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{P}^2}} d\mathbb{P}, \quad (\text{V.50})$$

где  $N'$  - число степеней свободы  $SU(5)$ -модели без учета  $X$ -бозонов:

$$N' = N - N_X,$$

т.е., в стандартной  $SU(5)$ -модели  $N' = 185 - 53 = 132$ . Уравнение же, определяющее эволюцию масштабного фактора, есть уравнение Эйнштейна, в котором можно положить  $k = 0$ , учитывая, что мы рассматриваем очень раннюю Вселенную  $t \rightarrow 0$ :

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3} \mathcal{E}. \quad (\text{V.51})$$

Уравнения (V.39), (V.41), (V.48), (V.51) совместно с определениями (V.49), (V.50) и начальными условиями (V.42), (V.43) являются полной системой уравнений, описывающих динамику бариогенезиса. Рассмотрим некоторые *строгие* следствия этих уравнений.

1. Допустим, что  $X$ -бозоны находятся в тепловом равновесии, т.е., не обращая внимания на кинетические уравнения для  $X$ -бозонов (V.41), положим в (V.39)

$$f_X = f_X^0(\lambda_X) = \left[ \exp \left( -\lambda_X + \frac{\sqrt{a^2 m_X^2 + \mathbb{P}^2}}{\mathcal{T}} \right) - 1 \right]^{-1},$$

где  $\lambda_X = -\lambda - \lambda'$ . Тогда точным решением уравнений (V.39), отвечающим начальным условиям (V.42) будет:

$$\mathcal{N}_a = \text{Const}; \quad \lambda_a = 0, \quad (\text{V.52})$$

- т.е., в условиях статистического равновесия  $X$ -бозонов бариогенезис не протекает.

2. Предположим, что взаимодействия  $CP$ -инвариантны, т.е.:

$$W_{X \rightarrow \bar{F}, \bar{F}'} = W_{\bar{X} \rightarrow FF'}.$$

В этом случае из (V.39), (V.41) опять-таки следует (V.52). Таким образом, и в случае  $CP$ -инвариантности взаимодействий бариогенезис не протекает.

3. Проинтегрируем кинетические уравнения для  $X$ -бозонов (V.41) по пространству импульсов и комбинируя этот результат с уравнениями (V.39) с учетом начальных условий (V.42) получим два *строгих* следствия:

$$\sum_{A,C} \left( -\frac{4}{3} \Delta n_{-4/3} - \frac{1}{3} \Delta n_{-1/3} \frac{2}{3} \Delta n_{2/3} + \frac{2}{3} \Delta n_\alpha - \frac{1}{3} \Delta n_\kappa - \Delta n_e \right) = 0 \quad (\text{V.53})$$

- закон сохранения электрического заряда ( $\sum e_a n_a = 0$ ) и

$$\sum_{A,C} \left[ -\frac{2}{3} \left( \Delta n_{-4/3} + \Delta n_{-1/3} + \Delta n_{2/3} \right) + \frac{1}{3} \left( \Delta n_\alpha + \Delta n_\kappa \right) - \Delta n_e - \Delta n_\nu \right] = 0 \quad (\text{V.54})$$

— закон сохранения разности барионного и лептонного зарядов, где введено обозначение:

$$\Delta n_a = n_a - \bar{n}_a. \quad (\text{V.55})$$

## V.7. Слабое нарушение зарядовой симметрии в стандартной $SU(5)$ модели

Суммирование в (V.53), (V.54) проводится по всем ароматам и цветам частиц.

4. Полагая теперь, что все  $X$ -бозоны распались, т.е., переходя к пределу  $t \rightarrow \infty$  и комбинируя соотношения (V.53), (V.54) с учетом условий симметричности (V.29) и обозначений (V.28), получим:

$$u(\infty) = 2d(\infty); u(\infty) = 2e(\infty) \Rightarrow d(\infty) = e(\infty). \quad (\text{V.56})$$

Из (V.56) следует, что по окончании распада  $X$ -бозонов на каждый избыточный заряженный лептон будет приходиться по одному избыточному катокварку и по два избыточных анокварка, что с учетом цветов даст один избыточный бесцветный барион на один лептон. Таким образом, конечный барионный заряд Вселенной будет равен ее лептонному заряду:

$$\Delta n_b(\infty) = \Delta n_e(\infty). \quad (\text{V.57})$$

Таким образом, для нахождения барионной асимметрии Вселенной достаточно определить лишь одну из трех величин:

$$u(\infty), \quad e(\infty), \quad d(\infty).$$

5. В простейшей модели бариогенезиса, когда  $CP$ -инвариантность нарушается лишь в каналах распада одного типа  $X$ -бозонов,  $X_{-4/3}$ , из (V.53), (V.54) строго следует соотношение во все времена процесса:

$$e(t) = d(t), \quad (\text{V.58})$$

и остается всего две независимые величины,  $u(t)$  и  $d(t)$ .

## V.7 Слабое нарушение зарядовой симметрии в стандартной $SU(5)$ модели

Пользуясь слабостью нарушения  $CP$ -симметрии

$$\Delta r = r - \bar{r} \lesssim 10^{-6}$$

и тем самым малостью химических потенциалов ( $\lambda_a \lesssim \Delta r \ll 1$ ), можно свести указанную выше систему интегро-дифференциальных уравнений к системе линейных интегро-дифференциальных уравнений. В данной работе мы рассмотрим простую модель бариогенезиса, в которой  $CP$ -инвариантность нарушена в каналах распада лишь одного типа бозонов,  $X$ -бозона. В этом случае уравнения (V.39), (V.41) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & \dot{f}_X + f_X \frac{a(t)S^2}{2\pi\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}} [\bar{r}\beta(d) + (1 - \bar{r})\beta(-u)] = \\ & = \frac{a(t)S^2}{2\pi\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}} [\bar{r}\beta(d)f_X^0(2d) + (1 - \bar{r})\beta(-u)f_X^0(-2u)]; \end{aligned} \quad (\text{V.59})$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathcal{N}}_\alpha &= \frac{2a(t)S^2 N_X}{3(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}^2 d\mathbb{P}}{\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}} \times \\ &\times \left\{ (1 - \bar{r})\beta(u)[f_{\bar{X}} - f_X^0(2u)] - (1 - r)\beta(-u)[f_X - f_X^0(-2u)] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{V.60})$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathcal{N}}_\kappa &= \frac{2a(t)S^2 N_X}{3(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}^2 d\mathbb{P}}{\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}} \times \\ &\times \left\{ r\beta(d)[f_{\bar{X}} - f_X^0(2d)] - \bar{r}\beta(-d)[f_{\bar{X}} - f_X^0(-2d)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{V.61})$$

Здесь выписаны отдельно уравнения для анокварков - (V.60), и катокварков -(V.61). При выводе этих уравнений учтено, что:

$$\beta(x, x) = 2\beta(x). \quad (\text{V.62})$$

Выпишем формулы для коэффициентов, входящих в эти уравнения в линейном по  $\Delta r, \lambda$  приближении. В нулевом приближении:

$$\beta(0) = \beta_0(\mathbb{P}, t), \quad (\text{V.63})$$

где:

$$\beta_0(\mathbb{P}, t) = \frac{T}{p} \ln \frac{1 + \exp(p_+/T)}{\exp(p/2T)[1 + \exp(p_-/T)]} \quad (\text{V.64})$$

и необходимо подставить:

$$\frac{p_\pm}{T} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2} \pm \mathbb{P}}{\mathcal{T}}. \quad (\text{V.65})$$

Далее:

$$f_X^0(\xi) = f_X^0(0; \mathbb{P}, t) + \xi \frac{\exp(E_X/T)}{[\exp(E_X/T) - 1]^2}, \quad (\text{V.66})$$

где:

$$f_X^0(0; \mathbb{P}, t) = [\exp(E_X/T) - 1]^{-1} \quad (\text{V.67})$$

и

$$\frac{E_X}{T} = \frac{\sqrt{a^2(t)m_X^2 + \mathbb{P}^2}}{\mathcal{T}}.$$

Интегрируя кинетические уравнения для X-бозонов (V.59) с начальными условиями (V.42) в линейном по  $\Delta r, \lambda$  приближении найдем:

$$f_X(\mathbb{P}, t) = f_X^0(0; \mathbb{P}, 0) + \delta f_0(\mathbb{P}, t) + \delta f(\lambda), \quad (\text{V.68})$$

V.7. Слабое нарушение зарядовой симметрии в стандартной  $SU(5)$  модели

где  $\delta f(\lambda)$  - линейный по  $\lambda$  функционал, вследствие чего:

$$\delta(-\lambda) = \delta(\lambda), - \quad (V.69)$$

он не вносит вклад в окончательный результат; а  $\delta f$  - отклонение от равновесия функции распределения:

$$\delta f_0(\mathbb{P}, t) = -e^{-\Phi(\mathbb{P}, t)} \int_0^t e^{\Phi(\mathbb{P}, t')} \dot{f}_0(0; \mathbb{P}, t') dt' \quad (V.70)$$

- отклонение от равновесия бозонной функции распределения в симметричной плазме  $\lambda = 0$ , и введено обозначение:

$$\Phi(\mathbb{P}, t) = \frac{1}{\tau_0} \int_0^t \frac{a(t') \beta_0(\mathbb{P}, t') dt'}{\sqrt{a^2(t') + \mathbb{P}^2/m_X^2}}; \quad (V.71)$$

$\tau_0$  - собственное время распада свободного X-бозона:

$$\tau_0 = \frac{4\pi m_X}{s^2} \sim \frac{3}{2} (m_X \alpha)^{-1}. \quad (V.72)$$

Поскольку фермионы находятся в состоянии ЛТР и являются ультрарелятивистскими, их концентрации равны:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{\exp(-\lambda + \mathbb{P}/\mathcal{T}) - 1} \mathbb{P}^2 d\mathbb{P}. \quad (V.73)$$

В условиях слабого нарушения  $CP$  - инвариантности, когда  $\lambda_a \ll 1$  получим отсюда приближенно, разлагая по степеням малости  $\lambda$  :

$$\mathcal{N} \approx \frac{3}{2} \frac{\mathcal{T}^3 \zeta(3)}{\pi^2} + \lambda \frac{\mathcal{T}^3}{6} \Rightarrow \Delta N_a \approx \lambda_a \frac{\mathcal{T}^3}{3}. \quad (V.74)$$

В стандартной  $SU(5)$  модели вероятности распада X-бозона в лептонном, ( $qe$ ), и кварковом, ( $\bar{q}\bar{q}$ ), каналах одинаковы<sup>5</sup>, т.е.:

$$1 - 2r = O^1(\Delta r). \quad (V.75)$$

С учетом этого фактора и соотношения (V.74) в стандартной  $SU(5)$  модели из уравнений для анокварков- (V.60), и катокварков -(V.61) можно получить одно замкнутое уравнение первого порядка на величину  $B = u + 2d$ , т.е., на избыточную концентрацию барионов

$$\Delta \mathcal{N}_B = \frac{1}{3} \mathcal{N}_B \mathcal{T}^3 : \quad (V.76)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathcal{N}_B + \Delta \mathcal{N}_B \frac{2N_X}{\pi^2 \mathcal{T}^3} \int_0^\infty \mathbb{P}^2 \dot{\Phi} f_0 \beta_0 d\mathbb{P} = \frac{2\Delta r N_X}{3\pi^2} \int_0^\infty \mathbb{P}^2 \dot{\Phi} \beta_0 \delta f_0 d\mathbb{P},$$

<sup>5</sup>с учетом цветов и ароматов

интегрируя которое с учетом начальных условий (V.42), найдем:

$$\Delta\mathcal{N}_B(\infty) = \frac{4\Delta r N_X}{3\pi^2} \int_0^\infty \exp\left(-\int_t^\infty \Psi(t') dt'\right) G(t) dt, \quad (\text{V.77})$$

где

$$\Psi(t) = \frac{2N_X}{\pi^2 \mathcal{T}^3} \int_0^\infty \mathbb{P}^2 \dot{\Phi} f_0 \beta_0 d\mathbb{P}, \quad (\text{V.78})$$

$$G(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \mathbb{P}^2 \dot{\Phi} \delta f_0 d\mathbb{P}. \quad (\text{V.79})$$

Остается теперь вычислить величину  $\delta_S = \delta n_B / S$ , где плотность энтропии ультрарелятивистского газа равна:

$$S = \frac{2\pi^2}{45} NT^3 \Rightarrow \mathcal{S} = \frac{2\pi^2}{45} N\mathcal{T}^3. \quad (\text{V.80})$$

Тем самым задача формально решена. Следует отметить, что в отличие от работ [190]-[192], в которых функция распределения  $X$ -бозонов моделировалась квазигидродинамическим распределением и находилась путем численного интегрирования кинетических уравнений, здесь функция распределения  $X$ -бозонов находится строгим интегрированием кинетических уравнений, и  $B(\infty)$  определяется в квадратурах:

$$\delta_S = \frac{\Delta\mathcal{N}_B}{\mathcal{S}}. \quad (\text{V.81})$$

## V.8 Исследование решения

В дальнейшем будем полагать, что, во-первых,  $X$ -бозоны распадаются, в основном, на промежуточных стадиях расширения, когда  $T \sim m_X$ , и, во-вторых, что доля  $X$ -бозонов достаточно мала, по сравнению с общим числом частиц:  $N_X \ll N$ , так что с достаточной степенью точности космологическую плазму на стадии распада  $X$ -бозонов можно считать ультрарелятивистской. Это дает нам законы изменения масштабного фактора и температуры со временем:

$$a(t) = a_0 \sqrt{t}; \quad T = \mathcal{T}_0 \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad (\text{V.82})$$

где  $\mathcal{T}_0$  (см. (V.43)) есть температура плазмы в планковских единицах на планковский же момент времени:

$$\mathcal{T}_0 = \left( \frac{45}{16\pi^3 N} \right)^{1/4}. \quad (\text{V.83})$$

## V.9. Функция $\Phi$ в больцмановском приближении

Исследуем полученное в предыдущем разделе линейное решение, для чего перейдем от переменных  $t, p$  к новым переменным  $\eta, \xi$ :

$$t = \tau_0 \eta; \quad (V.84)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\eta}} m_X \xi; \quad \Rightarrow \mathbb{P} = m_X \xi \sqrt{\tau_0}. \quad (V.85)$$

где  $\tau_0$  - собственное время распада свободного X-бозона (V.72), таким образом значению безразмерного времени  $\eta = 1$  соответствует время  $t = \tau_0$ . Введем далее безразмерный параметр  $\sigma$  [195], зависящий от констант полевой теории<sup>6</sup>:

$$\sigma = \frac{m_X}{T(\tau_0)} = \frac{m_X \sqrt{\tau_0}}{\mathcal{T}_0} = \frac{\chi \sqrt{m_X}}{\sqrt{\alpha} \mathcal{T}_0}, \quad (V.86)$$

равный отношению массы X-бозона к температуре на момент его полураспада, где  $\chi$  - безразмерный параметр порядка 1, зависящий от параметров полевой теории,  $\alpha$  - константа взаимодействия (от 0.1 до 0.01).

Тогда получим выражения:

$$\frac{p}{T} = \sigma \xi; \quad \frac{E}{T} = \sigma \sqrt{\eta + \xi^2}; \quad \frac{p_{\pm}}{T} = \sigma (\sqrt{\eta + \xi^2} \pm \xi); \quad (V.87)$$

$$f_0(t, \mathbb{P}) = \left[ 1 + \exp(\sigma \sqrt{\eta + \xi^2}) \right]^{-1}; \quad (V.88)$$

$$\beta_0(\mathbb{P}, t) = \beta_0(\xi, \eta, \sigma) =$$

$$\frac{1}{\xi \sigma} \ln \frac{1 + \exp(\sigma/2(\sqrt{\eta + \xi^2} + \xi))}{\left[ 1 + \exp(\sigma/2(\sqrt{\eta + \xi^2} - \xi)) \right] \exp(\sigma \xi/2)}. \quad (V.89)$$

## V.9 Функция $\Phi$ в больцмановском приближении

Как показали проведенные исследования, конечные результаты вычислений весьма слабо чувствительны к учету статистических факторов при вычислении функции  $\Phi(\eta, \xi)$ , тогда как в тоже время они весьма чувствительны к учету статистических факторов на других этапах вычислений. Поэтому в дальнейшем функцию  $\Phi(\eta, \xi)$  мы будем вычислять в больцмановском приближении, в то время как на других этапах вычислений будем удерживать статистические факторы. Тогда в больцмановском приближении  $\beta_0 \approx 1/2$ , и мы получим для функции  $\Phi$ :

$$\dot{\Phi}(\mathbb{P}, t) = \frac{1}{2\tau_0} \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \quad (V.90)$$

и:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\eta} \sqrt{\eta + \xi^2} - \xi^2 \ln \frac{\sqrt{\eta} + \sqrt{\eta + \xi^2}}{\xi} \right), \quad (V.91)$$

<sup>6</sup>Введенный в [195] параметр  $\sigma$  равен квадрату  $\sigma$ , используемого в настоящей работе.

Вследствие (V.90)  $G(\eta, \xi)$  - неотрицательная монотонно возрастающая функция:

$$\Phi(\eta, \xi) \geq 0; \quad \frac{\partial \Phi(\eta, \xi)}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \geq 0, \quad (\text{V.92})$$

причем

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \Phi(\eta, \xi) = 0. \quad (\text{V.93})$$

## V.10 Отклонение X-бозонов от равновесия

Подставляя функцию  $\Phi(\xi, \eta)$  в форме (V.91) в выражение (V.70) для отклонения функции распределения X-бозонов от равновесия и переходя к переменным (V.84), (V.85), получим:

$$\delta f_0(\xi, \eta, \sigma) = \frac{1}{2} \sigma \times \exp(-\Phi(\xi, \eta)) \int_0^\eta \frac{\exp(\Phi(\xi, \eta') + \sigma \sqrt{\eta' + \xi^2}) d\eta'}{[1 + \exp(\sigma \sqrt{\eta' + \xi^2})]^2 \sqrt{\eta' + \xi^2}}. \quad (\text{V.94})$$

В этом разделе мы проведем прямое численное интегрирование ряда введенных нами функций с помощью средств пакета символьной математики Maple для исследования свойств полученного решения. На Рис. 4 - 6 - результаты численного интегрирования выражения (V.94) для плотности отклонения X-бозонов от равновесия,  $\xi^2 \delta f$  для  $\delta f/f_0$ , в зависимости от времени,  $\eta$ , и импульса,  $\xi$  [196].

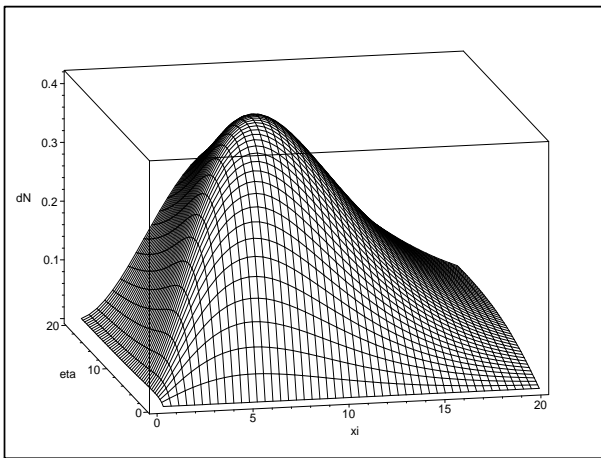


Рис.4. Плотность числа неравновесных X-бозонов  $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$  при  $\sigma = 0,3$ .

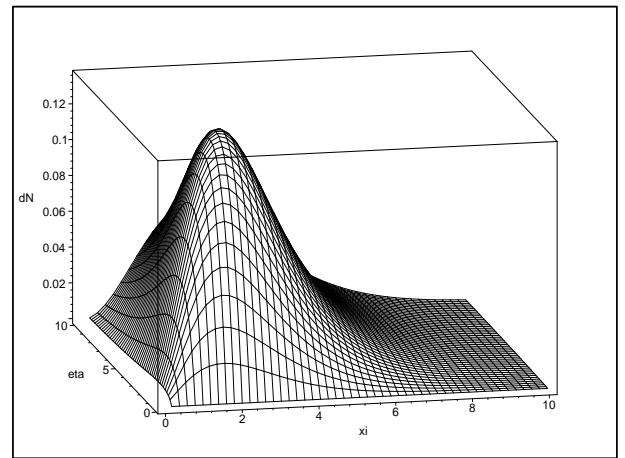


Рис.5. Плотность числа неравновесных X-бозонов  $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$  при  $\sigma = 1$ .

## V.11. Преобразование к безразмерным переменным

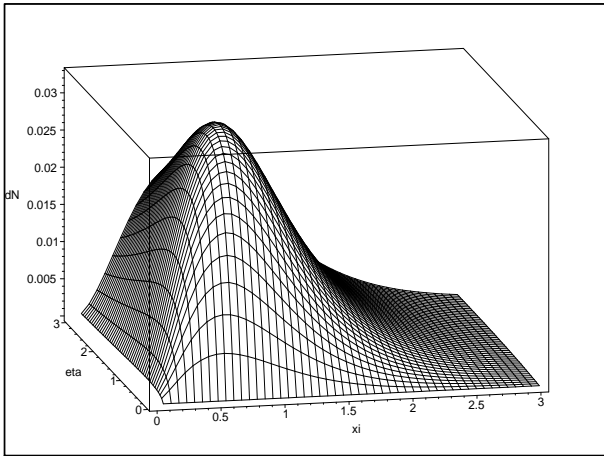


Рис.6. Плотность числа неравновесных X-бозонов  $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$  при  $\sigma = 3$ .

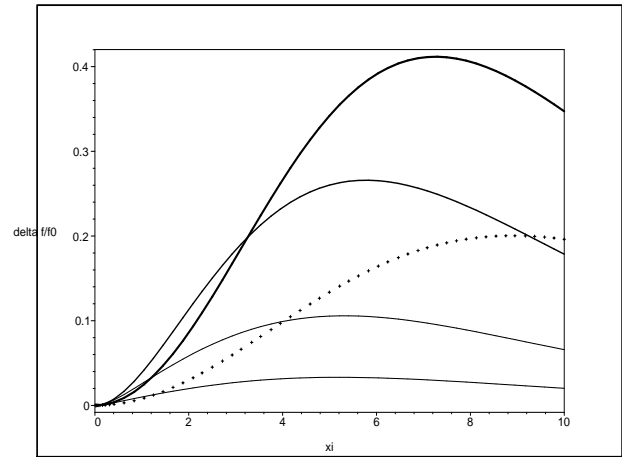


Рис.7. Эволюция плотности числа неравновесных X-бозонов  $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$  при  $\sigma = 0.3$ . Тонкая линия -  $\eta = 0.3$ , средняя -  $\eta = 1$ , жирная -  $\eta = 3$ , самая жирная -  $\eta = 10$ , пунктирная -  $\eta = 30$ .

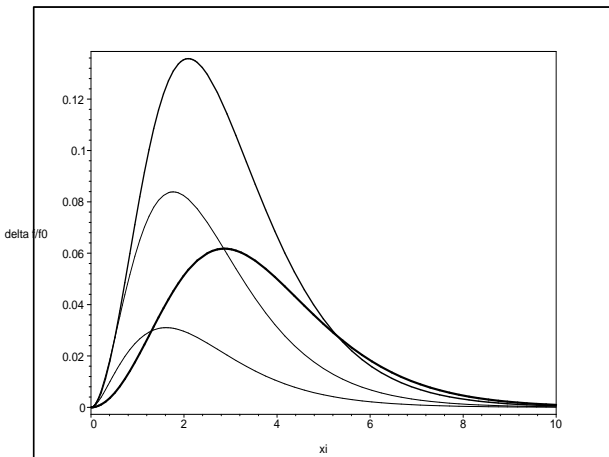


Рис.8. Эволюция плотности числа неравновесных X-бозонов  $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$  при  $\sigma = 1$ . Тонкая линия -  $\eta = 0.3$ , средняя линия -  $\eta = 1$ , жирная линия -  $\eta = 3$ , самая жирная линия -  $\eta = 10$ .

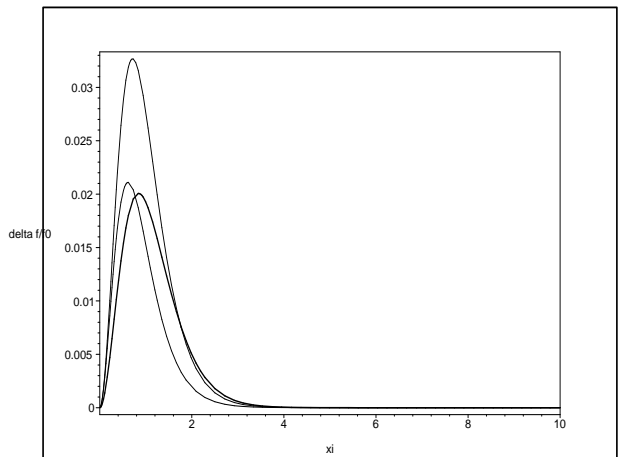


Рис.9. Эволюция плотности числа неравновесных X-бозонов  $dN = \xi^2 \delta f(\xi, \eta, \sigma)$  при  $\sigma = 3$ . Тонкая линия -  $\eta = 0.3$ , средняя линия -  $\eta = 1$ , жирная линия -  $\eta = 3$ .

## V.11 Преобразование к безразмерным переменным

Используя выражение для конечной концентрации барионов (V.77), а также выражение для плотности энтропии (V.81), получим искомое выражение для конечной плотности

удельной энтропии, приходящейся на один барион:

$$\delta_S = \frac{N_b(\infty)}{S} = \frac{30\Delta r \mathcal{N}_X}{\pi^4 \mathcal{T}^3 \mathcal{N}} \int_0^\infty \exp\left(-\int_t^\infty \Psi(t') dt'\right) G(t) dt, \quad (\text{V.95})$$

где функции  $\Psi(t)$ ,  $G(t)$  и  $\delta f(\mathbb{P}, t)$  определяются выражениями (V.78), (V.80) и (V.70), соответственно. В соответствии с формулами (V.84), (V.85) перейдем от временной переменной  $t$  и импульсной  $\mathbb{P}$  к безразмерным временной переменной  $\eta$  и импульсной переменной  $\xi$  и выберем нормировку масштабного фактора на ультрарелятивистской в целом стадии расширения (V.82).

Таким образом, переходя к новым переменным, получим выражение для удельной энтропии:

$$\delta_S = \frac{15\Delta r \mathcal{N}_X}{2\pi^6 \mathcal{N}} \sigma^3 \int_0^\infty d\eta e^{-\Theta(\eta)} \sqrt{\eta} \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \delta f(\eta, \xi), \quad (\text{V.96})$$

где

$$\Theta(\eta) = \int_t^\infty \Psi(t) dt.$$

Так как  $\dot{\Phi} \geq 0$ , то и  $\Psi(t) > 0$ , таким образом,  $\Theta(\eta)$  - неотрицательная монотонно убывающая функция:

$$\frac{d\Theta}{d\eta} \leq 0. \quad (\text{V.97})$$

При этом:

$$\delta f(\eta, \xi) = e^{-\Phi(\eta, \xi)} \int_0^\eta d\eta' e^{\Phi(\eta', \xi)} \frac{\partial}{\partial \eta'} \frac{1}{e^{\sigma \sqrt{\eta' + \xi^2}} - 1}. \quad (\text{V.98})$$

## V.12 Функции $\Psi(t)$ и $\Theta(t)$

Переходя к новым переменным, получим при бoльцмановской аппроксимации функции  $\Phi(x)$  (V.91) выражение для функции  $\Psi(\eta)$ , в котором уже учтен статистический фактор:

$$\Psi(\eta) = \frac{\sqrt{\eta} N_X \sigma^3}{2\pi^2 \tau_0} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\sigma \sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \quad (\text{V.99})$$

Введем новые переменные  $x$  и  $z$ :

$$\xi = \sqrt{\eta} \text{sh}(x), \quad z = \sigma \sqrt{\eta}. \quad (\text{V.100})$$

V.12. Функции  $\Psi(T)$  и  $\Theta(T)$

Тогда получим:

$$\Psi(\eta) = \frac{N_X}{\pi^2 \tau_0} z^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 t dt}{e^{z \text{ch} t} - 1}.$$

Вычисляя интеграл  $\int \Psi dt$  и меняя порядок интегрирования в полученном выражении, найдем:

$$\Theta(\eta) = \int_t^\infty \Psi(t') dt' = \frac{2N_X}{\pi^2 \sigma^2} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^5 x} dx \int_{\sqrt{\eta} \sigma \text{ch} x}^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} d\nu. \quad (\text{V.101})$$

В частности, проводя интегрирование по всему интервалу значений  $t$ , получим произведение интегралов:

$$\Theta(0) = \int_0^\infty \Psi(t') dt' = \frac{2N_X}{\pi^2 \sigma^2} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^5 x} dx \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} d\nu,$$

один из них выражается через  $\zeta$ -функцию Римана:

$$\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

а другой вычисляется элементарно:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^5 x} dx = \frac{\pi}{16}.$$

В результате найдем:

$$\Theta(0) = \int_0^\infty \Psi(t') dt' = \frac{\pi^3 N_X}{120 \sigma^2}. \quad (\text{V.102})$$

Таким образом, можно записать:

$$\Theta(\eta) = \Theta(0) - \frac{2N_X}{\pi^2 \sigma^2} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^5 x} dx \int_0^{\sqrt{\eta} \sigma \text{ch} x} \frac{\nu^3}{e^\nu - 1} d\nu.$$

Внутренний интеграл можно выразить через функцию:<sup>7</sup>

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt.$$

---

<sup>7</sup>Функция  $D(x)$  связана с функциями Дебая (см., например, [91]).

Функция  $D(x)$  имеет следующие асимптотики:

$$D(x) \approx \begin{cases} 3 \sum_0^{\infty} \frac{B_n}{(n+3)n!} x^n, & x \lesssim 1; \\ \frac{\pi^4}{5x^3} - 3 \left( 1 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} \right) e^{-x}, & x \gg 1, \end{cases} \quad (\text{V.103})$$

где  $B_n$  - числа Бернулли. График функции  $D(x)$  показан на Рис. 10.

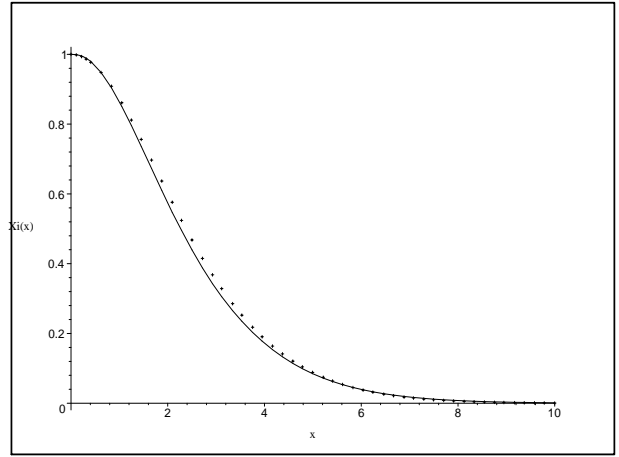
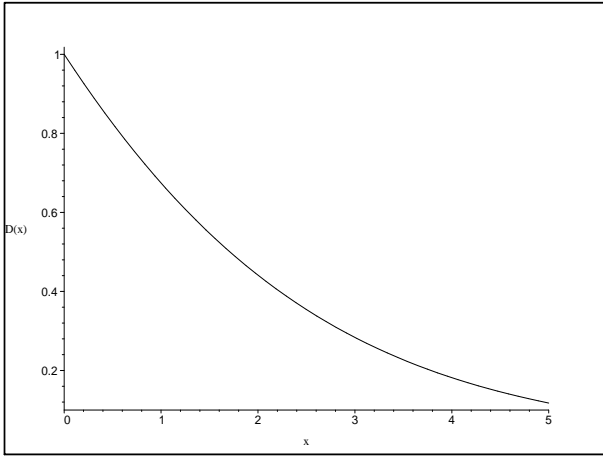


Рис.10. График функции  $D(x)$ , построенный с помощью пакета Maple на аппроксимациях вида (V.103).

Рис.11. График функции  $\Xi(x)$ . Точечными обозначен график экстраполирующей функции  $F(x)$  (V.106).

Таким образом, получим окончательно:

$$\Theta(\eta) = \frac{\pi^3 N_X}{120\sigma^2} \Xi(\sqrt{\eta}\sigma), \quad (\text{V.104})$$

где введена монотонно убывающая функция  $\Xi(x)$ :

$$\Xi(x) = 1 - \frac{80}{\pi^5} x^3 \int_0^{\infty} \text{th}^2 x D(x \text{ ch } z) dz, \quad (\text{V.105})$$

изменяющаяся на интервале

$$0 \geq \Xi(x) \leq 1.$$

Для вычислений с функциями  $D(x)$  и  $\Xi(x)$  Авторами была создана специальная библиотека в пакете символьной математики Maple, в которой определены процедуры быстрого вычисления этих функций с помощью их различных аппроксимаций. График функции  $\Xi(x)$  показан на Рис.11. На отрезке  $[0, 10]$  функция  $\Xi(x)$  хорошо экстраполируется функцией

$$F(x) = \frac{e^{-\alpha x^2}}{1 + \beta x^2} \quad (\text{V.106})$$

с параметрами  $\alpha = 0,05$ ,  $\beta = 0,09$ .

V.13. Отклонение от равновесия,  $\delta F(\eta, \xi)$

## V.13 Отклонение от равновесия, $\delta f(\eta, \xi)$

Перейдем теперь к вычислению функции  $\delta f(\eta, \xi)$ . Как нетрудно видеть, функция  $\Phi(\eta, \xi)$  является медленно меняющейся функцией, так как вследствие (V.92)

$$\Phi'_\eta < 1/2,$$

причем:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} e^{\Phi(\eta, \xi)} = 1,$$

и в широких пределах изменения переменных  $\eta, \xi$   $\exp(\Phi(\eta, \xi)) \approx 1$ . Временная же производная равновесной функции распределения имеет порядок:

$$\frac{f'_0}{f_0} = -\frac{\sigma}{2\sqrt{\eta + \xi^2}} \frac{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}}}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \quad (\text{V.107})$$

и бесконечно растет в области  $\sigma\sqrt{\eta + \xi^2} \rightarrow 0$ ; при больших же значениях этого аргумента эта производная мала. Таким образом, главный вклад в отклонение функции распределения от равновесия дают значения переменных  $\eta, \xi$  в области  $\sqrt{\eta + \xi^2} \lesssim \sigma^{-1}$ , в которой  $\exp(\Phi)$  можно считать примерно постоянной. Таким образом, проводя интегрирование по частям в (V.98), найдем приближенно:

$$\delta f(\eta, \xi) \simeq \frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \frac{e^{-\Phi(\eta, \xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1}. \quad (\text{V.108})$$

Подставляя эту функцию во внутренний интеграл (V.96) и вводя функцию:

$$\text{Df}(\eta, \sigma) = \sigma^2 \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \left[ \frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \frac{e^{-\Phi(\eta, \xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \right], \quad (\text{V.109})$$

получим:

$$\delta_S = \frac{15\Delta r \mathcal{N}_X}{2\pi^6 \mathcal{N}} \sigma \int_0^\infty d\eta e^{-\Theta(\eta)} \sqrt{\eta} \text{Df}(\eta, \sigma). \quad (\text{V.110})$$

Заметим, что введенная выше функция  $\text{Df}(\eta, \sigma)$  пропорциональна возмущенному следу тензора энергии-импульса  $X$  - бозонов:

$$\delta T_X = g_{ik} \delta T_X^{ik} = m_X^2 \int_{P(X)} \delta f_X dP.$$

Переходя к численному интегрированию в (V.110), заметим, что неудобные для численного интегрирования интегралы как раз содержатся в функции  $\text{Df}(\eta, \sigma)$ , - прямое применение численного интегрирования наталкивается на проблему расходимости. Поэтому первоначально интеграл (V.109) необходимо преобразовать к удобному для численного интегрирования виду. Для этого перепишем интеграл (V.109) в эквивалентной форме:

$$\text{Df}(\eta, \sigma) =$$

$$= \sigma^2 \left[ \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \left( \frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \right) + \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \frac{1 - e^{-\Phi(\eta, \xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \right].$$

Рассмотрим первую часть интеграла:

$$A = \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \left( \frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1} \right) \equiv$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \frac{1}{e^{\sigma\xi} - 1} - \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1}.$$

В первом интеграле сделаем подстановку  $\xi = \sqrt{\eta}x$ , а во втором -  $\xi = \sqrt{x^2 - 1}$ . Тогда получим:

$$A = \eta \left[ \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x} - 1} - \int_1^\infty \frac{\sqrt{\eta + x^2} dx}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x} - 1} \right].$$

Собирая эти интегралы вместе, получим:

$$A = \eta \left[ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x} - 1} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{\eta + x^2}} \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\eta}x} - 1} \right].$$

Преобразуем теперь часть  $B$  интеграла:

$$B = \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\eta + \xi^2}} \frac{1 - e^{-\Phi(\eta, \xi)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta + \xi^2}} - 1}.$$

Подставляя в этот интеграл выражение для  $\Phi(\eta, \xi)$  и производя подстановку  $\xi = \sqrt{\eta}x$ , преобразуем этот интеграл:

$$B = \eta \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\eta \left( \sqrt{1 + x^2} - x^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right)}}{e^{\sigma\sqrt{\eta}\sqrt{1 + x^2}} - 1}.$$

В этом интеграле сложности численного интегрирования возникают при  $\sigma\sqrt{\eta} \rightarrow 0$ . Разлагая экспоненту в ряд Тейлора при малых значениях  $\eta$ , получим приближенно:

$$B \approx \frac{1}{2}\eta^2 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{\sqrt{1 + x^2} - x^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}}{e^{\sigma\sqrt{\eta}\sqrt{1 + x^2}} - 1}.$$

Численное интегрирование этих выражений уже не встречает затруднений. С учетом сделанных выше замечаний автором в пакете Maple была создана библиотека специальных процедур ускоренного вычисления функции  $\text{Df}(\eta, \sigma)$  при любых значениях переменных. Графики функций  $\text{Df}(\eta, \sigma)$ , полученные с помощью этих процедур, показаны на Рис. 12.

## V.14. Результаты

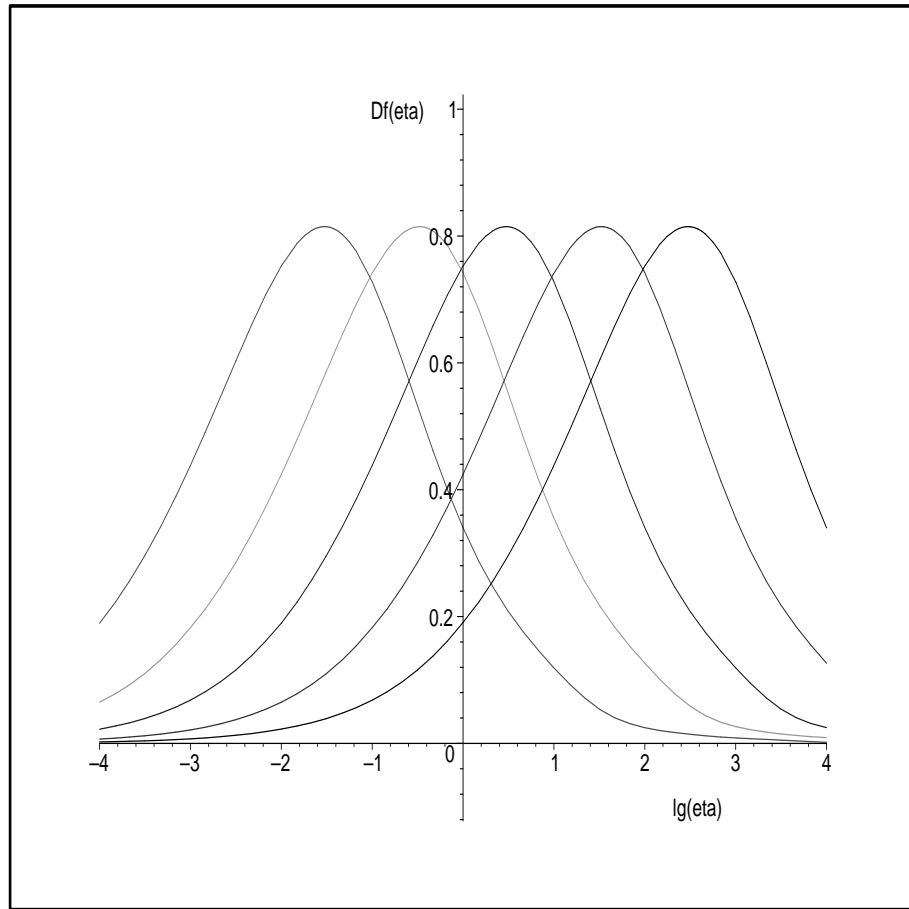


Рис.12.

Функции  $Df(\eta, \sigma)$  в зависимости от параметра  $\sigma$ . По оси абсцисс отложен  $\lg \eta$ . Слева направо:  $\sigma = 10, \sigma = 3, \sigma = 1, \sigma = 0,3, \sigma = 0,1$ .

## V.14 Результаты

Прежде, чем перейти к изложению результатов, произведем удобную нормировку функции  $\delta_S$ . Как отмечалось выше, в работах [185]-[187] была получена оценка удельной энтропии на один барион (V.5):

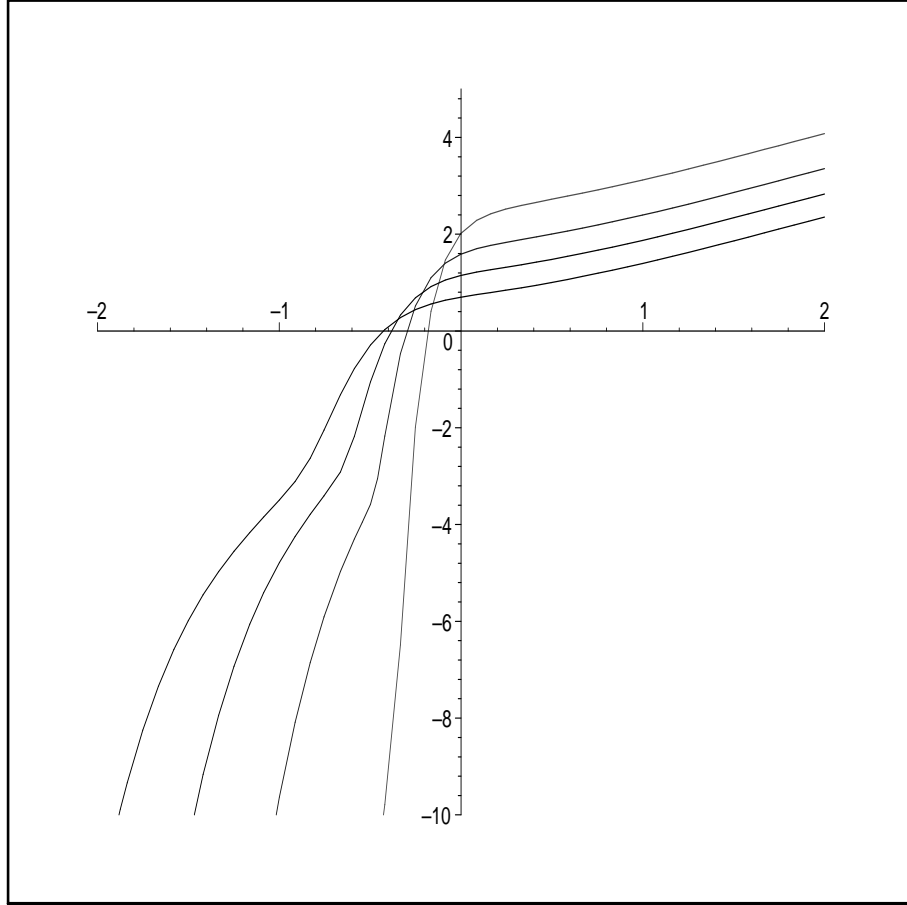
$$\delta_S^0 = \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \frac{N_X}{N} \Delta r. \quad (\text{V.111})$$

Поэтому будем соотносить наши результаты к этой оценке, вводя относительную величину:

$$\Delta_S = \frac{\delta_S}{\delta_S^0} \quad (\text{V.112})$$

- приведенную удельную энтропию. Проводя численное интегрирование в выражении (V.110) с помощью указанных процедур в пакете Maple, получим семейство графиков

функции  $\Delta_S(\sigma)$ . На Рис. VII.11 показаны рассчитанные графики зависимости  $\Delta_S(\sigma)$  при различных значениях  $N_X$  - числа типов  $X$  - бозонов, которое является параметром модели взаимодействий.



**Рис. 13.** Приведенная удельная энтропия на один барион,  $\lg \Delta_S(\sigma, N_X)$ , в зависимости от числа  $X$ -бозонов,  $N_X$ . По оси абсцисс отложены значения  $\lg \sigma$ . В правой части рисунка снизу вверх:  $N_X = 1$ ;  $N_X = 3$ ;  $N_X = 10$ ;  $N_X = 53$ .

Переходя к анализу результатов, заметим, во-первых, что расчеты, проведенные на основе полной кинетической теории, показали существенную зависимость произведенного барионного заряда от количество типов  $X$  - бозонов. Отметим следующую общую тенденцию этой зависимости произведенного барионного заряда: при  $\sigma \lesssim 0,4 \div 0,8$  с увеличением числа типов  $X$  - бозонов приведенная удельная энтропия увеличивается, а при  $\sigma \gtrsim 0,4 \div 0,8$ , наоборот, уменьшается, причем в области малых значений параметра  $\sigma$  зависимость приведенной энтропии от  $N_X$  особенно ощутимо. При этом надо помнить, что абсолютное значение удельной энтропии равно:

$$\delta_S = \Delta_S \delta_S^0 = \Delta_S \frac{45\zeta(3) N_X}{4\pi^4 N} \Delta r. \quad (\text{V.113})$$

С другой стороны можно полагать, что фактор  $N_X/N$  (отношение числа типов  $X$ -бозонов к общему числу типов частиц) не очень сильно зависит от полевой модели взаимодействий, поэтому вывод о зависимости от числа типов  $X$  - бозонов приведенной энтропии

## V.14. Результаты

можно с некоторой осторожностью перенести и на абсолютное значение удельной энтропии. Эти особенности зависимости удельной энтропии от числа типов  $X$  - бозонов представлены на Рис. 14.

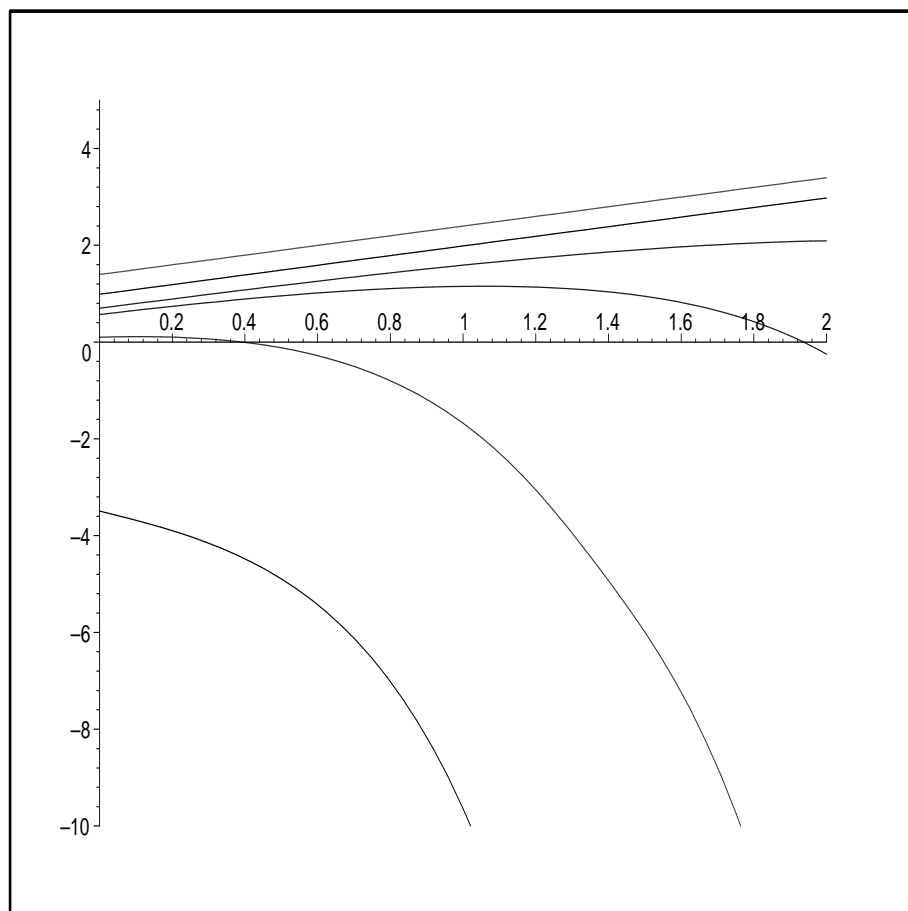


Рис.14. Зависимость приведенной удельной энтропии на один барион от числа типов  $X$  - бозонов. Снизу вверх:  $\sigma = 0, 1$ ;  $\sigma = 0, 4$ ;  $\sigma = 0, 7$ ;  $\sigma = 1$ ;  $\sigma = 3$ ;  $\sigma = 10$ . По оси абсцисс отложены значения  $\lg N_X$ , по оси ординат -  $\lg \Delta_S$ .

Далее, значение (V.111), полученное рядом авторов, в кинетической теории достигается при значениях параметра  $\sigma = 0, 4 \div 0, 6$ . Кроме того кинетическая модель космологического бариогенезиса обнаружила более тонкую структуру этого процесса, чем ту, которую дала гидродинамическая теория этого процесса, развитого ранее в цитированных работах [190]-[192]. Отличие наших результатов от результатов цитированных работ, особенно, в области малых значений параметра  $\sigma$ , вызвано существенным влиянием неравновесных процессов на окончательный результат в этой области. Нетрудно видеть, что функция распределения  $X$ -бозонов наиболее сильно отличается от равновесной именно в этой области. Этот факт, конечно, нельзя эффективно учесть в гидродинамической модели бариогенезиса.

# Глава VI

## Релятивистская кинетическая модель неравновесной Вселенной

### VI.1 Стандартная точка зрения на установление ЛТР во Вселенной

Наиболее распространенная, установившаяся с самых первых работ по космологии, точка зрения на проблему локального термодинамического равновесия (ЛТР) в ранней Вселенной, ясно сформулирована в известной монографии Я.Б.Зельдовича и И.Д.Новикова [151], (1975):

«...Как уже отмечалось раньше, при высокой температуре все частицы находятся в термодинамическом равновесии. В самом деле, для существования термодинамического равновесия необходимо, чтобы процессы, устанавливающие равновесие, шли быстрее, чем расширение плазмы. Точнее говоря, необходимо, чтобы время процесса, устанавливающего равновесие ( $\tau$ ), было много меньше характерного времени изменения параметров плазмы ( $\rho$ ,  $T$  и т.п.).

В изотропном решении  $\rho = \frac{\alpha}{Gt^2}$ , где  $\alpha$  порядка единицы. Поэтому время, необходимое для изменения плотности от какого-либо значения  $\rho$  до  $\left(\frac{1}{e}\right) \rho \approx 0,4\rho$ , порядка  $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$ .

Таким образом,  $\Delta t$  порядка  $t$ . С другой стороны, время установления равновесия есть

$$\tau = \frac{1}{\sigma n v}, \quad (6.2.6)$$

где  $\sigma$  - сечение реакции,  $n$  - концентрация частиц,  $v$  - скорость их движения. При высоких температурах  $v \approx c$ . Величина  $n$  определяется по формуле (6.2.5):  $n = n_1 t^{-3/2}$  ( $n_1 = \text{const}$ ). Поэтому

$$\tau = \frac{t^{3/2}}{\sigma n_1 c}. \quad (6.2.7)SS$$

Для термодинамического равновесия необходимо:

$$\tau = \frac{t^{3/2}}{\sigma n_1 c} < \Delta t \approx t \quad (6.2.8)$$

## VI.1. Стандартная точка зрения на установление ЛТР во Вселенной

или

$$\sigma > t^{1/2} n_1 c. \quad (6.2.9)$$

Поэтому термодинамическое равновесие имеет место при  $t \rightarrow 0$ , если только  $\sigma$  не уменьшается достаточно быстро с ростом энергии частиц. Можно надеяться, что условие (6.2.9) действительно выполняется. Так, например, не подлежит сомнению, что при высоких температурах число пар  $e^+$ ,  $e^-$  не отличается от равновесного. В самом деле, рассмотрим для примера момент, когда  $T = 1$  Мэв,  $t = 1$  сек,  $n_{e^+} \approx n_{e^-} \approx 10^{31}$  см<sup>-3</sup>. Сечение аннигиляции  $\sigma_1$  порядка  $10^{-24}$  см<sup>2</sup>, скорость частиц порядка скорости света; следовательно, время установления равновесия порядка

$$\tau = \frac{1}{\sigma_1 n c} = 10^{-17} \text{сек.}$$

Итак,  $\tau$  ничтожно мало по сравнению с  $t = 1$  сек. Полное равновесие  $e^+ + e^- \rightleftharpoons 2\gamma$  обеспечено. ...»

Несколько позже, в 1980 году, возможно, под влиянием результатов калибровочной теории поля эта точка зрения выражена уже более осторожно [189]:

«Весьма важным является вопрос о термодинамическом равновесии в первичной плазме. Если в обычных случаях равновесие достигается по прошествии достаточно большого времени, то здесь ситуация прямо противоположна. При больших  $t$  скорость расширения Вселенной оказывается больше скорости реакций между частицами и равновесие не успевает устанавливаться. Чем старше становится мир, тем более неравновесным он оказывается. Напротив, при малых временах  $t$  реакции между частицами из-за роста плотности становятся очень быстрыми и газ элементарных частиц, вообще говоря, оказывается равновесным. Поясним это подробнее. Скорость расширения Вселенной  $\dot{a}/a \sim 1/t$ . С другой стороны, скорость установления термодинамического равновесия  $\dot{n}/n \sim nv\sigma$ , где  $n$  - концентрация частиц,  $v$  - их скорость, а  $\sigma$  - сечение взаимодействия. Равновесие, нарушаемое расширением мира, успевает восстановиться, если:

$$nv\sigma t \geq 1. \quad (2.3)$$

При  $T \gtrsim m$  плотность частиц  $n$  по порядку величины равна  $n(t) \approx (tt_{Pl})^{-3/2}$ , где  $t_{Pl} = G^{1/2} \approx 10^{-43}$  с - планковское время; обратная величина  $T_{Pl} = t_{Pl}^{-1} \approx 10^{19}$  Gev называется планковской температурой (или массой). Если взаимодействие частиц описывается единой калибровочной теорией, то  $\sigma \sim \alpha^2 T^{-2}$ ; в случае если температура больше масс промежуточных бозонов,  $m_X \approx 10^{15}$  Гэв. При этом константа связи  $\alpha$  составляет по порядку величины  $10^{-2}$ . Так как температура зависит от времени по закону  $T \approx (tt_{Pl})^{-1/2}$ , то условие равновесия (2.3) справедливо при  $t > \alpha^{-4} t_{Pl}$ . Однако при дальнейшем росте  $t$  (и падении температуры) ситуация снова становится равновесной.... Таким образом, при очень малых временах  $t < t_{Pl}$  Вселенная, возможно, равновесна; далее при  $t_{Pl} < t \lesssim \alpha^{-4} t_{Pl}$  имеется неравновесный период и при  $\alpha^{-4} t_{Pl} > t > t_1^1$  снова восстанавливается равновесие...»

<sup>1</sup>Здесь надо было бы поменять неравенства на обратные, но это - цитата. (Автор)

## VI.2 Поучительный пример

Рассмотрим подробно приведенный в книге [151] пример с реакцией аннигиляции. Только для оценки условия установления ЛТР мы используем не численные значения параметров, приведенных в этой книге, а их точные аналитические значения. Полное сечение реакции аннигиляции электронно - позитронной пары равно (см., например, [214])<sup>2</sup>:

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{\alpha^2}{4v_0 \varepsilon_0^2} \left\{ \frac{3 - v_0^4}{v_0} \ln \frac{1 + v_0}{1 - v_0} + 2(v_0^2 - 2) \right\}, \quad (\text{VI.1})$$

где  $\alpha = e^2/4\pi$  - постоянная тонкой структуры,  $\varepsilon_0$  - энергия сталкивающихся частиц в системе центра масс,  $v_0$  - их скорость в этой же системе. В частности, при ультрарелятивистских энергиях частиц  $\varepsilon \gg m$ ;  $v_0 \rightarrow 1$  формула (VI.1) дает:

$$\sigma = \pi \frac{\alpha^2}{\varepsilon_0^2} \left( \ln \frac{2\varepsilon_0}{m} - 1 \right). \quad (\text{VI.2})$$

Поскольку для ультрарелятивистских частиц  $\varepsilon \sim t^{-1/2}$ , то подставляя эту зависимость в (VI.2), а затем в (6.2.8), получим вместо (6.2.9) противоположное неравенство:

$$t > t_1, \quad (\text{VI.3})$$

- т.е. для реакции аннигиляции ЛТР отсутствует на ранних временах, а восстанавливается на поздних. Что же - неужели, численные оценки, приведенные в [151] неверны? Несомненно, эти оценки верны, но при их выводе молчаливо предполагалось, что в момент времени  $t = 1c$ :

1. число электронно-позитронных пар в плазме не отличалось от равновесного значения, определяемого температурой  $T(t)$  на данный момент;
2. температура плазмы  $T(t)$  на этот момент времени определялась по формулам для локально равновесной Вселенной, в которой плотность энергии пропорциональна  $T^4(t)$ .

Таким образом, в книге [151], как, впрочем, и во многих других, приведен интересный результат, который можно выразить следующей логической формулой:

*Если в ранней Вселенной существовало ЛТР, то ЛТР существовало!*

Очевидна логическая ошибка такого вывода. Но несмотря, на явную ошибочность, этот вывод: «на ранних стадиях Вселенной существовало ЛТР, которое нарушилось на поздних» - явился основой для построения идеологии космологической эволюции, которая с теми или иными вариациями во времени называется «стандартным космологическим сценарием».

---

<sup>2</sup>Здесь и далее мы выбираем универсальную систему единиц:  $G = \hbar = c = k = 1$ ,  $k$  - постоянная Больцмана.

## VI.3 Идеология стандартного космологического сценария и ее последствия

Рассмотрим основные черты стандартного космологического сценария (СКС), не затрагивая пока вопросы теории устойчивости Вселенной и связанные с ней проблемы образования крупномасштабной структуры.

### VI.3.1 Пространственная однородность и изотропность

Первым важным положением стандартного космологического сценария, как и подавляющего большинства космологических моделей, является предположение об однородности и изотропии трехмерного пространства, что приводит к метрике Фридмана:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2) = dt^2 - a^2(t)dl^2, \quad (\text{VI.4})$$

где:

$$dl^2 = d\chi^2 + \rho^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (\text{VI.5})$$

$$\rho(\chi) = \begin{cases} \text{sh}(\chi), & k = -1; \\ \chi, & k = 0; \\ \sin(\chi), & k = +1 \end{cases},$$

$k$  - индекс кривизны трехмерного пространства:  $k = 0$  для нулевой трехмерной кривизны,  $k = 1$  - для постоянной положительной трехмерной кривизны, и  $k = -1$  - для постоянной отрицательной трехмерной кривизны. Как известно, метрика Фридмана допускает группу вращений  $O(3)$ , генерируемую тремя векторами Киллинга  $\xi^i$ :

$$O(3) : \begin{cases} \xi_1^i = \delta_\varphi^i; \\ \xi_2^i = \delta_\theta^i \sin \varphi + \delta_\varphi^i \cos \varphi \text{ctg} \theta; \\ \xi_3^i = \delta_\theta^i \cos \varphi - \delta_\varphi^i \sin \varphi \text{ctg} \theta, \end{cases} \quad (\text{VI.6})$$

лишь два из которых линейно независимы, таких что:

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{(i,j)} = 0. \quad (\text{VI.7})$$

Кроме того, метрика (VI.5) допускает пространственноподобное тензорное поле Киллинга  $\xi_{ij}$ :

$$\xi_{ij} = a^2(\eta)(g_{44}\delta_i^4\delta_j^4 - g_{ij}) \quad (\text{VI.8})$$

такое что:

$$\xi_{(ij,k)} = 0, \quad (\text{VI.9})$$

и времениподобный вектор конформного движения:

$$\xi_4 = \delta_4^i, \quad (\text{VI.10})$$

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

такой что:

$$L_{\xi} g_{ij} = \xi_{(i,j)} = 2 \frac{a'}{a} g_{ij}. \quad (\text{VI.11})$$

Как известно, тензор энергии-импульса наследует симметрию пространства времени вследствие цепочки соотношений:

$$L_{\xi} g_{ij} = 0 \Rightarrow L_{\xi} R_{ijkl} = 0 \Rightarrow$$

и уравнений Эйнштейна:

$$L_{\xi} R_{ij} = 0 \Rightarrow L_{\xi} T_{ij} = 0.$$

Поэтому тензор энергии-импульса Вселенной Фридмана принимает алгебраическую структуру метрики Фридмана, т.е., структуру ТЭИ идеальной изотропной жидкости:

$$T^{ij} = (\varepsilon + p)u^i u^j - p g^{ij}, \quad (\text{VI.12})$$

где

$$u^i = 1/\sqrt{g_{44}}\delta_4^i \quad (\text{VI.13})$$

- вектор скорости материи,  $\varepsilon(\eta)$ ,  $p(\eta)$  - ее плотность энергии и давление.

Уравнения Эйнштейна при этом сводятся к двум независимым уравнениям (см., например, [47]):

$$\frac{1}{a^2}(\dot{a}^2 + k) = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \quad (\text{VI.14})$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0, \quad (\text{VI.15})$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ . Если нам известно уравнение состояния, т.е., зависимость вида:

$$p = p(\varepsilon), \quad (\text{VI.16})$$

то уравнение (VI.15) интегрируется в квадратурах:

$$a = a(\varepsilon). \quad (\text{VI.17})$$

Подставляя решение (VI.17) в уравнение (VI.14), получим замкнутое дифференциальное уравнение первого порядка относительно  $\varepsilon(\eta)$ . В случае *баротропного* уравнения состояния:

$$p = \varrho\varepsilon \quad (\text{VI.18})$$

уравнения Эйнштейна легко интегрируются для ранней Вселенной ( $t \rightarrow 0$ ), как известно в этом случае поведение решений не зависит от индекса кривизны  $k$  (см., например, [47]) и не отличается от поведения решений для пространственно плоской Вселенной ( $k = 0$ ):

$$a = a_1 t^{2/3(\varrho+1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{6\pi(\varrho+1)^2 t^2}, \quad \varrho + 1 \neq 0 \quad (\text{VI.19})$$

### VI.3. Идеология стандартного космологического сценария

и при  $\varrho = -1$  получаем инфляционное решение:

$$a = a_1 e^{\Lambda t}; \quad \varepsilon = \frac{3\Lambda^2}{8\pi} = \text{const.} \quad (\text{VI.20})$$

Усилия многих теоретиков направлены на создание таких полевых моделей, которые обеспечивают нужное управление уравнением состояния: инфляцию, вторичное ускорение, темную материю и т.п. Этим исчерпывается динамика геометрии Вселенной Фрийдмана, но не исчерпывается динамика материи в этой Вселенной.

#### VI.3.2 ЛТР и алгебра взаимодействий

Вторым важным положением СКС является гипотеза об изначальном термодинамическом равновесии Вселенной, которая стала определяющим фактором в формировании теории горячей Вселенной. Стартуя с современного состояния Вселенной и оборачивая вспять ее историю с учетом решения Фрийдмана, описывающего однородное космологическое расширение, а также с учетом закона сохранения числа частиц и энергии, мы приходим к стадии рекомбинации водорода, раньше которой фотоны находились в состоянии ЛТР с электронами и ионами<sup>3</sup>. Таким образом, на ранних стадиях космологического расширения действуют законы равновесной термодинамики, которые полностью определяются локально-равновесными функциями распределения частиц.

Итак, пусть в плазме протекают реакции вида:

$$\sum_A \nu_A a_A \rightleftharpoons \sum_B \nu'_B a'_B \quad (\text{VI.21})$$

где  $a_A, a'_B$  - сорт частиц (имя),  $\nu_A, \nu'_B$  - их числа в этой реакции. Тогда локально-равновесные функции распределения имеют вид, (см., например, [66]):

$$f_a^0(x, p) = \left[ \exp \left( \frac{-\mu_a + (u, p)}{T} \right) \pm 1 \right]^{-1} \quad (\text{VI.22})$$

где  $T(x)$  - температура а  $u_i(x)$  - единичный времениподобный вектор макроскопической скорости  $(u, u) = 1$ , одинаковые для всех сортов частиц  $a$ ;  $\mu_a(x)$  - химические потенциалы, которые определяются серией условий химического равновесия:

$$\sum_A \mu_A \nu_A = \sum_B \mu'_B \nu'_B, \quad (\text{VI.23})$$

представляющих систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $\mu_a$ . Если в  $k$ -ой реакции вида (VI.21) сохраняются некоторые векторные токи, порождаемые соответствующими зарядами  $q_A$  и  $q'_B$ , то для таких реакций выполняется закон сохранения заряда:

$$\sum_A q_A \nu_A^K - \sum_B q'_B \nu'_B^K = 0. \quad (\text{VI.24})$$

Алгебра взаимодействий элементарных частиц, т.е., фактически, схемы разрешенных в той или иной теоретико-полевой модели взаимодействий частиц реакций частиц вида

<sup>3</sup>В том смысле, о котором мы говорили выше.

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

(VI.21), приводит к законам сохранения некоторых обобщенных токов. Действительно, алгебра взаимодействий элементарных частиц определяется целыми числами  $\nu_n^K$ , равных числу частиц сорта  $n$ , участвующих в  $K$ -той реакции, т.е., матрицей  $||\nu_n^K||$ . Пусть  $N$ -число типов фундаментальных частиц, включая и античастицы, в конкретной теоретико-полевой модели. Перепишем реакции (VI.21) в единой форме:

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K a_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots), \quad (\text{VI.25})$$

где  $\nu_A^K$  теперь уже могут принимать любые целочисленные значения: положительные, отрицательные и нулевые. В любой замкнутой полевой теории должно быть:

$$\text{rank}||\nu_A^K|| < N, \quad (\text{VI.26})$$

в противном случае найдется такая частица, которая не сможет быть получена из других ни в одной реакции (VI.25), т.е., не будет взаимодействовать с другими, что сразу выводит ее за рамки данной полевой теории, делая последнюю незамкнутой. Вследствие (VI.26) всегда можно выбрать  $N$  чисел  $G_A$ , одновременно не равных нулю, таких что:

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K G_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots). \quad (\text{VI.27})$$

Пусть для определенности

$$\text{rank}||\nu_A^K|| = r < N.$$

Тогда существует  $N - r$  линейно независимых решений (VI.27), которые мы обозначим символами  $G_A^s$  ( $s = \overline{1, N}$ ) и называть обобщенными зарядами. Поскольку  $\nu_A^K$  - целые числа, то решение уравнений (VI.27) всегда представимо в рациональных числах. Поэтому, умножая уравнения (VI.27) на подходящие множители, их решения всегда можно выразить в целых числах, т.е., обобщенным зарядам можно придать целочисленные значения. Таким образом, в любой замкнутой полевой теории мы будем иметь и соответствующие законы сохранения обобщенных макроскопических токов [50]:

$$J_s^i = \sum_{A=1}^N G_A^s \int_{P(x)} p^i f_A dP_a. \quad (\text{VI.28})$$

Поскольку далее условия химического равновесия (VI.23) принимают вид, формально ничем не отличающийся от уравнений (VI.27):

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K \mu_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots), \quad (\text{VI.29})$$

то и решения этих уравнений с точностью до множителя не отличается от решения уравнений (VI.27):

$$\mu_A^s = \sigma G_A^s, \quad (\text{VI.30})$$

### VI.3. Идеология стандартного космологического сценария

где  $\sigma$  - общий множитель для всех частиц. Отсюда, например, сразу следует, что если некоторые обобщенные токи сохраняются (например, электрический ток), то химические потенциалы безмассовых квантов такого поля равны нулю, а химические потенциалы соответствующих заряженных частиц и античастиц равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Далее, в однородной и изотропной Вселенной все термодинамические функции должны зависеть лишь от времени, а вектор макроскопической скорости должен быть равным (VI.13). Тогда:

$$f_a^0(t, p) = \left[ \exp \left( -\lambda_a(t) + \frac{E_a(p)}{T(t)} \right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (\text{VI.31})$$

где:

$$E_a(p) = \sqrt{m_a^2 + p^2}, \quad (\text{VI.32})$$

- энергия частиц ( $p^2 = -g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta$  - квадрат трехмерного импульса),

$$\lambda_a(t) = \frac{\mu_a(t)}{T(t)}, \quad (\text{VI.33})$$

- приведенные химические потенциалы, которые также удовлетворяют системе уравнений химического равновесия

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K \lambda_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots). \quad (\text{VI.34})$$

Вследствие же однородности Вселенной и ее изотропии законы сохранения обобщенных токов (VI.28) в метрике (VI.4) вследствие (VI.13) принимают вид:

$$a^3(t) \sum_A G_A \Delta n_A(t) = \text{const}, \quad (\text{VI.35})$$

где  $\Delta n_A$  - разность плотностей частиц и античастиц сорта "A" с обобщенным зарядом  $G_A$ .

#### VI.3.3 Высокая энтропия

Третьим важным положением СКС является положение о высокой величине удельной энтропии, приходящейся на один барион в современной Вселенной. Точнее говоря, речь идет об отношении количества фотонов к барионам. Удобно ввести обратную величину:

$$\delta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} \approx 10^{-10} \div 10^{-9} \ll 1, \quad (\text{VI.36})$$

где  $n_B, n_\gamma$  - плотности числа барионов и фотонов в современной Вселенной, соответственно.

Равновесные плотности числа частиц  $\overset{0}{n}$ , энтропии,  $\overset{0}{s}$ , и энергии,  $\overset{0}{\varepsilon}$ , для газа безмассовых частиц равны (см., например, [60]):

$$\overset{0}{n} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3); \quad (\text{VI.37})$$

$$s^0 = \frac{d}{dT} \frac{\rho}{3\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{2\pi^2 \rho T^3}{45} g_e; \quad (\text{VI.38})$$

$$\varepsilon^0 = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho \pi^2 T^4}{30} g_e, \quad (\text{VI.39})$$

где  $\rho$  - число независимых поляризаций (спина) частицы ( $\rho = 2$  - для фотонов и безмассовых нейтрино),  $g_a$  - статистический фактор ( $g_a = 1$  - для бозонов, для фермионов :  $g_n = 3/4$ ,  $g_e = 7/8$ ), знак «+» соответствует фермионам, «-» - бозонам,  $\zeta(x)$  -  $\zeta$  - функция Римана.

Суммарная плотность энергии безмассовых частиц равна:

$$\varepsilon = \sum_a \varepsilon_a^0 = \mathcal{N} \frac{\pi^2 T^4}{15}, \quad (\text{VI.40})$$

где

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \left[ \sum_B (2S + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S + 1) \right] \quad (\text{VI.41})$$

- эффективное число типов частиц ( $S$  - спин частицы)<sup>4</sup>; суммирование идет по бозонам (B) и фермионам (F), соответственно. Тогда суммарная плотность энтропии равна:

$$s = \sum_a s_a^0 = \mathcal{N} \frac{4\pi^2 T^3}{45} \quad (\text{VI.42})$$

Рассмотрим теперь ультрарелятивистские частицы (барионы, лептоны), находящихся в тепловом равновесии, масса покоя которых отлична от нуля. Поскольку химические потенциалы частиц и античастиц равны по величине и противоположны по знаку, получим выражение для разницы массивных барионов (лептонов) какого-то типа:

$$\Delta n^0 = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{e^{-\lambda+E(p)/T} + 1} - \frac{1}{e^{\lambda+E(p)/T} + 1} \right] p^2 dp. \quad (\text{VI.43})$$

Полагая:

$$\lambda_A = \frac{\mu_A}{T} \ll 1 \quad (\text{VI.44})$$

и переходя к пределу  $m \rightarrow 0$  в интегралах типа (VI.43), получим, разлагая эти интегралы в ряд по малости  $\lambda$ :

$$\Delta n^0 \approx \lambda \frac{\rho}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{p/T}}{(e^{p/T} + 1)^2} dp = \lambda \frac{T^3}{3}, \quad (\text{VI.45})$$

<sup>4</sup>В полевых моделях взаимодействий типа SU(5)  $\mathcal{N} \sim 100 \div 200$ .

### VI.3. Идеология стандартного космологического сценария

где для определенности мы положили  $\rho = 2$  ( $S=1/2$ ).

Таким образом, используя формулы (VI.37) и (VI.45), получим выражение для равновесного отношения избытка барионов к числу фотонов:

$$\delta_B = \frac{\Delta \overset{0}{n}}{\overset{0}{n}_\gamma} = \lambda \frac{\pi^2}{6\zeta(3)} \quad (\approx 1,369\lambda), \quad (\text{VI.46})$$

- равновесный относительный избыток барионов,  $\delta_B$ , практически совпадает с их приведенным химическим потенциалом:

$$\delta_B \sim \lambda. \quad (\text{VI.47})$$

Поскольку согласно (VI.37) и (VI.38) равновесная плотность энтропии ультрарелятивистских частиц пропорциональна равновесной плотности числа частиц -  $\overset{0}{s} \sim \overset{0}{n}$ , в стандартном космологическом сценарии делается вывод о малости химических потенциалов частиц на ультрарелятивистском этапе эволюции Вселенной, т.е., об удивительно высокой степени зарядовой симметрии Вселенной в начале эволюции:

$$\lambda \sim 10^{-10} \div 10^{-9} \ll 1. \quad (\text{VI.48})$$

#### VI.3.4 Далеко идущие последствия

Отсюда сразу напрашивается мысль, а не являлась ли Вселенная с самого начала полностью зарядово симметричной, а небольшой избыток барионов ( $\sim 10^{-10}$ ) возник вследствие каких-либо механизмов спонтанного нарушения симметрии, которые могли иметь место при сверхвысоких энергиях взаимодействующих частиц, далеко превышающих принципиальные экспериментальные возможности человечества. Такая идея и была высказана Сахаровым [14](1967) и затем как теория бариогенезиса была развита на основе SU(5)-модели в цитированных выше работах. Теория бариогенезиса наложила достаточно строгие условия на минимально возможные значения масс сверхмассивных X-бозонов:

$$m_X \geq 10^{16} \text{Gev}. \quad (\text{VI.49})$$

Позже в более строгих расчетах автора этот предел был снижен на полтора порядка<sup>5</sup>:

$$m_X \geq 5 \cdot 10^{14} \text{Gev}, \quad (\text{VI.50})$$

однако, это не меняет сути дела - стандартный космологический сценарий устанавливает ограничения на параметры той или иной полевой теории фундаментальных взаимодействий. Можно напомнить целый ряд таких «космологических» ограничений на массы элементарных частиц (нейтрино, адронов, гравитино и т.п.) и прочие константы фундаментальных взаимодействий, полученных на основе стандартного космологического сценария (см., например, цитированную выше книгу [151], являющейся своеобразной энциклопедией таких ограничений) и вызывавших прежде энтузиазм приверженцев горячей модели. В свою очередь, сочетание концепций термодинамического равновесия и сингулярного начального состояния Вселенной с классическими результатами Хоукинга о рождении частиц сингулярностями привело к внешне заманчивой идее вакуумного начала Вселенной, тем самым сделав начальную фазу Вселенной совершенно жесткой и безальтернативной.

---

<sup>5</sup>См. предыдущий раздел.

## VI.4 Более детальный анализ ЛТР

### VI.4.1 Влияние сингулярности Вселенной на установление ЛТР

Первое отличие, которое бросается в глаза при сравнении космологического процесса установления ЛТР с обычным процессом - это наличие начала общей истории частиц и их взаимодействий в космологии по сравнению с обычной ситуацией, вызванное наличием космологической сингулярности в момент времени  $t = 0$ . Во-первых, вследствие принципа причинности ЛТР не может быть установлено на временах порядка и меньше планковских. Действительно, в сфере, образованной световым горизонтом какой-либо одной частицы, укладывается:

$$N_t = \frac{4\pi}{3} t^3 n(t) \quad (\text{VI.51})$$

других частиц, где  $n(t)$  - их числовая плотность. Если  $N_t < 1$ , взаимодействие между частицами не может иметь место, и ЛТР не установится. В горячей модели согласно (VI.19) и (VI.40) температура ультрарелятивистской плазмы изменяется по закону :

$$T_0(t) = \left( \frac{45}{32\pi^3 \mathcal{N}} \right)^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{VI.52})$$

поэтому при использовании равновесных концентраций (VI.37) соотношение (VI.51) принимает в случае стандартной модели SU(5) вид:

$$N_t \sim 0,33t^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{VI.53})$$

Таким образом, даже при использовании равновесных концентраций горячей модели ЛТР не может быть установлено при  $t \lesssim t_{pl}$ . Но тогда начальные концентрации вовсе не обязаны быть равновесными, - они могут оказаться значительно ниже последних. Но в этом случае установление ЛТР отодвигается на более поздние, чем планковские, времена [199, 200].

Во-вторых, более детальный динамический анализ корреляционных функций частиц также обнаруживает некоторые принципиальные отличия космологической ситуации от обычной. В качестве точно решаемой модельной задачи можно рассмотреть распад тяжелой электронейтральной покоящейся массивной частицы на две ультрарелятивистские заряженные античастицы (Рис. 15).

Строгое решение этой задачи приведено в статье А.В.Смирнова [201] и сводится к замене ядра  $W_{ij}$  релятивистского интеграла кулоновских столкновений Беляева-Будкера [34] на ядро  $\bar{W}_{ij}$  по правилу:

$$\bar{W}_{ij} = W_{ij} \Theta(t),$$

где:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \lambda_{pl}; \\ \frac{1}{\Lambda} \ln \frac{t}{\lambda_{pl}}, & \lambda_{pl} < t < \lambda_D; \\ 1, & t > \lambda_D, \end{cases} \quad (\text{VI.54})$$

#### VI.4. Более детальный анализ ЛТР

$\lambda_D$  - радиус Дебая-Хюккеля,  $\Lambda$  - кулоновский логарифм. Это решение строго показывает, что корреляция частиц до планковских времен отсутствует и лишь потом начинает логарифмически медленно расти до классических времен релаксации.

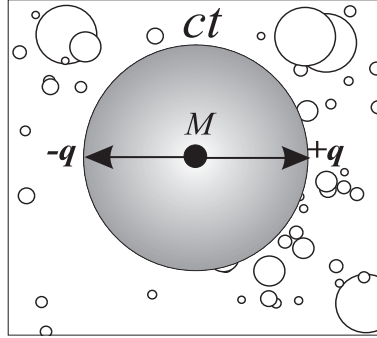


Рис. 15: Световой горизонт двух ультрарелятивистских зарядов  $q$  и  $-q$ , возникших при распаде электронейтральной массивной частицы  $M$  в момент времени  $t = 0$ .

#### VI.4.2 Условия ЛТР

Перечисленные в разделе VI.3 принципы СКС базируются на условии выполнения ЛТР в ранней Вселенной, - именно это условие и является главным догматом СКС. Поэтому в первую очередь как раз и необходимо проверить выполнение этого условия в ранней Вселенной, используя современные представления о взаимодействии элементарных частиц в области сверхвысоких энергий.

Так как темп расширения Вселенной есть  $\dot{a}/a$ , то более строгое, чем (6.2.8) условие установления ЛТР имеет вид:

$$\tau_{eff} \frac{\dot{a}}{a} < 1. \quad (VI.55)$$

Если числа частиц, участвующих в данной реакции сохраняются:

$$n(t) = \frac{n_1}{a^3(t)}, \quad (VI.56)$$

где для определенности здесь и далее полагаем:

$$a(1) = 1 \quad (VI.57)$$

( $t = 1$  соответствует планковскому моменту времени),  $n_1 = n(1)$ - плотность числа частиц на этот момент. Согласно (VI.4) выбор такой нормировки масштабного фактора соответствует выбору планковских единиц длины на планковский момент времени.

При этой нормировке в случае баротропного уравнения состояния (VI.18) получаем из (VI.19):

$$a = t^{2/3(\rho+1)}; \quad \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2(\rho+1)}{3t}, \quad (\rho \neq 1), \quad (VI.58)$$

и из (VI.20):

$$a = e^{\Lambda(t-1)}; \quad \frac{\dot{a}}{a} = \Lambda, \quad (\rho = -1). \quad (\text{VI.59})$$

Для более строгого анализа условия ЛТР необходимо учесть зависимость сечения взаимодействия  $\sigma_{eff}$  ультрарелятивистских частиц от их кинетической энергии  $E_{cm}$  в системе центра масс. Поскольку эта энергия является функцией космологического времени, то эффективное сечение рассеяния, вообще говоря, тоже является функцией времени:  $\sigma_{eff} = \sigma_{eff}(t)$ . Поэтому условие ЛТР (VI.55) принимает вид:

$$\frac{\dot{a}a^2}{n_1\sigma_{eff}(1)} \frac{\sigma_{eff}(1)}{\sigma_{eff}(t)} < 1. \quad (\text{VI.60})$$

Для выяснения зависимости от времени эффективного сечения взаимодействия необходимо более подробно рассмотреть кинематику четырехчастичных реакций.

### VI.4.3 Кинематика четырехчастичных реакций и полное сечение рассеяния

Четырехчастичные реакции типа:

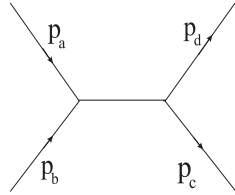


Рис. 16: Диаграмма четырехчастичной реакции

$$a + b \rightarrow c + d \quad (\text{VI.61})$$

полностью описываются двумя кинематическими инвариантами,  $s$  и  $t$ , которые имеют следующий смысл:  $\sqrt{s}$ - энергия сталкивающихся частиц в центре масс (СЦМ):

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2, \quad (\text{VI.62})$$

а  $t$ -релятивистский квадрат переданного импульса:<sup>6</sup>

$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_b - p_d)^2, \quad (\text{VI.63})$$

<sup>6</sup>Автор надеется, что читателя не смутит совпадение обозначений:  $t$  - время в метрике Фридмана,  $s$  - ее интервал, одновременно  $t, s$  - кинематические инварианты. Кроме того с помощью  $s$  мы обозначаем и плотность энтропии. Эти обозначения являются стандартными в теории элементарных частиц и мы не сочли необходимым их менять.

#### VI.4. Более детальный анализ ЛТР

где квадраты импульсов понимаются как скалярные четырехмерные квадраты:

$$p_a^2 = (p_a, p_a) = (p^4)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = m_a^2,$$

и т.д. Так, например:

$$(p_a + p_b)^2 = p_a^2 + 2(p_a p_b) + p_b^2 = m_a^2 + 2(p_a, p_b) + m_b^2.$$

При этом инвариантные амплитуды рассеяния  $F(s, t)$ , определяемые как результат усреднения инвариантной амплитуды рассеяния по состояниям частиц,  $c$  и  $d$ , оказываются зависящими лишь от этих двух инвариантов (см., например, [143]):

$$\sum |M_{FJ}|^2 = \frac{|F(s, t)|^2}{(2S_c + 1)(2S_d + 1)}, \quad (\text{VI.64})$$

где  $S_i$  - спины. С помощью инвариантной амплитуды  $F(s, t)$  определяется полное сечение реакции (VI.61) (см. [143]):

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi\lambda^2(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{t_{min}}^0 dt |F(s, t)|^2, \quad (\text{VI.65})$$

где  $\lambda$  - функция треугольника:

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc;$$

$$t_{min} = -\frac{\lambda^2}{s}.$$

В ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty \quad (\text{VI.66})$$

имеем:

$$s \rightarrow 2(p_a, p_b); \quad t \rightarrow -2(p_a, p_b), \quad (\text{VI.67})$$

$$\frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty; \quad \lambda \rightarrow s^2, \quad (\text{VI.68})$$

и формула (VI.65) значительно упрощается введением безразмерной переменной:

$$x = -\frac{t}{s} : \quad (\text{VI.69})$$

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (\text{VI.70})$$

Таким образом, в ультрарелятивистском пределе полное сечение рассеяния зависит лишь от кинематического инварианта  $s$  - квадрата энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(s).$$

Именно эта зависимость и будет управлять установлением локального термодинамического равновесия в ранней Вселенной.

#### VI.4.4 Влияние зависимости сечения взаимодействия от кинематического инварианта $s$ на установление ЛТР

Полагая в дальнейшем эффективное сечение взаимодействия равным полному, исследуем зависимость установления ЛТР от вида функции  $\sigma_{tot}(s)$ . Предположим для ультрарелятивистских частиц степенную зависимость полного сечения рассеяния от кинематического инварианта (см. [200, 202]):

$$\sigma_{tot}(s) \sim s^\alpha, \quad \alpha = \text{Const.} \quad (\text{VI.71})$$

Поскольку в изотропной расширяющейся Вселенной интегралом движения является модуль *конформного импульса* частицы  $\mathbb{P}$ :

$$a(t)p = \mathbb{P} = \text{Const}, \quad (\text{VI.72})$$

то в ультрарелятивистском пределе (VI.66) согласно (VI.67) и (VI.72) асимптотическое поведение кинематического инварианта описывается выражением:

$$\frac{p}{m} \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow \frac{s_1}{a^2(t)}, \quad (\text{VI.73})$$

где  $s_1 = s(1)$ . Таким образом, согласно (VI.71) получим:

$$\sigma_{tot}(t) = \sigma_{tot}(1)a^{-2\alpha}(t). \quad (\text{VI.74})$$

Подставляя эту зависимость в условие ЛТР (VI.60), получим явную зависимость условия ЛТР от масштабного фактора:

$$\dot{a}a^{2(1-\alpha)} < n_1\sigma_{tot}(1). \quad (\text{VI.75})$$

Таким образом, используя решения уравнений Эйнштейна для ранней Вселенной в случае баротропного уравнения состояния ( $\rho \neq -1$ ), (VI.58), получим из (VI.75) условие ЛТР в ранней Вселенной:

$$t^{[4\alpha+3(1-\rho)]/(1+\rho)} < n_1\sigma_{tot}(1), \quad (\text{VI.76})$$

откуда следует, что при выполнении условия:

$$4\alpha + 3(1 - \rho) > 0, \quad (\text{VI.77})$$

ЛТР поддерживается на ранних стадиях расширения, а на поздних нарушается, т.е., при:

$$\alpha > -\frac{3}{4}(1 - \rho) \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (\text{VI.78})$$

а при выполнении обратного к (VI.78) условия ЛТР нарушается на ранних стадиях и восстанавливается на поздних. В случае ультрарелятивистского уравнения состояния  $\rho = 1/3$  получим из (VI.78) условие существования ЛТР на ранних стадиях [202]:

$$\alpha > -\frac{1}{2} \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (p = \frac{1}{3}\varepsilon). \quad (\text{VI.79})$$

## VI.5. Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

В случае предельно жесткого уравнения состояния  $\rho = 1$  условие поддержания ЛТР на ранних стадиях и нарушения на поздних эквивалентно условию:

$$\alpha > 0 \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (p = \varepsilon). \quad (\text{VI.80})$$

В частности, при  $\alpha = 0$  (сечение взаимодействия постоянно) в случае предельно жесткого уравнения состояния время вообще выпадает из условия ЛТР [202], - на этой стадии расширения во Вселенной либо всегда поддерживается ЛТР, либо его вообще нет. В случае инфляции  $\rho = -1$  условие ЛТР (VI.76) необходимо заменить следующим:

$$e^{\Lambda(3+2\alpha)(t-1)} < n_1 \sigma_{tot}(1), \quad (\text{VI.81})$$

поэтому при:

$$\alpha > -\frac{3}{2} \quad (\text{VI.82})$$

ЛТР поддерживается на ранних стадиях и нарушается на поздних. Таким образом, зависимость полного сечения взаимодействия частиц от кинематического инварианта в области сверхвысоких значений энергий частиц, играет решающую роль при выяснении вопроса о существовании ЛТР в ранней Вселенной.

## VI.5 Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

### VI.5.1 Ограничения на асимптотическое поведение сечения рассеяния, следующие из аксиоматической теории S-матрицы

Возникает вопрос, а какова зависимость  $\sigma_{tot}(s)$  на самом деле? Для исследования кинетики процессов в ранней Вселенной необходимо знать асимптотическое поведение инвариантных амплитуд  $F(s, t)$  в пределе (VI.66). Современные экспериментальные возможности ограничены значениями  $\sqrt{s}$  порядка сотен ГэВ. Было бы неосторожным опираться на ту или иную полевую модель взаимодействия для прогнозирования асимптотического поведения сечения рассеяния в области сверхвысоких энергий. Более разумно в современных условиях опираться на выводы аксиоматической теории S-матрицы, полученные на основе фундаментальных законов унитарности, причинности, масштабной инвариантности и т.п. Унитарность S-матрицы приводит к известному асимптотическому соотношению (см., например, [252]):

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{s \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{s^2} \quad (\text{VI.83})$$

при значениях  $s$  выше унитарного предела, т.е., при условии (VI.66), если под  $m_i$  понимать массы всех промежуточных частиц. Но тогда из (VI.70) следует:

$$F(s, 1)|_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Const}. \quad (\text{VI.84})$$

На основе аксиоматической теории S-матрицы в 60-е годы XX-го столетия были получены строгие ограничения на асимптотическое поведение полных сечений и инвариантных амплитуд рассеяния:

$$\frac{C_1}{s^2 \ln s} < \sigma_{tot}(s) < C_2 \ln^2 s, \quad (\text{VI.85})$$

где  $C_1, C_2$  - неизвестные константы. Верхний предел (VI.85) был установлен в работах [254]-[256], нижний - в [257], [258] (см. также обзор в книге [259]). Отметим также ограничения на инвариантные амплитуды рассеяния (см., например, [259]):

$$|F(s, t)| \leq |F(s, 0)|; \quad (\text{VI.86})$$

$$C'_1 < |F(s, 0)| < C'_2 s \ln^2 s. \quad (\text{VI.87})$$

Поэтому инвариантные амплитуды рассеяния в пределе (VI.66) должны быть функциями лишь переменной  $x = -t/s$ , т.е.:

$$|F(s, t)| = |F(x)|, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (\text{VI.88})$$

Но тогда вследствие (VI.70)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(x)|^2 = \frac{\text{Const}}{s}, \quad (\text{VI.89})$$

полное сечение ведет себя также, как и сечение электромагнитных взаимодействий, т.е., при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг.

Скейлинговая асимптотика сечения (VI.89) лежит строго посередине между возможными крайними асимптотиками полного сечения рассеяния (VI.85). Кроме того при выполнении (VI.89) автоматически выполняются и соотношения, полученные на основе аксиоматической теории  $S$ -матрицы (VI.83) и (VI.84).

Далее, как мы отмечали выше, для чисто электромагнитных взаимодействий вследствие их масштабной инвариантности скейлинг всегда существует. В качестве примера приведем сечение аннигиляции ультрарелятивистских электронно-позитронной пары (VI.2), которое может быть переписано с помощью кинематического инварианта  $s$  в явно скейлинговой форме:

$$\sigma_{ee \rightarrow \gamma\gamma} = \pi \frac{\alpha^2}{s} \left( \ln \frac{2s}{m} - 1 \right). \quad (\text{VI.90})$$

Для лептон-адронного взаимодействия предположение о существовании скейлинга было выдвинуто в работах [260],[261]. В частности, для полного сечения реакции

$$e + e^+ \rightarrow \text{адроны}$$

было получено выражение:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum e_i^2,$$

где  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры,  $e_i$  - заряды фундаментальных фермионных полей. Данные, полученные на Стэнфордском накопителе, подтвердили наличие скейлинга для этих взаимодействий. Для гравитационных взаимодействий скейлинг, по-видимому, также должен восстанавливаться при сверхвысоких энергиях вследствие масштабной инвариантности гравитационных взаимодействий в ВКБ-приближении [263]. Можно привести большое количество аналогичных примеров, являющихся надежно установленными фактами.

## VI.5. Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

### VI.5.2 Асимптотическая конформная инвариантность релятивистской кинетической теории

Возникает вопрос, а какие выводы об установлении термодинамического равновесия в ранней Вселенной дает строгая релятивистская кинетическая теория? Фактически на этот вопрос дан ответ в разделе III.1 (см. [52]):

*В ультрарелятивистском пределе при условии конформной инвариантности негравитационных макроскопических полевых уравнений и масштабной инвариантности матричных элементов взаимодействия кинетические уравнения конформно инвариантны.*

Воспользовавшись конформной инвариантностью кинетических уравнений и тем, что, во-первых, Вселенная Фрийдмана (VI.4) при  $k = 0$  является конформно-плоской с конформным множителем  $\sigma = a(\eta)$ , и, во-вторых, что на ранних стадиях космологического расширения, когда  $\eta \rightarrow 0$ , метрика Фрийдмана асимптотически стремится к пространственно-плоской независимо от значения индекса кривизны трехмерного пространства,  $k$ . Поэтому согласно вышеприведенной теореме решение кинетических уравнений в метрике (VI.4) будут совпадать с решениями соответствующих кинетических уравнений в плоском пространстве,  $f_a(\eta, \bar{P}_a)$ , причем в соответствующих кинетических уравнениях необходимо произвести также замену кинематического инварианта  $s$  на  $\bar{s}$  по правилу:

$$\bar{s} = a^2(\eta)s,$$

т.е.,  $\bar{\sigma}_{tot} = \text{Const}$ . Но тогда и  $\bar{\tau}_{eff} = \text{Const}$ , и мы придем к известному результату стандартной кинетической теории: ЛТР восстанавливается в плазме при

$$\eta \geq \bar{\tau}_{eff}.$$

Таким образом, строгие выводы релятивистской кинетической теории относительно восстановления ЛТР в ультрарелятивистской плазме находятся в полном соответствии с качественным выводом, приведенном в предыдущем разделе.

### VI.5.3 Универсальное асимптотическое сечение рассеяния

Будем в дальнейшем предполагать наличие скейлинга при энергиях выше унитарного предела  $s \rightarrow \infty$ . Возникает вопрос о значении константы в формуле (VII.26) а также о логарифмическом уточнении этой константы. Это значение можно оценить из следующих простых соображений. Во-первых, пусть  $m$  - масса покоя сталкивающихся частиц. Поскольку  $\sqrt{s}$  - энергия взаимодействующих частиц в системе центра масс, то минимальное значение  $\sqrt{s}$  для четырехчастичных реакций с частицами массы  $m$  равно:

$$\sqrt{s_{\min}} = 2m \Rightarrow s_{\min} = 4m^2. \quad (\text{VI.91})$$

Далее, если верна идея объединения всех взаимодействий на планковских масштабах энергии  $E_{pl} = m_{pl} = 1$ , то при  $s \sim 1$  все четырехчастичные взаимодействия должны

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

описываться единым сечением рассеяния, образованным из трех фундаментальных констант  $G, \hbar, c$ , т.е., в выбранной нами системе единиц должно быть:

$$\sigma|_{s \sim 1} = 2\pi l_{pl}^2 \Rightarrow \sigma(4) = \frac{8\pi}{s_{pl}} \quad (= 2\pi), \quad (\text{VI.92})$$

где:

$$s_{pl} = 4m_{pl}^2 = 4 \quad (\text{VI.93})$$

- планковское значение кинематического инварианта  $s$ , соответствующее двум сталкивающимся планкеонам массой  $m_{pl}$  и комптоновского масштаба  $l_{pl}$ :

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} (= 1), \quad l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} (= 1). \quad (\text{VI.94})$$

Однако, для того, чтобы на планковских масштабах энергии сечение рассеяния падало до такой величины, стартуя со значений порядка  $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/3m_e^2$  ( $m_e$  - масса электрона,  $\sigma_T$  - томпсоновское сечение рассеяния) для электромагнитных взаимодействий, т.е., при  $s \sim 4m_e^2$ , оно должно падать обратно пропорционально  $s$ , т.е., опять-таки по закону скейлинга. Заметим, что этот факт является еще одним независимым доводом в пользу существования скейлинга в области высоких энергий. Логарифмически уточняя эту зависимость, введем *универсальное асимптотическое сечение рассеяния* (ACS), впервые предложенное в работах [?], [251], (см. также [265]):

$$\sigma_0(s) = \frac{8\pi\beta}{sL(s)}, \quad (\text{VI.95})$$

где  $\beta \sim 1$ ,  $L(s)$  - логарифмический фактор:

$$L(s) = 1 + \ln^2 \left( 1 + \frac{s_0}{s} \right) > 1, \quad (\text{VI.96})$$

являющийся монотонно убывающей функцией кинематического инварианта  $s$  -

$$\frac{dL}{ds} < 0,$$

а  $s_0 = 4$  - квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс, так что на планковских масштабах энергии:

$$L(s_0) \simeq 1, \quad (\text{VI.97})$$

- при этом на комптоновских масштабах энергии, т.е., при  $s = m_e^2$ :

$$\frac{1}{\sqrt{L(m_e^2)}} \approx \frac{1}{102} \simeq \alpha \approx \frac{1}{137}, \quad (\text{VI.98})$$

где  $\alpha = 1/137$  - постоянная тонкой структуры.

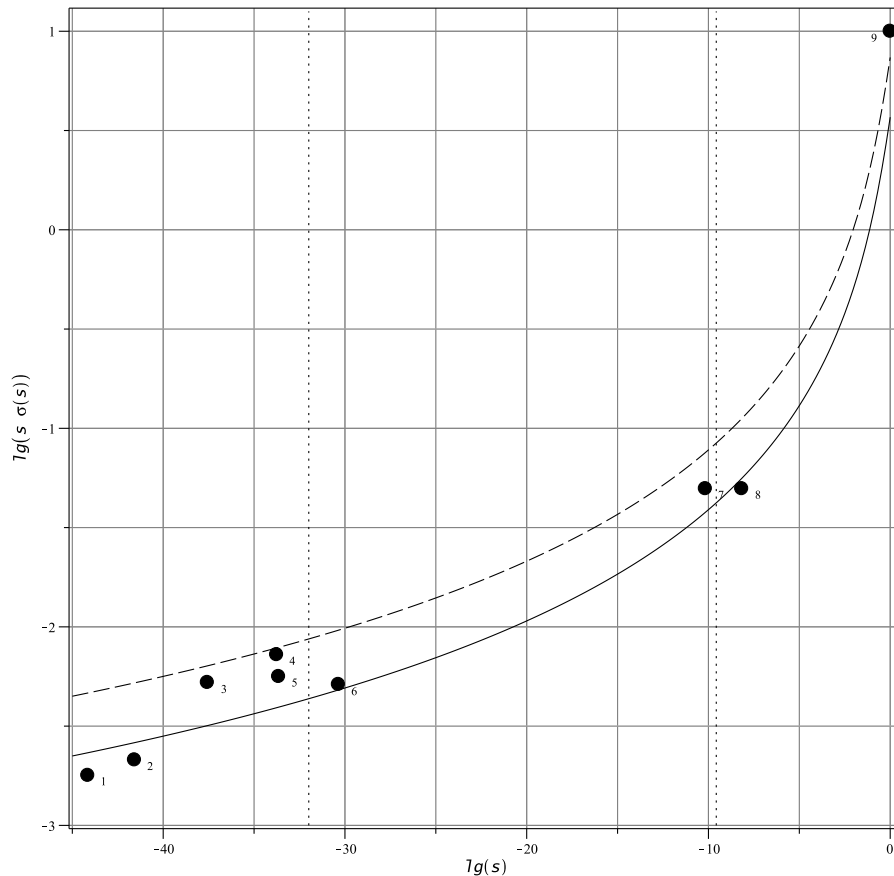
Соотношение (VI.98) позволяет рассматривать величину  $1/\sqrt{L(s)}$  как логарифмически медленно меняющуюся эффективную константу взаимодействия, что, в свою очередь,

## VI.5. Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

реализует идеологию бегущих констант взаимодействия стандартных теорий фундаментальных взаимодействий типа  $SU(5)$ .

Введенное формулой (VI.95), сечение рассеяния  $\sigma_0$ , ACS, обладает рядом замечательных свойств (см. также Рис. 17):

- 1°. ACS образовано лишь из фундаментальных констант  $G, \hbar, c$ ;
- 2°. ACS ведет себя так, что его значения лежат строго посередине между возможными крайними пределами асимптотического поведения сечения (VII.22), установленных с помощью асимптотической теории  $S$ -матрицы;
- 3°. ACS с логарифмической точностью является скейлинговым сечением рассеяния;
- 4°. ACS с удивительной точностью совпадает на соответствующих масштабах энергии с сечениями всех известных фундаментальных процессов, начиная от электромагнитных и кончая гравитационными, на огромном диапазоне значений энергии (от  $m_e$  до  $10^{22}m_e$ ) — при этом значения первого кинематического инварианта изменяется на 44 порядка! (см. Рис. 17).

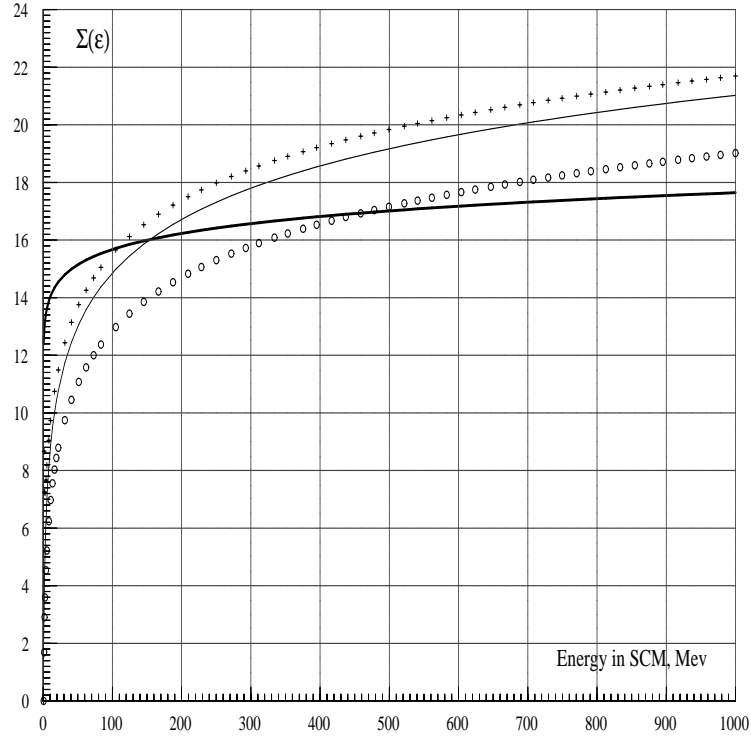


**Рис. 17.** Сравнение универсального сечения рассеяния (VI.95) при факторе  $\beta = 1$  с известными сечениями фундаментальных процессов — жирная линия. Пунктирная линия соответствует графику универсального сечения рассеяния при факторе  $\beta = 2$ . На оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма первого кинематического инварианта,  $\lg s$ , в планковских единицах; по оси ординат отложены значения десятичного логарифма безразмерного инварианта,  $\lg s\sigma(s)$ . 1 — томпсоновское рассеяние, 2 — комптоновское рассеяние на электронах при  $E_{SCM} = 10$  Mev,

3 – комптоновское рассеяние электронов при  $E_{SCM} = 1 \text{ Gev}$ , 4 – электрослабое взаимодействие с участием:  $W$  - бозонов, 5 – с участием  $Z$  - бозонов, 6 –  $H$ -бозонов при энергии порядка 7 Tev ( $\sigma \sim 10\text{fb}$ ); 7 –  $SU(5)$  - взаимодействие при массе сверхтяжелых  $X$ -бозонов  $10^{15} \text{ Gev}$ , 8 –  $10^{14} \text{ Gev}$ ; 9 – гравитационное взаимодействие на планковских масштабах. Вертикальные пунктирные линии соответствуют значениям энергии унитарного предела для  $SU(2) \times SU(1)$  - взаимодействий,  $E_u = 617 \text{ Gev}$ , и  $SU(5)$  - взаимодействий,  $E_u \sim 10^{14} \text{ Gev}$ .

Эти замечательные качества ACS, вряд-ли, могут быть случайными и позволяют нам в дальнейшем применять ACS в качестве надежной формулы для асимптотического значения сечений рассеяния для всех взаимодействий.

На Рис. 18 показано сравнение асимптотического сечения рассеяния с мелкомасштабным поведением сечений основных типов электромагнитных взаимодействий в области низких энергий<sup>7</sup>



**Рис. 18.** Инвариантные сечения рассеяния: универсальное асимптотическое сечение рассеяния (VI.95) - сплошная жирная линия; сечение двухфотонной электронно-позитронной аннигиляции - крестики, сечение рождения электронно-позитронной пары при столкновении двух фотонов - кружочки, сечение комптоновского рассеяния - сплошная тонкая линия. По оси абсцисс отложены значения полной энергии в системе центра масс,  $\epsilon = \sqrt{s}/2$  в Mev, по оси ординат - значения  $\Sigma(\epsilon) = 10^3 \times \sigma(s)$ .

<sup>7</sup>Данные взяты из работы [213]

## VI.5. Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

Все указанные сечения имеют явно скейлинговое поведение в области  $s \gg m^2$ , т.е., с логарифмической точностью значение  $s\sigma(s) \approx \text{Const}$ . Значительные отклонения от скейлингового поведения возникают лишь в области низких энергий  $\varepsilon \sim m_e$ , т.е., в области порядка и ниже унитарного предела для электромагнитных взаимодействий, где возникают резонансы. Однако, влияние таких резонансов на общую эволюцию космологической плазмы будет исчезать по мере повышения энергии частиц [215]. Действительно, массы промежуточных частиц, создающих резонанс, порядка энергии резонанса, которая, в свою очередь, равна кинетической энергии взаимодействующих частиц:

$$M \sim E \approx \sqrt{s}.$$

Поэтому с увеличением кинематического инварианта  $s$  растут и массы промежуточных частиц, определяющих резонансы. Но, как известно, между полушириной резонанса и массой промежуточной частицы имеется соотношение<sup>8</sup>:

$$\Gamma \sim M^{-1}.$$

Поэтому с ростом энергии резонансы становятся все более узкими:

$$\Gamma \sim \frac{1}{\sqrt{s}},$$

так что их вклад в кинетику установления ЛТР становится все более слабым.

Отметим также следующие полезные соотношения, следующие из сравнения определения полного сечения рассеяния (VII.9) с формулой для асимптотического сечения рассеяния (VI.95) а асимптотическими ограничениями на инвариантные амплитуды рассеяния (VII.22), (VII.23):

$$\overline{|F_0(s)|^2} = \frac{128\pi^2}{\Lambda(s)}, \quad (\text{VI.99})$$

где

$$\overline{|F_0(s)|^2} = \int_0^1 |F_0(s, x)|^2 dx \quad (\text{VI.100})$$

- среднее значение асимптотической амплитуды рассеяния, соответствующей универсальному асимптотическому сечению рассеяния (VI.95), так что:

$$\sigma_0(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 |F_0(s)|^2 dx, \quad (\text{VI.101})$$

причем справедливо неравенство:

$$|F_0(s)| \leq |F(s, 0)|; \quad (\text{VI.102})$$

<sup>8</sup>Это соотношение следует из соотношения неопределенности Гейзенберга.

## Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

Заметим, что введение логарифмического фактора в выражение для асимптотического сечения рассеяния (VI.95) эквивалентно слабому (логарифмическому) нарушению точной конформной инвариантности амплитуд рассеяния в ультрарелятивистском пределе:

$$\Lambda(\tilde{s})|\overline{F(\tilde{s}, \tilde{t})}|^2 \approx \Lambda(s)|F(s, t)|^2 \quad (\text{VI.103})$$

Таким образом, подводя итоги этого раздела, можно сделать следующие выводы:

- Существование ЛТР на ранних стадиях эволюции Вселенной определяется зависимостью сечений взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий от кинематического инварианта,  $s$ , - энергии взаимодействующих частиц в системе центра масс;
- В случае ультрарелятивистского уравнения состояния космологической плазмы и степенной зависимости сечения взаимодействия от кинематического  $\sigma \sim s^\alpha$  ЛТР отсутствует на ранних стадиях расширения Вселенной при  $\alpha < -1/2$ ;
- Квантовая теория поля предсказывает восстановление скейлинга взаимодействий при сверхвысоких энергиях частиц вследствие конформной инвариантности в ультрарелятивистском пределе фундаментальных полевых уравнений. При этом сечения взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий обратно пропорциональны кинематическому инварианту  $s$ ;
- В условиях скейлинга взаимодействий ЛТР должно нарушаться в ранней Вселенной и восстанавливаться на поздних;
- Поскольку ЛТР отсутствует на ранних стадиях Вселенной, первоначальное распределение частиц может быть произвольным и значительно отличаться от равновесного;
- Поскольку взаимодействия всех частиц при сверхвысоких энергиях унифицируются, взаимодействия всех частиц в этой области можно качественно правильно описать с помощью универсального асимптотического сечения рассеяния, АСР, имеющего скейлинговый характер.

Поскольку в дальнейшем мы будем исследовать кинетику реакций лишь в области сверхвысоких энергий, в которой все взаимодействия описываются, как мы предполагаем, АСР, можно не делать никакого различия между частицами в интегралах взаимодействий, учитывая лишь там, где это необходимо, их спин и другие характеристики. В этом смысле при сверхвысоких энергиях все взаимодействия унифицируются, и четырехчастичные взаимодействия эффективно описываются как упругие, что значительно облегчает исследование таких процессов. В следующем разделе мы исследуем кинетику установления ЛТР в ранней Вселенной, используя АСР для описания взаимодействий частиц в области сверхвысоких энергий, и выясним границы произвола первоначального распределения частиц.

## VI.6 Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

### VI.6.1 Кинетические уравнения в мире Фридмана в ультрарелятивистском пределе

Релятивистские кинетические уравнения для однородных изотропных распределений  $f_a(t, p)$  имеют вид (см. главу VI):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab\rightleftharpoons cd}(t, p), \quad (\text{VI.104})$$

где  $a(t)$  - масштабный фактор мира Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \rho^2(\chi)(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)]; \quad (\text{VI.105})$$

$$p^2 = -g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta, \quad (\alpha, \beta = \overline{1..3}); \quad (\text{VI.106})$$

$J_{ab\rightleftharpoons cd}(t, p)$  - интеграл четырехчастичных реакций, который в интересующем нас ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty; \quad \lambda \rightarrow s^2, \quad (\text{VI.107})$$

для 4-х частичных реакций описывается выражением (III.110):

$$\begin{aligned} J_{ab}(p) = & -\frac{(2S_b + 1)}{32(2\pi)^4 p} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{ds}{s} \int_0^1 dx F(x, s) \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ & \times \{f_a(p)f_b(q)[1 \pm f_c(p - \Delta)][1 \pm f_d(q + \Delta)] - \\ & - f_c(p - \Delta)f_d(q + \Delta)[1 \pm f_a(p)][1 \pm f_b(q)]\}, \end{aligned} \quad (\text{VI.108})$$

где (см. [216]):

$$x = -\frac{t}{s}, \quad \Delta = x(p - q) - \cos \varphi \sqrt{x(1-x)(4pq - s)}. \quad (\text{VI.109})$$

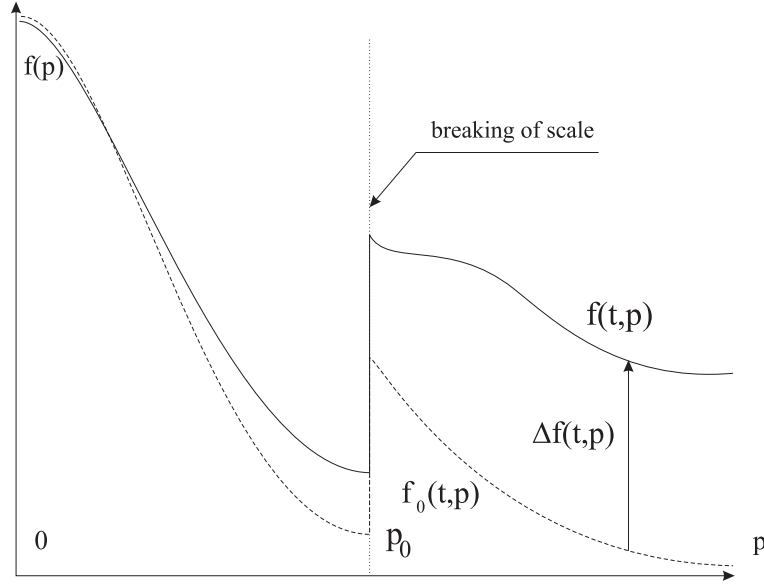
### VI.6.2 Интеграл столкновений для слабого отклонения распределений от равновесия

Исследуем сначала слабое нарушение термодинамического равновесия в горячей модели, когда основная часть частиц,  $n_0(t)$ , находится в состоянии теплового равновесия, и лишь для небольшой доли частиц,  $n_1(t)$  тепловое равновесие нарушено (см. Рис. 49) [270]:

$$n_1(t) \ll n_0(t). \quad (\text{VI.110})$$

Причем в дальнейшем в этом разделе мы будем полагать, что функции распределения мало отличаются от равновесных в области малых значений энергии, меньших некоторого

унитарного предела,  $p = p_0$  (или  $T = T_0$ ), ниже которого отсутствует скейлинг, и может сильно нарушаться при энергиях, выше унитарного предела:



**Рис. 19.** Схематическое изображение отклонения функции распределения от равновесия.

$$f_a(p) \approx \begin{cases} f_a^0 = \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu_a + E_a(p)}{T}\right) \pm 1}, & p < p_0; \\ \Delta f_a(p); f_a^0(p) \ll \Delta f_a(p) \ll 1, & p > p_0, \end{cases} \quad (\text{VI.111})$$

где  $\mu_a(t)$  - химические потенциалы,  $T(t)$  - температура равновесной компоненты плазмы. Таким образом, в области  $p > p_0$  может наблюдаться anomalously большое по сравнению с равновесным число частиц, но при этом малое (см. (VI.110)) по сравнению с полным числом равновесных частиц.

Исследуем процесс релаксации распределения  $f_a(p)$  к равновесному  $f_a^0(p)$ . Задача в такой постановке для частного случая первоначального распределения  $f(t=0, p)$  решалась ранее в [199], [200]. Здесь мы дадим общее решение этой задачи [270]. При этом, как будет видно из дальнейшего, космологическую плазму формально можно рассматривать как двухкомпонентную систему - равновесную с распределением  $f_a^0(t, p)$ , и неравновесную, *сверхтепловую*, с распределением  $\delta f_a(t, p) = \Psi(t, p)$ , причем число частиц в неравновесной компоненте мало, но плотность ее энергии, вообще говоря, произвольна.

Исследуем интеграл столкновений (VI.247) в области

$$p \geq p_0 \gg T. \quad (\text{VI.112})$$

Вследствие неравенства (VI.111) в этой области можно пренебречь столкновениями сверхтепловых частиц между собой, ограничиваясь учетом рассеяния сверхтепловых частиц на равновесных. Поэтому в интеграле столкновений значение одного из импульсов,  $P' =$

## VI.6. Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

$p - \Delta$ , либо  $q' = q + \Delta$  должно лежать в тепловой области, второго - в сверхтепловой, за унитарным пределом. Вне этой области подинтегральное значение интеграла столкновений чрезвычайно мало. Вследствие этого обстоятельства вторым членом в фигурных скобках (VI.247) можно пренебречь, так как он может конкурировать с первым в асимптотически малых областях изменения переменных  $x$  и  $\varphi$ :  $x(1-x) \lesssim T/p \rightarrow 0$ . Статистические факторы вида  $[1 \pm f_a(p')]$  в первом члене интеграла (VI.247) могут заметно отличаться от единицы опять-таки лишь в области тепловых значений импульсов. В результате в исследуемой нами области значений импульсов интеграл столкновений (VI.247) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} J_{ab \leftrightarrow cd}(p)|_{p \geq p_0} &= \\ &= \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx F(x), \end{aligned} \quad (\text{VI.113})$$

Используя здесь определение полного сечения рассеяния (VI.247), получим из (VI.113):

$$\begin{aligned} J_{ab \leftrightarrow cd}(p)|_{p \geq p_0} &= \\ &= \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \sigma_{tot s}(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{VI.114})$$

Подставляя, наконец, во внутренний интеграл выражение для  $\sigma_{tot}$  в форме АСР, (VI.95), проводя интегрирование с логарифмической точностью и суммируя полученное выражение по всем каналам реакций, найдем окончательно:

$$\begin{aligned} J_a(p)|_{p \geq p_0} &= \\ &= -\Delta f_a(p) \sum_b \frac{(2S_b + 1)\nu_{ab}}{\pi} \int_0^\infty \frac{q^2 f_b^0(q)}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \frac{dq}{\Lambda(\bar{s})}, \end{aligned} \quad (\text{VI.115})$$

где  $\bar{s} = \frac{1}{2}pq^4$ ,  $\nu_{ab}$  - число каналов реакций, в которых может участвовать частица сорта  $a$ . Вычислим значения интеграла (VI.115) в предельных случаях.

**Рассеяние на нерелятивистских частицах.** Если равновесные частицы сорта  $b$  нерелятивистские, т.е.,  $q \ll m_b$ , то интеграл (VI.115) сводится к выражению:

$$\begin{aligned} J_a(p)|_{p \geq p_0} &= \\ &= -8\pi^2 \Delta f_a(p) \sum_b \frac{n_b^0(t)}{m_b} \frac{\nu_{ab}}{1 + \ln^2 \frac{pm_b}{2}}, \quad (m_b > T). \end{aligned} \quad (\text{VI.116})$$

**Рассеяние на ультрарелятивистских частицах.** Если равновесные частицы сорта  $b$  являются ультрарелятивистскими, т.е.,  $m_b \ll T$ , причем их химический потенциал

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

мал, -  $\mu_b \ll T$ , то вычисляя интеграл (VI.115) относительно равновесного распределения (VI.111), найдем:

$$\begin{aligned} J_a(p)|_{p \geq p_0} &= \\ &= -\frac{\pi}{3} \frac{\tilde{N} T^2(t)}{1 + \ln^2 T p/2} \Delta f_a(p), \quad (m_b \ll T, \mu_b \ll T), \end{aligned} \quad (\text{VI.117})$$

где

$$\tilde{N} = \frac{1}{2} \left[ \sum_B (2S + 1) + \frac{1}{2} \sum_F (2S + 1) \right] = N_B + \frac{1}{2} N_F;$$

$N_B$  - число сортов равновесных бозонов,  $F$  - фермионов.

Чтобы оценить вклады в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских частиц в равновесной компоненте, вычислим сначала их концентрации. Концентрация ультрарелятивистских частиц в горячей модели получается из выражения (VI.111) для функции распределения равновесной компоненты подстановкой

$$E(p) = p; \quad \mu_a = 0 \quad (\text{VI.118})$$

в формулу для определения плотности числа частиц (см. [216]):

$$n_a(t) = \frac{2S_a + 1}{2\pi^2} \int_0^\infty f_a(t, p) p^2 dp. \quad (\text{VI.119})$$

Таким образом найдем (см. [216]):

$$n_a(t) = \frac{(2S_a + 1) T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3) \quad (\text{VI.120})$$

Концентрация нерелятивистских равновесных частиц *при условии сохранения их числа* изменяется пропорционально  $a^{-3}(t)$ . Поэтому в условиях слабого нарушения равновесия отношение плотности нерелятивистских частиц к плотности реликтовых фотонов примерно постоянно (так как  $T \sim a(t)^{-1}$ ):

$$\frac{n_0(t)}{n_\gamma(t)} \approx \text{Const} = \delta \sim 10^{-10} \div 10^{-9}. \quad (\text{VI.121})$$

Вычисляя отношение вкладов в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских равновесных частиц, получим:

$$J_{non}/J_{ultra} \sim \frac{24\pi n_b^0}{m_b T^2} = \zeta(3) \delta \frac{64T(t)}{\pi m_b} \sim 10^{-9} \frac{T}{m_b}, \quad (\text{VI.122})$$

- отношение вкладов мало при  $T \ll 10^9 m_b$  и уменьшается со временем. Поэтому в дальнейшем вкладом нерелятивистских частиц в интеграл столкновений будем пренебрегать.

## VI.7 Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах

### VI.7.1 Релаксация сверхтепловых частиц на ультрарелятивистской стадии Вселенной

Подставляя полученное выражение (VII.58) для интеграла столкновений в кинетические уравнения (VII.34), получим кинетическое уравнение, описывающее эволюцию ультрарелятивистской сверхтепловой компоненты в равновесной космологической плазме:

$$\frac{\tilde{p}}{a} \frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = -\frac{4\pi \tilde{N}}{3} \frac{T^2(t)}{\Lambda(\tilde{p}T/2a)} \Delta f_a. \quad (\text{VI.123})$$

Кинетическое уравнение (VI.123) легко интегрируется в квадратурах. Для удобства в дальнейшем несколько уточним нормировку переменной  $\tilde{p}$ . При этом возникает необходимость соотнесения величин, используемых в неравновесной модели, с соответствующими величинами стандартного космологического сценария, поскольку все наблюдаемые космологические параметры интерпретированы уже в терминах SCS. При этом мы должны иметь перед глазами две *синхронные* модели Вселенной: реальную - неравновесную модель  $\mathcal{M}$  с макроскопическими параметрами  $P(t)$  и идеальную - равновесную модель  $\mathcal{M}_0$ , имеющую на данный момент времени  $t$  некоторые макроскопические параметры  $P_0(t)$ .

Рассмотрим Вселенную с ультрарелятивистским уравнением состояния (показатель баротропы  $\rho = 1/3$ )<sup>9</sup>:

$$\varepsilon = 3p. \quad (\text{VI.124})$$

Тогда согласно уравнениям Эйнштейна плотность энергии Вселенной на ультрарелятивистской стадии расширения изменяется по закону:

$$\varepsilon a^4 = \text{Const}; \quad \varepsilon = \frac{1}{32\pi t^2}, \quad (\text{VI.125})$$

а масштабный фактор изменяется по закону:

$$a(t) \sim t^{1/2}. \quad (\text{VI.126})$$

С другой стороны, плотность энергии равновесной плазмы определяется через ее температуру соотношением [1] (1.38):

$$\varepsilon_0 = N \frac{\pi^2 T^4}{15}. \quad (\text{VI.127})$$

Поэтому, если бы Вселенная была заполнена *только* равновесной плазмой, ее температура  $T_0(t)$  изменялась бы по закону (см. [265]):

$$N^{1/4} T_0(t) = \left( \frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} t^{-1/2} \quad (\sim a^{-1}), \quad (\text{VI.128})$$

<sup>9</sup>Заметим, что давление и импульс имеют одинаковые обозначения.

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

- здесь мы учитываем возможную слабую зависимость эффективного числа равновесных типов частиц от времени,  $N(t)$ . Итак, уточним формулу (VI.72) следующим образом:

$$p = \tilde{p} N^{1/4} T_0(t). \quad (\text{VI.129})$$

Согласно этой формуле смысл импульсной переменной  $\tilde{p}$  таков: *с точностью до числового множителя порядка единицы  $\tilde{p}$  есть отношение энергии частиц к их средней энергии на этот же момент времени в локально-равновесной ультрарелятивистской Вселенной.*

Таким образом, решая кинетическое уравнение (VI.123) с учетом соотношений (VII.33) и (VI.129), найдем его решение:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \exp \left[ -\frac{\xi(t, \tilde{p})}{\tilde{p}} \int_0^t \frac{y^2(t') dt'}{\sqrt{t'}} \right], \quad (\text{VI.130})$$

где:

$$\Delta f_a^0(\tilde{p}) = \Delta f_a(0, \tilde{p}),$$

- начальное отклонение от равновесия, введена безразмерная функция:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \quad (\text{VI.131})$$

и параметр, слабо зависящий от переменных  $t, \tilde{p}$ :

$$\xi(t, \tilde{p}) = \frac{4\pi \tilde{N}}{3\sqrt{N}} \left( \frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} \frac{1}{\Lambda(\tilde{p} T T_0/2)}. \quad (\text{VI.132})$$

Приближению  $p \gg p_T \approx T(t)$  соответствуют значения  $\tilde{p} \gg 1$ .

Поскольку  $T(t)$  - температура равновесной компоненты плазмы, а  $T_0(t)$  - температура на данный момент времени полностью равновесной Вселенной, всегда выполняется условие:

$$y(t) \leq 1. \quad (\text{VI.133})$$

Для того, чтобы быть правильным решением кинетических уравнений, функция  $\Delta f_a(t, \tilde{p})$  во все времена должна удовлетворять интегральному условию (VII.42). Поскольку согласно решению (VI.129) отклонение от равновесия функции распределения  $\Delta f_a(t, \tilde{p})$  строго убывает со временем, для справедливости решения (VI.129) достаточно, чтобы функция  $\Delta f_a(t, \tilde{p})$  удовлетворяла условию (VII.42) в начальный момент времени. Это дает:

$$\int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^2 d\tilde{p} \gg \frac{2}{N^{3/4}} y_0^3, \quad (\text{VI.134})$$

где  $y_0 = y(0) \leq 1$ .

### VI.7.2 Релаксация сверхтепловых частиц на нерелятивистской стадии Вселенной

Рассмотрим теперь Вселенную на нерелятивистском этапе расширения. В этом случае уравнение состояния есть

$$p = 0 \quad (\text{VI.135})$$

и масштабный фактор изменяется по закону:

$$a(t) \sim t^{2/3}. \quad (\text{VI.136})$$

При этом будем рассматривать рассеяние сверхтепловых частиц на равновесных безмассовых реликтовых частицах, которых в SCS примерно в  $10^9$  больше нерелятивистских частиц. Пусть  $t_0$  - момент смены ультрарелятивистского уравнения состояния нерелятивистским в неравновесной Вселенной и  $T_\gamma^0(t)$  - температура реликтовых фотонов в равновесной Вселенной. Тогда:

$$T_\gamma^0(t) = \left( \frac{45}{32\pi^3 N} \right)^{1/4} \frac{t_0^{1/6}}{t^{2/3}}. \quad (\text{VI.137})$$

Интегрируя кинетическое уравнение (VI.123), найдем в этом случае:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a(t_0, \tilde{p}) \exp \left[ -\frac{\chi(t, \tilde{p})}{\tilde{p}} \int_{t_0}^t \frac{y^2(t') dt'}{t'^{2/3}} \right], \quad (\text{VI.138})$$

где  $\Delta f_a(t_0, \tilde{p})$  определяется решением (VI.130), а

$$\chi(t, \tilde{p}) = \frac{4\pi \tilde{N} T_\gamma^0(t_0) t_0^{2/3}}{\Lambda(\frac{1}{2} \tilde{p} T_\gamma^0(t))} \quad (\text{VI.139})$$

- медленно меняющийся параметр,  $\tilde{N}$  определяется для безмассовых реликтовых частиц.

### VI.7.3 Релаксация сверхтепловых частиц в ультрарелятивистской плазме на инфляционной стадии Вселенной

Рассмотрим теперь инфляционную стадию расширения Вселенной, полагая плотность энергии плазмы малой по сравнению с плотностью энергии скалярного поля. Таким образом, масштабный фактор Вселенной изменяется по закону [1] (1.17)<sup>10</sup>:

$$a = a_1 e^{\Xi t}; \quad \varepsilon_S = \frac{3\Xi^2}{8\pi} = \text{Const}, \quad (\text{VI.140})$$

<sup>10</sup>Мы заменили в этой части раздела значение космологической постоянной  $\Lambda$  на  $\Xi$ , поскольку символ  $\Lambda$  у нас уже занят под обозначение логарифмического фактора сечения.

а температура равновесной компоненты изменяется по закону изменения физического импульса частиц  $T \sim a^{-1}$ . Предположим, что инфляционной стадии предшествовала ультрарелятивистская стадия, причем смена режима расширения произошла в момент времени  $t_1$ . Тогда на инфляционной стадии  $T = T_1 \exp(-\Xi(t - t_1))$ . Интегрируя кинетическое уравнение (VI.123) на инфляционной стадии, получим:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a(t_1, \tilde{p}) \exp \left[ -\frac{4\pi \tilde{N} T_1^2 a_1}{3\tilde{p} \Xi \Lambda} (1 - e^{-\Xi(t-t_1)}) \right] \quad (\text{VI.141})$$

При больших временах инфляции  $\Xi t \gg 1$  экспоненциально затухающим членом в (VI.141) можно пренебречь, и мы получим:

$$\frac{\Delta f_a(t, \tilde{p})}{\Delta f_a(t_1, \tilde{p})} \approx \exp \left[ -\frac{4\pi \tilde{N} T_1^2 a_1}{3\tilde{p} \Xi \Lambda} \right] = \exp \left[ -\frac{4\pi \tilde{N} T_1^2}{3p_1 \Xi \Lambda} \right], \quad (\text{VI.142})$$

где  $p_1$  – физический импульс на момент времени  $t_1$ . Таким образом, на инфляционной стадии отклонение функции распределения от равновесия практически не зависит от времени, совпадая при больших импульсах с распределением на момент смены режима расширения.

#### VI.7.4 Границы применимости квазиклассического приближения

Исследуем границы применимости рассматриваемой кинетической модели. Напомним, что космологическое время  $t$  вычисляется в планковских единицах. Поэтому возникает естественный вопрос, а можно ли пользоваться методами классической (неквантовой) механики на временах порядка планковских? Условием применимости квазиклассического описания частиц в космологической ситуации является соотношение, вытекающее из соотношения неопределенности Гейзенберга:

$$Et \gg 1. \quad (\text{VI.143})$$

В расширяющейся Вселенной кинетическая энергия частиц изменяется обратно пропорционально масштабному фактору. Таким образом, параметр квазиклассичности,  $\phi = Et$ , равен:

$$Et = \gamma \frac{a_1 t}{a(t)t_1} = \gamma \left( \frac{t}{t_1} \right)^{\frac{1+3\varrho}{3(1+\varrho)}}, \quad (\text{VI.144})$$

где  $\gamma = E_1 t_1$ . Отсюда следует, что при показателе баротропы  $\varrho > -1$  величина параметра квазиклассичности растет со временем, т.е., частицы становятся все более классическими, а на малых временах квазиклассичность может быть нарушена. В частности, для ультрарелятивистской Вселенной согласно (VI.128) и (VI.129):

$$E = p = \tilde{p} \left( \frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} t^{-1/2}. \quad (\text{VI.145})$$

## VI.7. Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах

Поэтому условие применимости квазиклассического описания частиц (VI.143) в случае ультррелятивистской Вселенной принимает вид:

$$t\tilde{p}^2 \gg \sqrt{\frac{32\pi^3}{45}} \approx 4.70. \quad (\text{VI.146})$$

При  $t \sim 1$  (планковское время) такое рассмотрение оправдано для достаточно больших значений конформного импульса  $\tilde{p} \gg 1$ , которые как раз и соответствуют сверхтепловым частицам. Таким образом, *квазиклассическое описание частиц применимо на планковских временах эволюции Вселенной с тем большей достоверностью, чем больше энергия частиц тепловой энергии.* Таким образом, описание эволюции сверхтепловой (неравновесной) компоненты не требует квантового рассмотрения на временах порядка планковских и даже меньших их.

### VI.7.5 Применимость статистического описания систем частиц в ранней Вселенной

Возникает и второй вопрос, насколько применимы методы статистического описания ансамбля частиц в ранней Вселенной? Строго говоря, для того, чтобы пользоваться понятиями функции распределения в классическом смысле, необходимо, чтобы внутри светового горизонта содержалось достаточно большое число частиц:

$$N_a(t) = \frac{4\pi}{3} n_a(t) * t^3 \gg 1. \quad (\text{VI.147})$$

Для тепловых частиц получим отсюда:

$$\frac{0,3\sqrt{t}}{N} > 1. \quad (\text{VI.148})$$

Т.е., строгое применение статистического подхода к системе частиц, находящихся в тепловом равновесии с нулевым химическим потенциалом, возможно при временах, больших планковских. Для сверхтепловых частиц  $n \sim n_a^0(t)/\mathcal{P}_0^3$ . Поэтому в этом случае условие (VI.147) принимает вид:

$$\frac{0,3\sqrt{t}}{N\mathcal{P}_0} > 1 \quad (\text{VI.149})$$

и, очевидно, вследствие условия  $\mathcal{P}_0 \gg 1$  может выполняться лишь во времена, гораздо больших планковских:  $t \gg 1$ . Однако, это формально правильное в общем случае рассуждение нуждается в существенном уточнении при рассмотрении космологических задач. Из квантовой теории поля следует, что условием применимости понятия матрицы плотности, сечения взаимодействия, вероятности взаимодействия является малость комптоновских размеров взаимодействующих частиц  $\lambda_k = 1/E$  по сравнению с характерным масштабом неоднородности системы. Применительно к космологической ситуации это опять-таки приводит к условию (VI.143). Поскольку кинетическая энергия частиц изменяется со временем обратно пропорционально масштабному фактору, условие Таким образом, внутри светового горизонта даже при временах гораздо меньших планковских

сверхтепловые взаимодействующие частицы локализованы в гораздо меньших, чем световые, объемах, поэтому для них внутри светового горизонта сохраняются понятия начального и конечного состояний, следовательно, и их вероятности находиться в этих состояниях можно вычислять обычным образом<sup>11</sup>. Вопрос, следовательно, заключается в том, насколько эти вероятности, реализованные в шарах, с радиусами порядка планковских, отличаются между собой, т.е., насколько достоверно на них можно сконструировать вероятность для макрообъемов, вмещающих большое число планковских шаров? Ясно, что понятие макроскопического наблюдателя в космологической ситуации корректно лишь при временах, гораздо больших планковских, причем объем прибора такого наблюдателя должен быть, во-первых, гораздо больше планковского, во-вторых, не больше объема светового горизонта и, в-третьих, - вмещать себя достаточно большое число частиц. Таким образом, время макроскопического наблюдения, когда удастся провести статистические измерения с достаточной достоверностью, должно удовлетворять условию (VI.149). Тем не менее, полученное на этот момент времени статистическое распределение пригодно и для более ранних времен, если у нас есть гарантии того, что это распределение сохраняется в среднем достаточно однородным, т.е., если характерный размер неоднородности системы,  $\lambda_1 = \lambda(t_1)$ , на момент измерения  $t_1$  гораздо больше светового горизонта:

$$\lambda_1 \gg t_1 \Leftrightarrow h_1 = \frac{\lambda_1}{t_1} \gg 1. \quad (\text{VI.150})$$

Но все масштабы расширяющейся Вселенной изменяются пропорционально масштабному фактору  $a(t)$ , поэтому текущее значение параметра однородности,  $h(t) = \lambda(t)/t$ , равно:

$$h(t) = h_1 \left( \frac{t_1}{t} \right)^{\frac{1+3\varrho}{3(1+\varrho)}}. \quad (\text{VI.151})$$

Поэтому при значении коэффициента баротропы  $\varrho > -1$  в уравнении состояния на более ранних временах  $t < t_1$  сохраняется отношение  $h(t) > h_1 \gg 1$ , - т.е., сфера внутри светового горизонта на ранних временах является более однородной чем на более поздних временах - результат, хорошо известный из теории возмущений изотропного мира Лифшица-Халатникова (см., например, [47]). Но это означает, что макроскопическое значение плотности вероятности, полученное усреднением локальных вероятностей внутри световых шаров в более ранние, чем  $t_1$ , моменты времени правильно описывает макроскопическую функцию распределения. Этот важный для статистики результат обеспечивается однородностью мира Фридмана и локальной однородностью распределения частиц. Заметим, что при достижении параметра неоднородности значения  $h_1$  мы имеем полное право рассматривать неоднородности системы в рамках макроскопической статистической модели, поэтому соотношение (VI.151) на временах, больших  $t_1$ , теряет смысл. Заметим также, что параметры квазиклассичности и однородности меняются со временем обратно пропорционально друг другу.

<sup>11</sup>Если только энергии в этих состояниях оказываются не меньше тепловых.

### VI.7.6 Достаточность учета четырехчастичных столкновений для описания взаимодействий сверхтепловых частиц

Может также возникнуть вопрос, насколько обоснованной является модель четырехчастичных взаимодействий для сверхтепловых частиц в условиях  $\tilde{p} \gg 1$  и малого числа сверхтепловых частиц по сравнению с тепловыми. Помимо четырехчастичных реакций вида [1] (2.11) можно рассмотреть  $n$ -частичные реакции типа:

$$a \rightleftharpoons b + c, \quad (n = 3); \quad (\text{VI.152})$$

$$a + b + c \rightleftharpoons d + e, \quad (n = 5); \quad (\text{VI.153})$$

$$\dots \quad \dots \quad (\dots).$$

Рассмотрим сначала 3-х частичные реакции. Такие реакции возможны либо для нестабильных частиц «а», например, промежуточных  $W$ -бозонов в электрослабых взаимодействиях  $SU(2) \times U(1)$ , хиггсовых бозонов в  $SU(5)$ -моделях, либо для стабильных частиц в сильных внешних полях. Примером последнего случая является реакция образования фотоном электронно-позитронной пары в поле ядра. Заметим, что в этом случае, строго говоря, реакция также является четырехчастичной, в которой участвует еще один виртуальный фотон. В этом, последнем, случае сечение реакции оказывается пропорциональной кубу константы взаимодействия и обратно пропорциональна кубу энергии частиц, что делает такие реакции маловероятными по сравнению с четырехчастичными. В случае же нестабильных частиц реакция распада происходит по часам внешнего наблюдателя во время:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2}} = \tau_0 \frac{E}{m}, \quad (\text{VI.154})$$

где  $\tau_0$  - время полураспада в собственной системе отсчета. Для ультрарелятивистских частиц, интегрируя соотношение:

$$\tau = \int_0^{\tau_0} \frac{p}{m} dt$$

с учетом зависимости импульса частиц от космологического времени, получим:

$$\tau = 2\tau_0 \frac{p(\tau_0)}{m}. \quad (\text{VI.155})$$

Положим  $p(t_{pl}) = Km_{pl}$ , где для сверхтепловых частиц  $K \gg 1$ . Очевидно, что для обычных элементарных частиц  $\tau_0/t_{pl} = K1 \gg 1$  и  $m/m_{pl} = 1/K2 \ll 1$ . Таким образом:

$$\tau = KK_1K_2\tau_0 \gg \tau_0. \quad (\text{VI.156})$$

Так, например, для  $SU(5)$ -модели  $m_{pl}/m \sim 10^5$ ,  $\tau_0/t_{pl} \sim 10^5$ . Поэтому, например, при  $p(\tau_0)/m \sim 10^{10}$  получим из (VI.156)  $\tau \sim 10^{20}\tau_0$ , что дает космологическое время порядка  $10^{-23}$  sec, тогда как все реакции кварково-глюонного цикла прекращаются во времена порядка  $10^{-38}$  sec. Таким образом, трехчастичные реакции не вносят сколь-нибудь заметного вклада в процесс установления термодинамического равновесия. Заметим, однако, что при этом такие реакции могут оказаться важными для формирования конечного состава сверхтепловой компоненты, так как именно они могут приводить к ливневым процессам, в результате которых увеличивается число реликтовых частиц.

## VI.8 Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах

Подставляя полученное выражение (VI.117) для интеграла столкновений в кинетические уравнения (VI.104), получим кинетическое уравнение, описывающее эволюцию ультрарелятивистской сверхтепловой компоненты в равновесной космологической плазме:

$$p \left( \frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial \Delta f_a}{\partial p} \right) = -\frac{\pi \tilde{N}}{3} \frac{T^2(t)}{1 + \ln^2 pT/2} \Delta f_a. \quad (\text{VI.157})$$

Учитывая тот факт, что переменная:

$$\mathcal{P} = a(t)p, \quad (\text{VI.158})$$

является интегралом движения [52], перейдем в уравнении (VI.157) к переменным  $t, \mathcal{P}$ ; при этом для любой функции  $\Psi(t, p)$  имеет место соотношение:

$$\frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial p} = \frac{\partial \Psi(t, \mathcal{P})}{\partial t}. \quad (\text{VI.159})$$

При такой подстановке кинетическое уравнение (VI.157) легко интегрируется в квадратурах. Для удобства в дальнейшем несколько уточним нормировку переменной  $\mathcal{P}$ . При этом возникает необходимость соотнесения величин, используемых в неравновесной модели, с соответствующими величинами стандартного космологического сценария, поскольку все наблюдаемые космологические параметры интерпретированы уже в терминах СКС. При этом мы должны иметь перед глазами две *синхронные* модели Вселенной: реальную - неравновесную модель  $\mathcal{M}$  с макроскопическими параметрами  $P(t)$  и идеальную - равновесную модель  $\mathcal{M}_0$ , имеющую на данный момент времени  $t$  некоторые макроскопические параметры  $P_0(t)$ .

### VI.8.1 Ультрарелятивистская Вселенная

Рассмотрим Вселенную с ультрарелятивистским уравнением состояния<sup>12</sup> (показатель баротропы  $\rho = 1/3$ ):

$$\varepsilon = 3p. \quad (\text{VI.160})$$

Тогда согласно уравнениям Эйнштейна плотность энергии Вселенной изменяется по закону:

$$\varepsilon a^4 = \text{Const}; \quad \varepsilon = \frac{1}{32\pi t^2}, \quad (\text{VI.161})$$

а масштабный фактор изменяется по закону:

$$a(t) \sim t^{1/2}. \quad (\text{VI.162})$$

<sup>12</sup>Заметим, что давление и импульс имеют одинаковые обозначения.

### VI.8. Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах

С другой стороны, плотность энергии равновесной плазмы определяется через ее температуру соотношением (см. [216]):

$$\varepsilon_0 = \mathcal{N} \frac{\pi^2 T^4}{15}. \quad (\text{VI.163})$$

Поэтому, если бы Вселенная была заполнена *только* равновесной плазмой, ее температура  $T_0(t)$  изменялась бы по закону (см. [216]):

$$\mathcal{N}^{1/4} T_0(t) = \left( \frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} t^{-1/2} \quad (\sim a^{-1}), \quad (\text{VI.164})$$

- здесь мы учитываем возможную слабую зависимость эффективного числа равновесных типов частиц от времени,  $\mathcal{N}(t)$ . Итак, уточним формулу (VI.158) следующим образом:

$$p = \mathcal{P} \mathcal{N}^{1/4} T_0(t). \quad (\text{VI.165})$$

Согласно этой формуле смысл импульсной переменной  $\mathcal{P}$  таков: *с точностью до числового множителя порядка единицы  $\mathcal{P}$  есть отношение энергии частиц к их средней энергии на этот же момент времени в локально-равновесной ультрарелятивистской Вселенной.*

Таким образом, решая кинетическое уравнение (VI.157) с учетом соотношений (VI.159) и (VI.165), найдем его решение:

$$\Delta f_a(t, \mathcal{P}) = \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \exp \left[ -\frac{\xi(t, \mathcal{P})}{\mathcal{P}} \int_0^t \frac{y^2(t') dt'}{\sqrt{t'}} \right], \quad (\text{VI.166})$$

где:

$$\Delta f_a^0(\mathcal{P}) = \Delta f_a(0, \mathcal{P}),$$

- начальное отклонение от равновесия, введена безразмерная функция:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \quad (\text{VI.167})$$

и параметр, слабо зависящий от переменных  $t, \mathcal{P}$ :

$$\xi(t, \mathcal{P}) = \frac{\pi \tilde{\mathcal{N}}}{3\sqrt{\mathcal{N}}} \left( \frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} \frac{1}{\Lambda(\mathcal{P} T T_0/2)}; \quad (\text{VI.168})$$

$$\Lambda(x) = 1 + \ln^2 x. \quad (\text{VI.169})$$

Приближению  $p \gg p_T \approx T(t)$  соответствуют значения  $\mathcal{P} \gg 1$ .

Поскольку  $T(t)$  - температура равновесной компоненты плазмы, а  $T_0(t)$  - температура на данный момент времени полностью равновесной Вселенной, всегда выполняется условие:

$$y(t) \leq 1. \quad (\text{VI.170})$$

Для того, чтобы быть правильным решением кинетических уравнений, функция  $\Delta f_a(t, \mathcal{P})$  во все времена должна удовлетворять интегральному условию (VI.110). Поскольку согласно решению (VI.165) отклонение от равновесия функции распределения  $\Delta f_a(t, \mathcal{P})$  строго убывает со временем, для справедливости решения (VI.165) достаточно, чтобы функция  $\Delta f_a(t, \mathcal{P})$  удовлетворяла условию (VI.110) в начальный момент времени. Это дает:

$$\int_0^{\infty} \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P} \gg \frac{2}{\mathcal{N}^{3/4}} y_0^3, \quad (\text{VI.171})$$

где  $y_0 = y(0) \leq 1$ .

В качестве примера рассмотрим релаксацию сверхтепловой компоненты при первоначальном распределении в виде ступенчатой функции для плотности числа частиц:

$$\Delta f^0(\mathcal{P}) = \begin{cases} \frac{\pi^2 \Delta \tilde{N}}{\mathcal{P}_0 \mathcal{P}^2}, & \mathcal{P} \leq \mathcal{P}_0; \\ 0, & \mathcal{P} > \mathcal{P}_0; \end{cases}, \quad (\text{VI.172})$$

так что:

$$\Delta \tilde{N} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \Delta f^0(\mathcal{P}) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P} \quad (\text{VI.173})$$

- первоначальная конформная плотность числа неравновесных частиц. На Рис. 20 показана эволюция сверхтепловой компоненты для такого распределения, при этом мы положили  $y(t) \equiv 1$ .

Напомним, что космологическое время  $t$  вычисляется в планковских единицах. Поэтому возникает естественный вопрос, а можно ли пользоваться методами классической (неквантовой) кинетики на временах порядка нескольких планковских? Условием применимости квазиклассического описания частиц в космологической ситуации является соотношение, вытекающее из соотношения неопределенности Гейзенберга:

$$Et \gg 1. \quad (\text{VI.174})$$

Согласно (VI.164) и (VI.165):

$$E = p = \mathcal{P} \left( \frac{45}{32\pi^3} \right)^{1/4} t^{-1/2}. \quad (\text{VI.175})$$

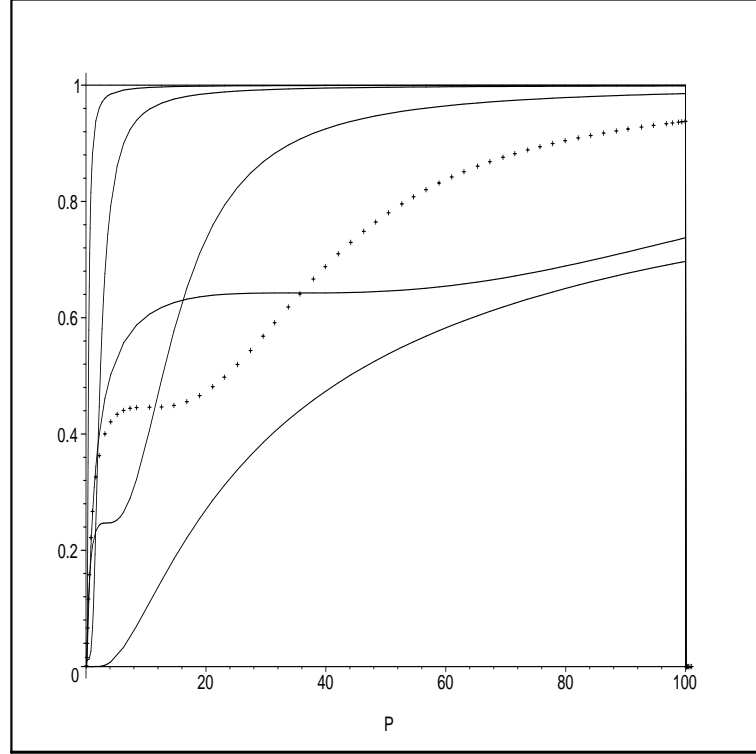
Поэтому условие применимости квазиклассического описания частиц (VI.174) принимает вид:

$$t\mathcal{P}^2 \gg \sqrt{\frac{32\pi^2}{45}} \approx 2,65. \quad (\text{VI.176})$$

При  $t \sim 1$  такое рассмотрение оправдано для достаточно больших значений конформного импульса  $\mathcal{P} \gg 1$ , которые как раз и соответствуют сверхтепловым частицам. Таким образом, *квазиклассическое описание частиц применимо на планковских временах эволюции*

## VI.8. Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах

Вселенной с тем большей достоверностью, чем больше энергия частиц тепловой. Таким образом, описание эволюции сверхтепловой (неравновесной) компоненты не требует квантового рассмотрения.



**Рис. 20.** Релаксация сверхтепловой компоненты для распределения (VI.172) в предположении  $y(t) = 1$  при  $\mathcal{P}_0 = 100$ ,  $\tilde{\mathcal{N}}/\sqrt{\mathcal{N}} = 10$ . Показана относительная величина функции распределения плотности числа частиц по конформным энергиям  $\mathcal{P}$ . Сверху вниз (по левому краю рисунка)- сплошные линии:  $t = 0$ ,  $t = 0,01$ ,  $t = 0,1$ ,  $t = 1$ ,  $t = 10$  и  $t = 100000$ ; пунктирная линия -  $t = 3$ . Время измеряется в секундах.

### VI.8.2 Нерелятивистская Вселенная

Рассмотрим теперь Вселенную на нерелятивистском этапе расширения. В этом случае уравнение состояния есть

$$p = 0 \tag{VI.177}$$

и масштабный фактор изменяется по закону:

$$a(t) \sim t^{2/3}. \tag{VI.178}$$

При этом будем рассматривать рассеяние сверхтепловых частиц на равновесных безмассовых реликтовых частицах, которых в СКС примерно в  $10^9$  больше нерелятивистских частиц. Пусть  $t_0$  - момент смены ультрарелятивистского уравнения состояния нереляти-

вистским в неравновесной Вселенной и  $T_\gamma^0(t)$  - температура реликтовых фотонов в равновесной Вселенной. Тогда:

$$T_\gamma^0(t) = \left( \frac{45}{32\pi^3\mathcal{N}} \right)^{1/4} \frac{t_0^{1/6}}{t^{2/3}}. \quad (\text{VI.179})$$

Интегрируя кинетическое уравнение (VI.157), найдем в этом случае:

$$\Delta f_a(t, \mathcal{P}) = \Delta f_a(t_0, \mathcal{P}) \exp \left[ -\frac{\chi(t, \mathcal{P})}{\mathcal{P}} \int_{t_0}^t \frac{y^2(t') dt'}{t'^{2/3}} \right], \quad (\text{VI.180})$$

где  $\Delta f_a(t_0, \mathcal{P})$  определяется решением (VI.166), а

$$\chi(t, \mathcal{P}) = \frac{\pi \tilde{\mathcal{N}} T_\gamma^0(t_0) t_0^{2/3}}{\Lambda(\frac{1}{2}\mathcal{P}T_\gamma^0(t))} \quad (\text{VI.181})$$

- медленно меняющийся параметр,  $\tilde{\mathcal{N}}$  определяется для безмассовых реликтовых частиц.

## VI.9 Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

### VI.9.1 Уравнение энергобаланса

Несмотря на малое по сравнению с равновесным число неравновесных частиц, энергия, заключенная в неравновесном хвосте, может оказаться значительно большей энергии равновесной компоненты, если существенные искажения распределения имеются в сверхтепловой области, которым отвечают большие значения импульсной переменной  $\mathcal{P} \gg 1$ . Сверхтепловые частицы, сталкиваясь с равновесными, передают им свою энергию и тем самым разогревают равновесную компоненту плазмы. Для нахождения истинной температуры,  $T(t)$ , ультрарелятивистской плазмы с учетом подогрева ее сверхтепловыми частицами воспользуемся уравнением (VI.161), являющегося следствием закона сохранения энергии и определяющего зависимость плотности энергии,  $\varepsilon$ , ультрарелятивистской Вселенной от космологического времени. Эта плотность энергии складывается из плотности энергии равновесной плазмы,  $\varepsilon_0$  (VI.162), и плотности энергии сверхтепловой компоненты,  $\varepsilon_1$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \quad (\text{VI.182})$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\mathcal{N}T_0^4}{\pi^2} \sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty \Delta f_a(t, \mathcal{P}) \mathcal{P}^3 d\mathcal{P}. \quad (\text{VI.183})$$

Для дальнейшего удобно ввести безразмерную переменную  $\sigma(t)$ :

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} \leq 1. \quad (\text{VI.184})$$

### VI.9. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

Поскольку полная плотность энергии  $\varepsilon(t)$  с другой стороны определяется четвертой степенью температуры,  $T_0(t)$ , полностью равновесной Вселенной, а плотность энергии равновесной компоненты  $\varepsilon_0(t)$  - четвертой степенью температуры  $T(t)$ , введенная нами безразмерная переменная связана простым соотношением с безразмерной переменной  $y(t) = T(t)/T_0(t)$ , введенной нами ранее (VI.167):

$$\sigma(t) = y^4(t), \quad (\text{VI.185})$$

откуда сразу следует неравенство (VI.170).

Таким образом из (VI.182) с учетом решения (VI.166) для неравновесной функции распределения получим интегральное уравнение относительно функции  $y(t)$ , которое в дальнейшем будем называть *уравнением энергодбаланса*:

$$y^4 + \frac{15}{\pi^4} \sum_a (2S_a + 1) \times \\ \times \int_0^\infty \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \exp \left[ -\frac{\xi(t, \mathcal{P})}{\mathcal{P}} \int_0^t \frac{y^2(t') dt'}{\sqrt{t'}} \right] d\mathcal{P} = 1. \quad (\text{VI.186})$$

Из этого уравнения в нулевой момент времени получим соотношение:

$$\frac{15}{\pi^4} \sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P}) d\mathcal{P} = 1 - \sigma_0. \quad (\text{VI.187})$$

#### VI.9.2 Решение уравнения энергодбаланса

При заданных функциях  $\Delta f_a^0(\mathcal{P})$  уравнение (VI.186) всегда интегрируется с логарифмической точностью в квадратурах. Действительно, вместо переменной  $t$  и функции  $y(t)$  введем новые безразмерные переменную  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\mathcal{P}}_0} \sqrt{t} \quad (\text{VI.188})$$

и функцию  $Z(\tau)$ :

$$Z(\tau) = 2 \int_0^\tau y^2(\tau') d\tau', \quad (\text{VI.189})$$

где  $\bar{\xi} = \xi(\bar{\mathcal{P}}_0)$ , а

$$\bar{\mathcal{P}}_0 = \frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\mathcal{P} \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P})}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\mathcal{P} \mathcal{P}^2 \Delta f_a^0(\mathcal{P})} \quad (\text{VI.190})$$

- среднее значение импульсной переменной  $\mathcal{P}$  в момент времени  $t = 0$ . При этом получим:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} Z'_\tau}; \quad Z(0) = 0; \quad Z'_\tau(0) = 2\sqrt{\sigma_0}, \quad (\text{VI.191})$$

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

где  $\sigma_0 = \sigma(0) = y^2(0)$ . Тогда после вычисления интеграла с логарифмической точностью уравнение (VI.186) с учетом соотношения (VI.187) приводится к виду [199]:

$$Z'_\tau = 2\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)}, \quad (\text{VI.192})$$

где введена функция  $\Phi(Z)$ :

$$\Phi(Z) = \frac{\bar{\mathcal{P}}(t)}{\bar{\mathcal{P}}(0)} = \frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\mathcal{P} \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P}) e^{-Z\bar{\mathcal{P}}_0/\mathcal{P}}}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\mathcal{P} \mathcal{P}^3 \Delta f_a^0(\mathcal{P})}. \quad (\text{VI.193})$$

В дальнейшем удобно перейти к новой безразмерной импульсной переменной:

$$\rho = \frac{\mathcal{P}}{\bar{\mathcal{P}}_0}, \quad (\text{VI.194})$$

так что:

$$1 = \frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^2 \Delta f_a^0(\rho)} \Rightarrow \bar{\rho}_0 \equiv 1. \quad (\text{VI.195})$$

Тогда:

$$\Phi(Z) = \frac{\bar{\rho}(\tau)}{\bar{\rho}(0)} = \frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-Z/\rho}}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}. \quad (\text{VI.196})$$

Очевидно, что  $\Phi(Z)$  является монотонно убывающей функцией  $Z$ , так как всегда

$$\Phi'_Z < 0, \quad Z \in (0, \infty), \quad (\text{VI.197})$$

причем  $\Phi(0) = 1$  и  $\Phi(\infty) = 0$ . Отсюда следует:

$$0 \leq \Phi(Z) \leq 1. \quad (\text{VI.198})$$

Из определения (VI.196) также следует, что всегда

$$\Phi''_{ZZ} > 0, \quad (Z \in (0, \infty)), \quad (\text{VI.199})$$

поэтому график функции  $\Phi(Z)$  вогнутый. Вследствие строгой монотонности и непрерывной дифференцируемости функции  $\Phi(Z)$  согласно уравнению (VI.195) функция  $Z(\tau)$  вместе со своей первой производной являются монотонно возрастающими функциями переменной  $x$ . Интегрируя уравнение (VI.195), получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^Z \frac{dU}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)\Phi(U)}} = \tau. \quad (\text{VI.200})$$

### VI.9. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

Указанные свойства монотонности функций  $\Phi(Z)$  и  $Z(\tau)$  гарантируют нам то, что уравнение (VI.200) при каждом заданном значении  $\tau$  имеет единственное решение  $Z(\tau)$ . При найденном значении функции  $Z(\tau)$  значение температуры  $T(t)$  (или  $y(t)$ ) равновесной компоненты можно получить согласно (VI.194) и (VI.195) по формуле:

$$y = [1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)]^{1/4}. \quad (\text{VI.201})$$

Таким образом, задача о подогреве равновесной компоненты плазмы формально решена.

Заметим, что условие применимости приближения слабого нарушения ЛТР (VI.171) в терминах введенных здесь величин  $\bar{\mathcal{P}}_0$  и  $\sigma_0$  принимает вид:

$$\mathcal{N}^{1/4}\sigma_0^{3/4}\bar{\mathcal{P}}_0 \gg 1 - \sigma_0. \quad (\text{VI.202})$$

### VI.9.3 Исследование процесса установления теплового равновесия

Перейдем теперь к исследованию полученного решения.

#### Асимптотическое поведение при малых временах

Рассмотрим сначала асимптотическое поведение решений при малых космологических временах:

$$t \rightarrow 0 \Rightarrow \tau \ll 1. \quad (\text{VI.203})$$

Разлагая подынтегральное выражение в правой части (VI.196) в ряд Тейлора по степеням малости  $Z$ , получим с учетом определения (VI.193) асимптотическое разложение функции  $\Phi(Z)$ :

$$\Phi(Z) = 1 - Z + O^2(Z). \quad (\text{VI.204})$$

Подставляя (VI.204) в уравнение (VI.192) и интегрируя полученное уравнение с учетом начальных условий (VI.191), найдем асимптотическое при малых временах решение:

$$Z = \tau\sqrt{\sigma_0} + \tau^2(1 - \sigma_0), \quad (\text{VI.205})$$

откуда с учетом (VI.191) получим:

$$y(t) = \sqrt{\sqrt{\sigma_0} + \tau(1 - \sigma_0)}. \quad (\text{VI.206})$$

Случай  $\sigma_0 \ll 1$  соответствует малой плотности энергии равновесной компоненты по сравнению с плотностью энергии неравновесной компоненты плазмы в момент времени  $t = 0$ . Согласно (VI.202) рассмотрение этого случая оправдано для достаточно больших значений  $\bar{\mathcal{P}}_0$ :

$$\bar{\mathcal{P}}_0 \gg \sigma_0^{-3/4}. \quad (\text{VI.207})$$

В этом случае получим из (VI.206) асимптотический закон изменения температуры в ранней Вселенной:

$$T(t) = T_\gamma^0(t) \left( \frac{\bar{\xi}}{\bar{\mathcal{P}}_0} \right)^{1/2} t^{1/4} \sim t^{-1/4} \quad (\text{VI.208})$$

- температура плазмы падает медленнее, чем в СКС, но на каждый данный момент времени реальная температура ниже, чем соответствующая температура СКС:

$$y(t) \leq 1 \Rightarrow T(t) \leq T_0(t), \quad (\text{VI.209})$$

и сравнивается с последней в некоторый момент времени  $\bar{t}$ . Найдем это время. Подставляя (VI.208) в решение (VI.166), найдем закон эволюции распределения сверхтепловых частиц на ранней стадии Вселенной:

$$\Delta f_a(t, \mathcal{P}) = \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \exp\left(-\frac{\bar{\xi}^2 t}{\bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}}\right). \quad (\text{VI.210})$$

Согласно (VI.208) и (VI.210) ЛТР в целом восстанавливается во времена

$$t > \bar{t} = \left(\frac{\bar{\mathcal{P}}_0}{\bar{\xi}}\right)^2, \quad (\text{VI.211})$$

- это и есть время установления равновесия. Температура плазмы при этом достигает своего равновесного значения  $T_0(t)$  (при этом все время падая со временем). Однако, для частиц с энергиями, большими средней  $\bar{\mathcal{P}}_0$ , равновесие еще не достигнуто и в это время.

### Асимптотическое поведение при больших временах в ультрарелятивистской Вселенной

Полагая  $t > \bar{t}$  и, следовательно,  $y(t) \approx 1$ , получим асимптотику (VI.166) на больших временах:

$$\Delta f_a(t, \mathcal{P}) = \Delta f_a^0(\mathcal{P}) \exp\left(-2\frac{\xi(\mathcal{P})\sqrt{t}}{\mathcal{P}}\right); \quad (\text{VI.212})$$

таким образом, время установления теплового равновесия для частиц с импульсом  $\mathcal{P}$  есть:

$$t_{\mathcal{P}} = \left[\frac{\mathcal{P}}{\xi(t, \mathcal{P})}\right]^2 \approx \left(\frac{\mathcal{P}}{\bar{\mathcal{P}}_0}\right)^2 t. \quad (\text{VI.213})$$

Предположим, что в области больших значений  $\mathcal{P}$  начальное распределение сверхтепловых частиц экстраполируется степенным законом:

$$\Delta f_a^0(\mathcal{P}) \sim \mathcal{P}^{-\lambda}; \quad (\mathcal{P} \gg 1; \lambda > 4). \quad (\text{VI.214})$$

Тогда средняя энергия сверхтепловых частиц,  $\overline{VIII.E_1}(t)$ , для которых тепловое равновесие к моменту времени  $t$  еще не достигнуто, равна:

$$\overline{E_1}(t) = \xi(t, \mathcal{P}) T_0(t) \sqrt{t} \approx \frac{1}{\Lambda(T_0^2(t) \bar{\mathcal{P}}_0)} \sim \text{Const} \quad (\text{VI.215})$$

- практически не зависит от времени. Выше мы отмечали, что на современной стадии  $1/\Lambda \sim \alpha^2$ , где  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры. Таким образом, получаем из (VI.215) оценку:

$$\overline{E_1}(t) \sim 10^{-4} \quad (\text{VI.216})$$

- в обычных единицах  $\overline{E_1}(t) \sim 10^{15}$  Gev - т.е., частицы с энергией порядка и выше характерной энергии Великого объединения всегда остаются неравновесными. Этот вывод является принципиально важным для космологических сценариев.

## VI.9. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

### Асимптотическое поведение при больших временах в нерелятивистской Вселенной

Рассмотрим теперь эволюцию сверхтепловых ультрарелятивистских частиц в нерелятивистской Вселенной, в которой тепловое равновесие в среднем уже восстановлено. Полагая в этом случае  $y = 1$  в выражении (VI.180) для функции распределения сверхтепловых частиц, получим:

$$\Delta f_a(t, \mathcal{P}) = \Delta f_a(t_0, \mathcal{P}) \times \exp \left\{ -\frac{3(\pi\mathcal{N})^{1/4}\chi(\mathcal{P})}{\mathcal{P}} \sqrt{t_0} \left[ \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/3} - 1 \right] \right\}, \quad (\text{VI.217})$$

- распределение сверхтепловых частиц эволюционирует медленнее, чем (VI.212). Время установление теплового равновесия для частиц с импульсом  $\mathcal{P}$  в этом случае равно:

$$t_{\mathcal{P}} \simeq \frac{1}{\sqrt{t_0}} \left[ \frac{\mathcal{P}}{\xi(t, \mathcal{P})} \right]^3, \quad (\text{VI.218})$$

а средняя энергия сверхтепловых частиц медленно падает с течением времени:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1(t) &\simeq \frac{\bar{\mathcal{N}}}{\sqrt{\mathcal{N}\Lambda(T_0^2(t)\mathcal{P}/2)}} \left( \frac{t_0}{t} \right)^{1/3} \sim \\ &\sim 10^{15} \left( \frac{t_0}{t} \right)^{1/3} \text{Gev}. \end{aligned} \quad (\text{VI.219})$$

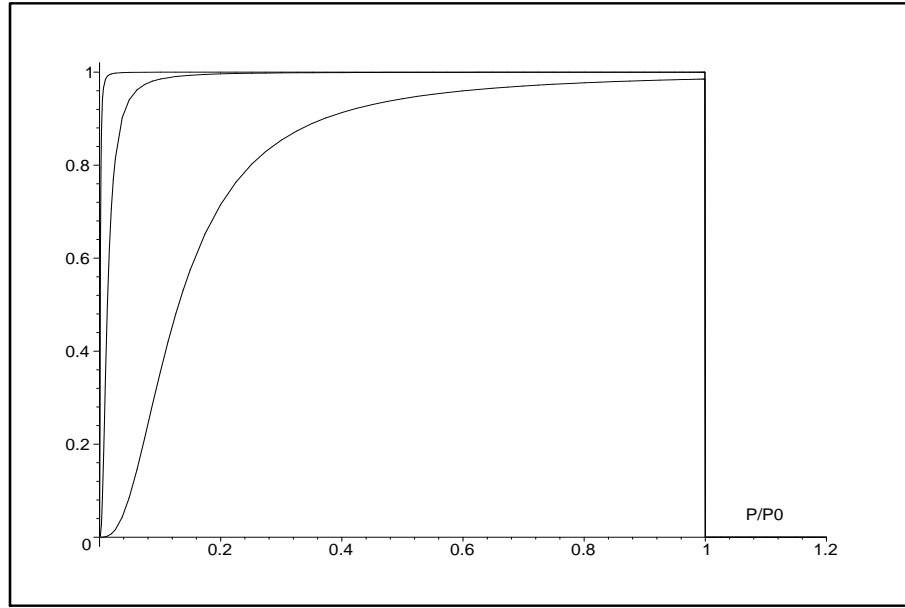
В современную эпоху эта величина порядка  $10^{12} \div 10^{13} \text{Gev}$  при вариации  $t_0$  в пределах  $10^9 \div 10^{12} \text{sec}$ .

### Численная модель

Перейдем теперь от оценок к численным расчетам. Представим первоначальное отклонение функции распределения от равновесия в форме:

$$\Delta f^0(x) = \frac{A}{\mathcal{P}_0^3(k^2 + x^2)^{3/2}} \chi(1 - x), \quad k \rightarrow 0, \quad (\text{VI.220})$$

где  $\chi(z)$  - функция Хевисайда (ступенчатая функция),  $x = \mathcal{P}/\mathcal{P}_0$  - безразмерная импульсная переменная,  $A$ ,  $\mathcal{P}_0$  и  $k$  - некоторые параметры; параметр  $k$  введен для обеспечения сходимости всех моментов функции распределения в области малых значений импульса. При этом функция распределения плотности энергии сверхтепловых частиц имеет форму, близкую к спектру так называемого *белого шума*, когда все значения энергии равновероятны (см. Рис. 21 и [270]).



**Рис. 21.** Начальное отклонение функции распределения энергии сверхтепловых частиц  $\Delta f^0(x)x^3$  от равновесия по формуле (VI.220), снизу вверх:  $k = 0, 1$ ,  $k = 0, 01$ ,  $k = 0, 001$ .

Вычисляя плотность числа частиц относительно распределения (VI.220), найдем согласно (VI.119):

$$n_1(t) = \frac{A(2S_a + 1)\mathcal{N}^{3/4}}{2\pi^2} T_0^3(t) \left( \ln \frac{k}{\sqrt{1+k^2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right).$$

Таким образом, получим в пределе:

$$n_1(t) \simeq A \frac{(2S_a + 1)\mathcal{N}^{3/4}}{2\pi^2} T_0^3(t) \ln \frac{2}{k} \quad (k \rightarrow 0).$$

откуда следует, для выполнения условия (VI.110) во все времена необходимо и достаточно выполнение условия:

$$A\mathcal{N}^{3/4} \ln \frac{2}{k} \ll 2\sigma_0^{3/2} \zeta(3).$$

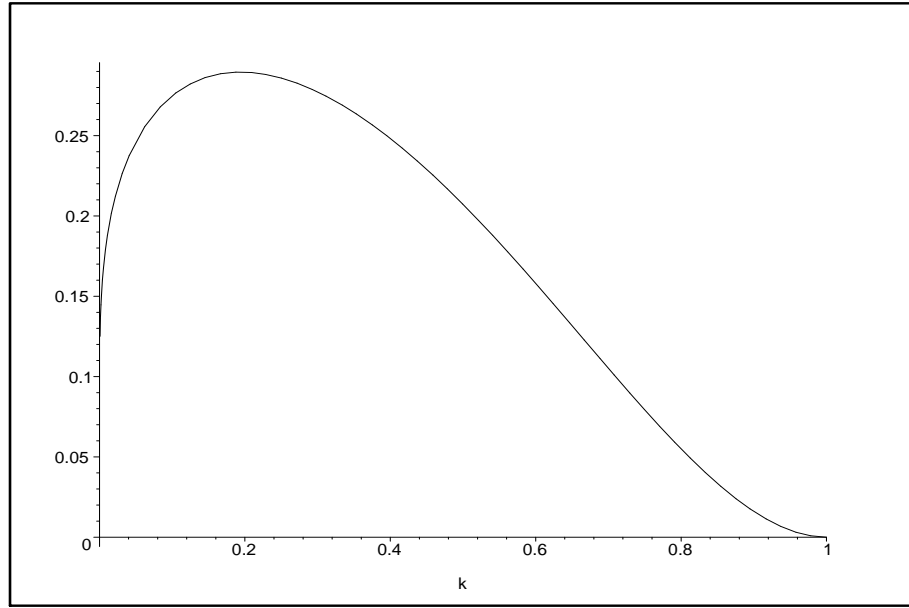
Вычисляя теперь плотность энергии относительно распределения (VI.220), найдем:

$$\varepsilon_1(t) = A \frac{\mathcal{N} T_0^4(t) (2S + 1)}{\pi^2} \mathcal{P}_0 (1 - k)^2.$$

Таким образом, с учетом (VI.165) получим зависимость среднего значения импульсной переменной через параметры  $\mathcal{P}_0$  и  $k$  (Рис. 22):

$$\bar{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0 \frac{(1 - k)^2}{\ln \frac{k}{\sqrt{1+k^2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}$$

VI.9. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами



**Рис. 22.** Зависимость относительного среднего переменной  $\bar{\mathcal{P}}_0/\mathcal{P}_0$  от параметра  $k$  распределения (VI.220).

Тогда уравнение энергобаланса (VI.182) или (VI.186) при  $t \rightarrow 0$  приводят к соотношению между параметрами распределения (VI.220):

$$\frac{15}{\pi^4} A(2S + 1) \mathcal{P}_0 (1 - k)^2 = 1 - \sigma_0. \quad (\text{VI.221})$$

Таким образом, должно выполняться условие:

$$A \mathcal{P}_0 < \frac{\pi^4}{30}, \quad (\text{VI.222})$$

налагающее ограничение на параметры модели. Вычисляя функцию  $\Phi(Z)$  относительно распределения (VI.220) согласно формуле (VI.196), найдем, переходя к пределу  $k \rightarrow 0$ :

$$\Phi(Z) = e^{-Z} + \text{Ei}(-Z), \quad (\text{VI.223})$$

где  $\text{Ei}(z)$  - интегральная показательная функция [86]:

$$\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt, \quad |\arg(-z)| < \pi. \quad (\text{VI.224})$$

Уравнение (VI.200) при учете соотношения (VI.224) принимает вид:

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)(\exp(-u) + u \text{Ei}(-u))}}, \quad (\text{VI.225})$$

где  $\tau = x/\mathcal{P}_0$ . Если бы мы могли проинтегрировать (VI.225) и найти зависимость  $\theta(\tau) \rightarrow Z(x)$ , то нужную нам зависимость  $y(x)$  мы смогли бы получить из соотношений (VI.191)-(VI.192) в форме:

$$y = [1 - (1 - \sigma_0)(e^{-\theta(\tau)} + \theta(\tau)\text{Ei}(-\theta(\tau)))]^{1/4}. \quad (\text{VI.226})$$

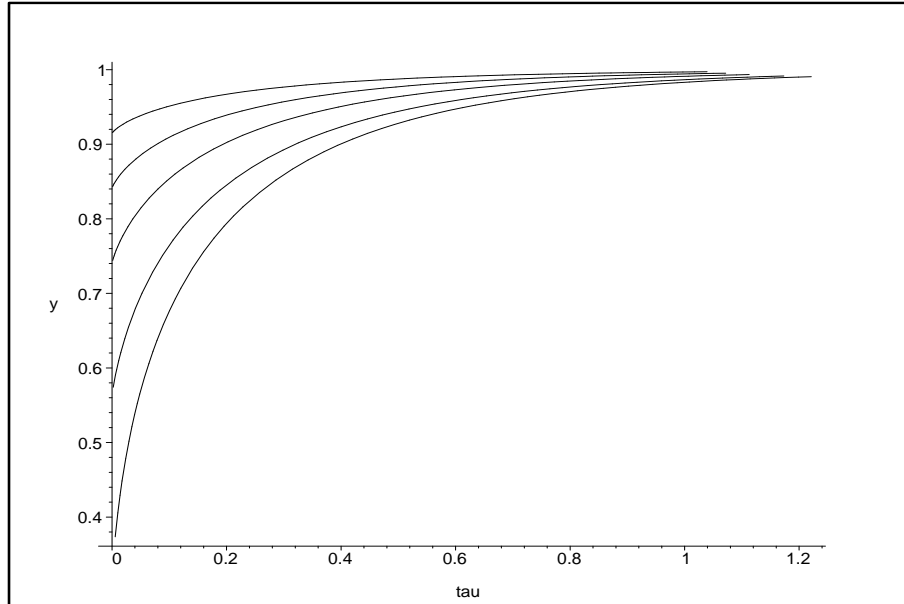
Однако, зависимость  $\theta(\tau)$  найти, естественно, не удастся. Поэтому мы поступим следующим образом: из уравнения (VI.225) найдем прямым численным интегрированием зависимость  $\tau(\theta)$ . Тогда уравнение (VI.226) можно рассматривать, как уравнение вида  $y = y(\theta)$ , а систему двух уравнений (VI.225) и (VI.226) можно рассматривать как параметрические уравнения графика  $y = y(\tau)$ :

$$\tau(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)(\exp(-u) + u\text{Ei}(-u))}}, \quad (\text{VI.227})$$

$$y(\theta) = [1 - (1 - \sigma_0)(e^{-\theta(\tau)} + \theta(\tau)\text{Ei}(-\theta(\tau)))]^{1/4}$$

На Рис. 24 показаны результаты численного моделирования процесса разогрева равновесной компоненты сверхтепловыми частицами для первоначального распределения (VI.220) на основе уравнений (VI.227).

Из этого рисунка видно, что при  $\tau \sim 1$  температура равновесной компоненты плазмы фактически насыщается до значения  $T_0(t)$ , т.е., к моменту времени  $t \sim \mathcal{P}_0^2/\bar{\xi}^2$ , что совпадает с асимптотической оценкой (VI.211).



**Рис. 23.** Релаксация температуры плазмы к равновесной:  $y = T(t)/T_0(t)$  в зависимости от параметра  $\sigma_0$ : – снизу вверх  $\sigma_0 = 0,01; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7$ . По оси абсцисс отложены значения безразмерной временной переменной  $\tau$ .

## VI.10 Основные закономерности космологической модели с изначально слабо нарушенным тепловым равновесием

### VI.10.1 Концентрации ультрарелятивистских реликтовых частиц

Равновесные концентрации ультрарелятивистских частиц во Вселенной со слабо нарушенным термодинамическим равновесием определяются соотношением (VI.120), которое с учетом определения (VI.167) можно переписать в терминах введенной нами функции  $y(t)$ :

$$n_a(t) = \frac{\rho T^3(t)}{\pi^2} g_n \zeta(3) = n_a^0(t) y^3(t) \leq n_a^0(t), \quad (\text{VI.228})$$

где  $n_a^0(t)$  - равновесные концентрации этих же частиц в СКС:

$$n_a^0(t) = \frac{\rho T_0^3(t)}{\pi^2} g_n \zeta(3) = \frac{\rho}{\pi^2} g_n \zeta(3) \left( \frac{45}{3\pi^3 \mathcal{N}} \right)^{3/4} t^{-3/2}. \quad (\text{VI.229})$$

Таким образом, в каждый данный момент времени  $t$  количество ультрарелятивистских частиц, находящихся в равновесии, меньше, чем в СКС. Если взаимодействие между частицами описывается скейлинговым сечением вида (VI.95), то количество неравновесных частиц описывается функцией распределения вида (VI.166). Рассмотрим реакции частиц в области низких энергий, в которых скейлинг может нарушаться. Пусть  $\tau_{eff}^a(t)$  - эффективное время взаимодействий частиц сорта « $a$ » с другими частицами, и пусть в исследуемой области энергий неравенство:

$$\tau_{eff}^a(t) > t \quad (\text{VI.230})$$

имеет своим решением:

$$t > t_a^*. \quad (\text{VI.231})$$

Тогда в момент времени  $t = t_a^*$  частицы сорта « $a$ » перестают взаимодействовать с остальными, т.е., становятся *реликтовыми* — число таких стабильных частиц во времена более поздние, чем  $t_a^*$ , сохраняется, а их плотность эволюционирует в дальнейшем по закону:

$$n_a(t) = n_a^0(t_a^*) y^3(t_a^*) \left[ \frac{a(t_a^*)}{a(t)} \right]^3. \quad (\text{VI.232})$$

Поэтому, если на момент времени  $t = t_a^*$  равновесие в целом еще не восстановлено, число реликтовых частиц сорта « $a$ » будет в  $y^3(t_a^*)$  меньше, чем получается в стандартном сценарии<sup>13</sup>. Таким образом, при  $\sigma_0 \ll 0$  меняя параметр модели неравновесной Вселенной  $\bar{\mathcal{P}}_0$ , можно регулировать количество реликтовых частиц и делать это число сколь угодно малым [202] - при увеличении  $\bar{\mathcal{P}}_0$  количество реликтовых частиц уменьшается. Так, при  $\bar{\mathcal{P}}_0 > 10^2$  и  $\sigma_0 \ll 1$  исчезают реликтовые сверхмассивные бозоны, при  $\bar{\mathcal{P}}_0 > 3 \cdot 10^{17}$  и  $\sigma_0 \ll 1$  исчезают реликтовые нейтрино. Эту приближенную оценку, сделанную в работах, [199], [202], мы уточним ниже.

<sup>13</sup>Время  $t_a^*$  часто называют временем закалки (см., например [151]).

## VI.10.2 Реликтовые нейтрино

Итак, исследуем вопрос о выходе реликтовых нейтрино в процессе закалки. Тепловое равновесие электронных и мюонных нейтрино устанавливается, в основном, реакциями:



Сечение электрослабых взаимодействий, соответствующим реакциям нейтринной аннигиляции (VI.233) в интересующей нас области достаточно низких энергий  $E$ , описывается выражением:

$$\sigma_n u \approx \frac{G_\mu^2 E^2}{\hbar^4 c^4}, \quad (\text{VI.234})$$

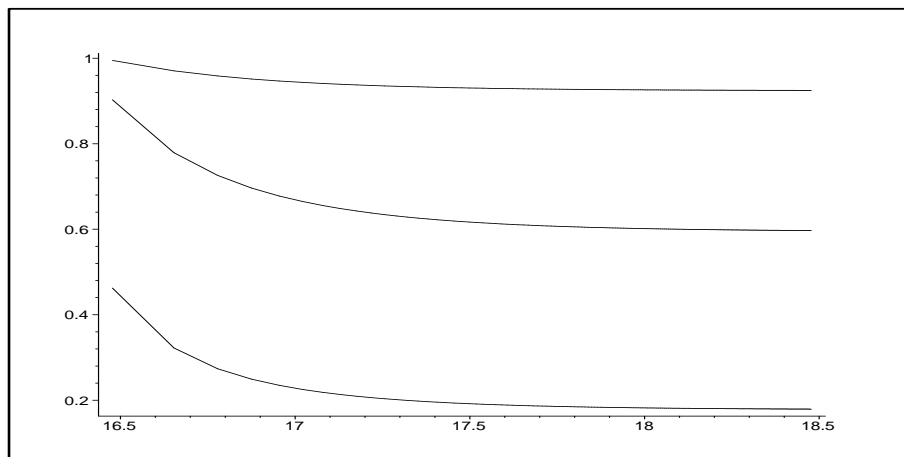
где  $G_\mu \approx G_n u := 1,4358 \cdot 10^{-49} \text{erg/cm}^3$  - константа электрослабых взаимодействий. Вычисляя время закалки электронных нейтрино,  $t_\nu$  по формуле:

$$\tau_{eff} = \frac{1}{n_E(t_\nu) \sigma_\nu(t_\nu) c} = t_\nu, \quad (\text{VI.235})$$

куда необходимо подставить  $E = T(t)$ , выражение для равновесной плотности ультрарелятивистских электронов (VI.120) и температуру равновесной компоненты  $T(t)$ , вычисленную выше. Тогда отношение числа электронных нейтрино после закалки в неравновесной модели к этому же числу в равновесной,  $N_\nu$ , определится выражением:

$$N_\nu = \frac{T(t_\nu)^3}{T_0(t_\nu)^3} = y^{3/4}(t_\nu). \quad (\text{VI.236})$$

На Рис. 24 показаны результаты численных расчетов выхода электронных нейтрино в слабонеравновесной модели Вселенной. Эти результаты, в общем, подтверждают указанные выше качественные оценки предыдущих работ.



**Рис. 24.** Выход электронных реликтовых нейтрино после закалки по отношению к стандартной модели,  $n_\nu/n_\nu^0$ , (ось ординат) в зависимости от параметра неравновесной модели,  $\lg P_0$ , (ось абсцисс). Сверху вниз:  $\sigma_0 = 0,9$ ,  $\sigma_0 = 0,5$ ,  $\sigma_0 = 0,1$ .

### VI.10.3 Закалка нейтронов и образование космологического гелия

Тепловое равновесие нерелятивистских нейтронов устанавливается в реакциях типа:



Относительная концентрация реликтовых нейтронов,  $N_n$ , определяется кинетическим уравнением<sup>14</sup>:

$$\frac{dN_n}{dt} + (a + b)N_n = b, \quad (\text{VI.238})$$

где:

$$N_n(t) + N_p(t) = 1, \quad (\text{VI.239})$$

( $N_p$  - относительная концентрация протонов), коэффициенты  $a(t)$  и  $b(t)$  (скорости реакций (VI.237)) связаны тождеством:

$$b(t) = a(t)e^{-\Delta mc^2/T(t)}, \quad (\text{VI.240})$$

$\Delta m = m_n - m_p \approx 1,3 \text{ Мев}$  - дефект массы нейтрона.

Исследуем уравнение (VI.238). При  $t \rightarrow 0$  согласно (VI.240)  $a(t) \rightarrow b(t)$ , поэтому при  $t \rightarrow 0$  из (VI.234) получим соотношение:

$$\left. \frac{dN_n}{dt} \right|_{t \rightarrow 0} = a(t)[1 - 2N_n(0)]. \quad (\text{VI.241})$$

Из (VI.241) сразу следует, что при  $N_n(0) > 1/2$  концентрация нейтронов с самого падает со временем, а при  $N_n(0) < 1/2$  - растет. Во втором случае функция  $N_n(t)$  всегда имеет максимум в момент времени  $t_*$ , определяемый соотношением:

$$N_n(t_*) = \frac{1}{1 + e^{\Delta mc^2/T(t_*)}} < \frac{1}{2}. \quad (\text{VI.242})$$

При  $N_n(0) = 1/2$  разлагая в ряд Тейлора  $N_n(t)$  по малому  $t$  и используя при этом уравнение (VI.238) и предельные соотношения при  $t \rightarrow 0$ , получим:

$$N_n(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4} a(t) \frac{\Delta mc^2}{T^2} \frac{dT}{dt} \Big|_{t=0} t^2 + \dots$$

Поскольку второй член в правой части разложения отрицателен, то и при  $N_n(0) = 1/2$  концентрация нейтронов падает.

Перейдем теперь к численному моделированию. Коэффициент  $a(t)$  в единицах  $\text{сек}^{-1}$  при высоких температурах описывается приближенным выражением (см., например, [151]):

$$a(t) \approx 1,61 \cdot \tilde{T}^5(t), \quad (\text{VI.243})$$

<sup>14</sup>Подробности см., например, в [151].

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

где  $\tilde{T}(t)$  - температура в Мев. При низких температурах  $a(t) = W \approx 10^{-3} \text{sec}^{-1}$ , где  $W$  - вероятность распада свободного нейтрона. Полагая в (VI.164) вслед за [151]  $\mathcal{N} = 4, 5$ , получим для  $\tilde{T}_0(t)$  соотношение:

$$\tilde{T}_0 = 0,89t^{-1/2}, \quad (\text{VI.244})$$

где время измеряется в секундах. Как показывают численные расчеты, этот момент времени достигается достаточно быстро<sup>15</sup>, - дальнейшая история нуклеосинтеза практически не зависит от начальной относительной концентрации нейтронов.

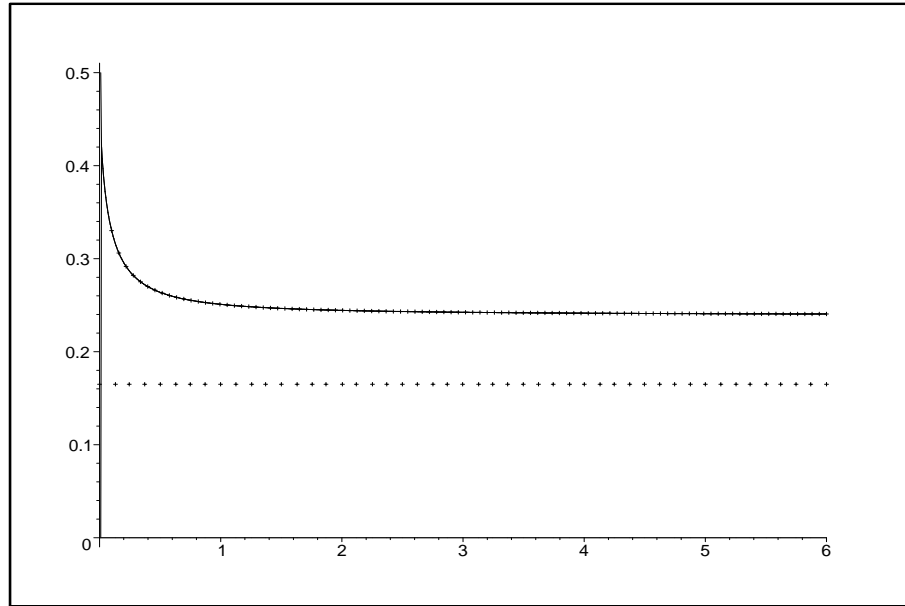
Рассмотрим реакции (VI.237) в условиях, пока равновесие в плазме в целом еще не достигнуто, т.е.,  $y(t) < 1$ . Полагая, что при этом функция  $y(t)$  подчиняется асимптотике (VI.206), и при интересующих нас масштабах времен  $\Lambda \simeq \alpha^{-2} \approx (137)^2$ , получим:

$$\tilde{T} \approx 0,89 \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{\sqrt{\sigma_0} + 0,523(1 - \sigma_0) \frac{\sqrt{t}}{P_0}}, \quad (\text{VI.245})$$

где:

$$P_0 = \frac{\mathcal{P}_0}{10^{17}}.$$

На 25-28 показаны результаты численного интегрирования уравнения (VI.245).



**Рис. 25.** Влияние начальной концентрации нейтронов на нуклеосинтез в неравновесной Вселенной при значении параметров  $\mathcal{P}_0 = 10^{18}$  и  $\sigma_0 = 0,1$ : по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат - концентрация нейтронов,  $N_n(t)$ . Тонкая линия линия -  $N_n(0) = 0$ , жирная линия -  $N_n(0) = 0,5$ , пунктирная линия -  $N_n(0) = 1$ ; пунктирной прямой отмечено значение  $N_n = 0,165$ . Как видно из рисунка, все три кривые практически совпадают, отличаясь лишь для малых значений времени,  $t < 0,2 \text{sec}$ .

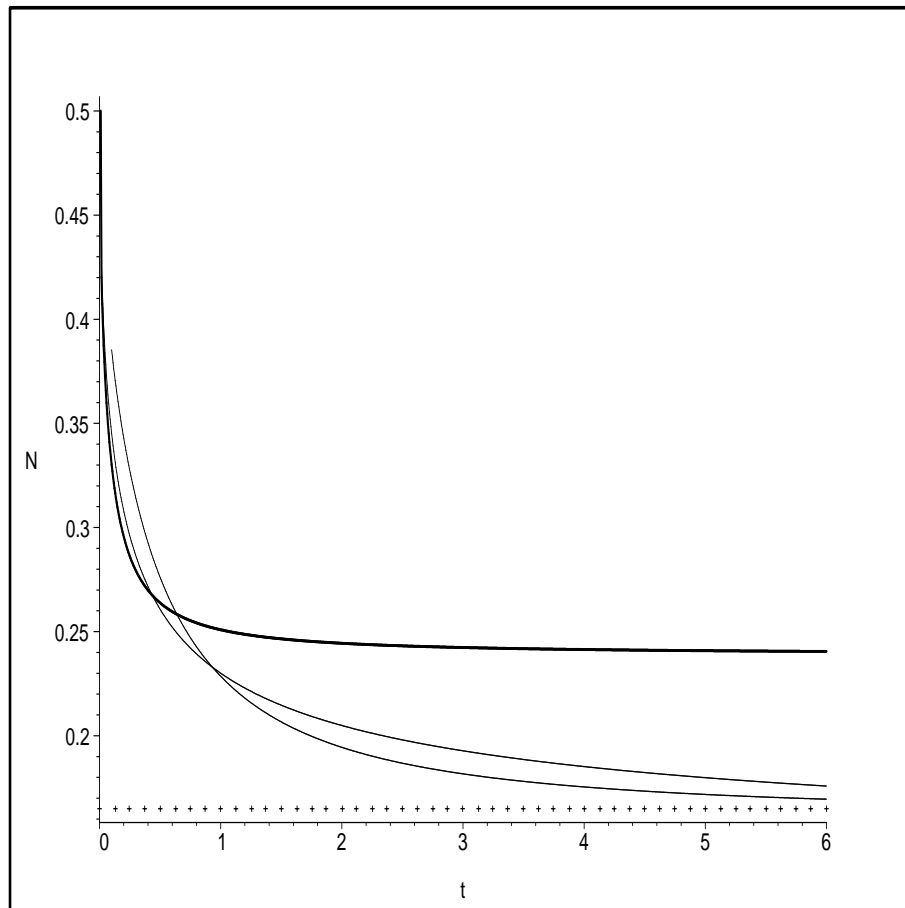
<sup>15</sup>При этом значение  $N_n$  в максимуме составляет примерно 0,45.

### VI.10. Закономерности слабонерасположенной космологической модели

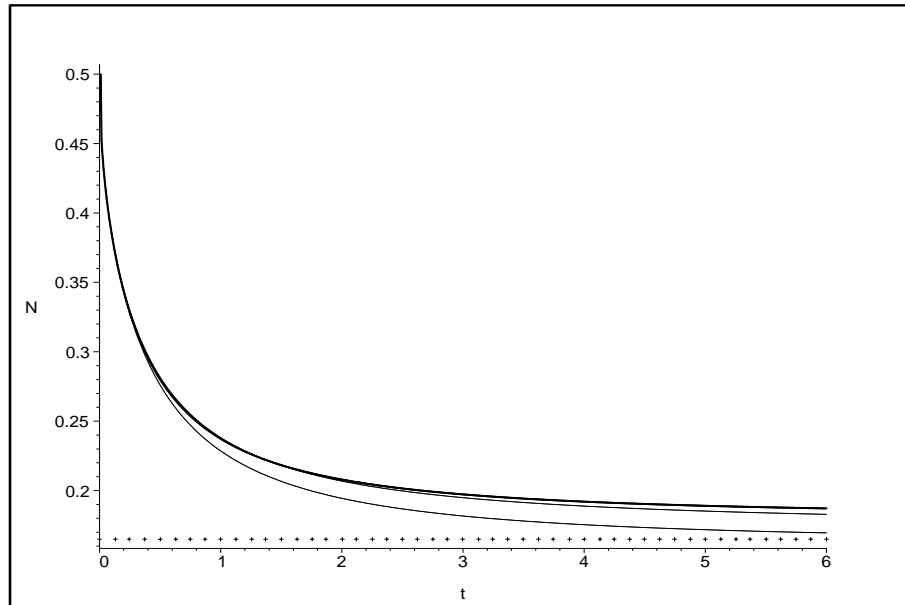
Результаты численного интегрирования, приведенные на 25, подтверждают тот факт, что конечная концентрация нейтронов практически не зависит от их начальной концентрации. При  $\mathcal{P}_0 \lesssim 10^{17}$  количество нейтронов после закалки практически совпадает с аналогичным количеством в горячей модели (СКС). При  $\mathcal{P}_0 > 10^{17}$  конечный выход нейтронов после закалки растет с увеличением  $\mathcal{P}_0$ , однако при постоянном значении  $\mathcal{P}_0$  медленно уменьшается с ростом параметра равновесности  $\sigma_0$ .

Приведенные результаты численных расчетов закалки нейтронов в неравновесной Вселенной, в общем, подтверждают оценки, полученные ранее в работах [199] и [202], лишь уточняя их в деталях. Заметим, что максимальная весовая концентрация космологического  $\text{He}_4$ ,  $N_{\text{He}_4}$ , равна (см. [151]):

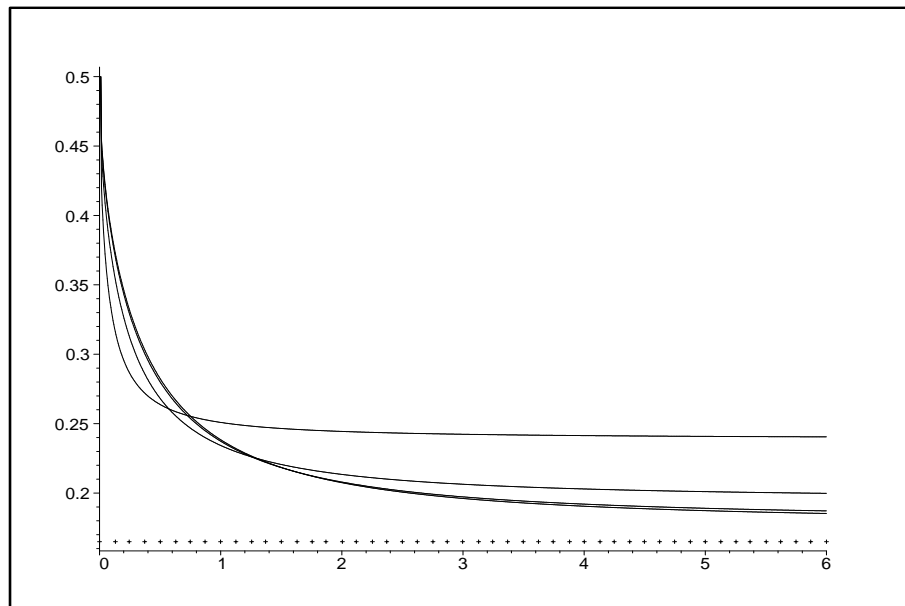
$$\max(N_{\text{He}_4}) = 2N_n. \quad (\text{VI.246})$$



**Рис. 26.** Влияние параметра  $\mathcal{P}_0$  на нуклеосинтез в неравновесной Вселенной в зависимости от при  $N_n(0) = 0,5$  и  $\sigma_0 = 0,1$ : по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат - концентрация нейтронов,  $N_n(t)$ . Нижняя линия - классический результат (см. [151]), средняя -  $\mathcal{P}_0 = 10^{17}$ , жирная линия -  $\mathcal{P}_0 = 10^{18}$ ; пунктирной линией отмечено значение  $N_n = 0,165$ .



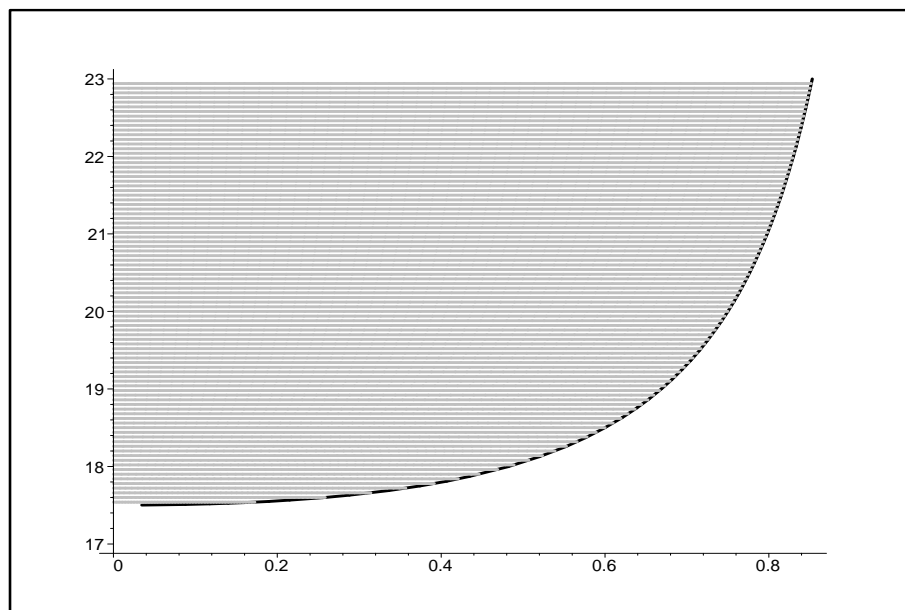
**Рис. 27.** Влияние параметра  $\mathcal{P}_0$  на нуклеосинтез в неравновесной Вселенной при  $N_n(0) = 0,5$  и  $\sigma_0 = 0,9$ : по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат - концентрация нейтронов,  $N_n(t)$ . Нижняя линия - классический результат (см. [151]), средняя -  $\mathcal{P}_0 = 10^{17}$ , жирная линия -  $\mathcal{P}_0 = 10^{18}$ ; пунктирной линией отмечено значение  $N_n = 0,165$ .



**Рис. 28.** Влияние параметра  $\sigma_0$  на нуклеосинтез в неравновесной Вселенной при  $N_n(0) = 0,5$  и  $\mathcal{P}_0 = 10^{18}$ : по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат - концентрация нейтронов,  $N_n(t)$ . Сверху вниз:  $\sigma_0 = 0,1$ ,  $\sigma_0 = 0,5$ ,  $\sigma_0 = 0,9$ ,  $\sigma_0 = 0,99$ ; пунктирной линией отмечено значение  $N_n = 0,165$ . Последние две линии практически неразличимы.

### VI.10.4 Наблюдательные ограничения на параметры неравновесного распределения

В связи с ростом концентрации космологического  $He_4$  при увеличении параметра  $\mathcal{P}_0$  наблюдательные данные о содержании  $He_4$  во Вселенной на уровне не выше 35% налагают ограничения на верхние значения параметра неравновесной модели  $\mathcal{P}_0$  при заданном значении ее другого параметра  $\sigma_0$ . На этот факт указывалось ранее в работах [199], [202], в которых на основе количественных оценок была указана область допустимых значений параметров неравновесной модели. Однако, оценки эти, верные при небольших значениях параметра  $\sigma_0$ , требуют уточнения в области  $\sigma_0 \sim 1$ . Эта уточненная картина изображена на Рис. 29.



**Рис. 29.** Допустимая по концентрации  $He_4$  область параметров слабонеравновесной модели  $\lg \mathcal{P}_0$  (ось ординат) и  $\sigma_0$  (ось абсцисс) - заштрихована запрещенная область значений параметров.

## Заключение

Резюмируя результаты раздела, заметим, что современные данные наблюдательной космологии не противоречат предположению о слабом изначальном нарушении теплового равновесия Вселенной в смысле условия (VI.110), т.е., изначальной малости числа сверхтепловых частиц по сравнению с числом тепловых (см. условие (VI.110)). Эволюция неравновесной Вселенной в случае слабого отклонения первоначального распределения от теплового равновесия, в основном, управляется двумя безразмерными параметрами параметрами:  $0 \leq \sigma_0 \leq 1$  - относительным вкладом в плотность энергии равновесной компоненты и  $1 < \overline{\mathcal{P}}_0 < +\infty$  - отношением средней энергии сверхтепловых частиц к температуре равновесной Вселенной в один и тот же момент времени. Можно сказать и так: параметр  $\overline{\mathcal{P}}_0$  равен средней энергии неравновесных частиц в планковских масштабах энергии на

планковский же момент времени. При этом наблюдательные данные, в основном, распространенность космологического  $He_4$ , налагают некоторые ограничения на область допустимых значений параметров слабонервновесной модели, но не противоречат значениям параметра  $\bar{P}_0 \lesssim 3 \cdot 10^{17}$ , т.е. превышения средней энергии частиц сверхтепловой компоненты на 17(!) порядков температуры равновесной компоненты. Соответствующая этому параметру энергия в современной Вселенной при температуре реликтового излучения  $3^\circ K$  составляет  $0,8 * 10^5 GeV(!)$ .

## VI.11 Вывод релятивистского интеграла столкновений в форме Фоккера - Планка

Рассмотрим снова интеграл 4-х частичных столкновений в ультрарелятивистском пределе (III.110):

$$J_{ab}(p) = -\frac{(2S_b + 1)}{32(2\pi)^4 p} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{ds}{s} \int_0^1 dx F(x, s) \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ \times \{f_a(p)f_b(q)[1 \pm f_c(p - \Delta)][1 \pm f_d(q + \Delta)] - \\ - f_c(p - \Delta)f_d(q + \Delta)[1 \pm f_a(p)][1 \pm f_b(q)]\}, \quad (VI.247)$$

где (см. [216]):

$$x = -\frac{t}{s}, \quad \Delta = x(p - q) - \cos \varphi \sqrt{x(1-x)(4pq - s)}. \quad (VI.248)$$

Будем предполагать, что при столкновениях частиц в среднем передается небольшой импульс, т.е.,

$$\overline{(p_a - p_c)^2} \ll \overline{p^2}, \quad (VI.249)$$

чему соответствуют значения переменной  $x \rightarrow 1$ . Полагая

$$x = 1 - \xi^2, \quad (VI.250)$$

разложим в ряд Тейлора интеграл столкновений по малости передаваемого импульса, т.е., по малости параметра  $\xi^2 \ll 1$ . Из формулы (VI.248) имеем:

$$\Delta p = (1 - \xi^2)(p - q) - \cos \varphi \xi \sqrt{4pq - s}. \quad (VI.251)$$

Удерживая члены порядка  $\xi^2$ , запишем разложения функций распределения:

$$f(p') = f(q) + \frac{df}{dq} [\cos \varphi \xi \sqrt{4pq - s} + \xi^2(p - q)] + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dq^2} \xi^2 (4pq - s) \cos^2 \varphi;$$

$$f(q') = f(p) - \frac{df}{dp} [\cos \varphi \xi \sqrt{4pq - s} + \xi^2(p - q)] + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dp^2} \xi^2 (4pq - s) \cos^2 \varphi.$$

VI.11. Интеграл столкновений в форме Фоккера - Планка

При интегрировании по угловой переменной интегралы, линейные по  $\xi$ , исчезнут, поэтому для внутреннего интеграла мы получим выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [f(p')f(q') - f(p)f(q)] = \\ & = f(p)f(q) + (p-q)\xi^2 \left[ f(p)\frac{df(q)}{dq} - f(q)\frac{df(p)}{dp} \right] + \\ & \frac{1}{4}\xi^2(4pq-s) \left[ f(p)\frac{d^2f(q)}{dq^2} - 2\frac{df(p)}{dp}\frac{df(q)}{dq} + f(q)\frac{d^2f(p)}{dp^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.252})$$

Проводя интегрирование по переменной  $x$ , положим:

$$A = \int_0^1 |F(s, x)|^2(1-x)dx; \quad B = \int_0^1 x|F(s, x)|^2dx, \quad (\text{VI.253})$$

так что:

$$A + B = \int_0^1 |F(s, x)|^2dx. \quad (\text{VI.254})$$

Таким образом, согласно (VI.70), (VI.95), (VI.96), (VI.85) имеют место соотношения:

$$A + B \approx \frac{32\pi^2}{\Lambda(s)}, \quad A \approx \frac{16\pi^2}{\Lambda(s)}.$$

В дальнейшем будем учитывать тот факт, при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг, т.е., выполняется соотношение (VI.89), согласно которому  $F(s, x) \approx F(x)$ , так что  $A \approx \text{Const}$ ,  $B \approx \text{Const}$ . Тогда, произведя интегрирование по переменной  $s$  в полученном выражении, найдем:

$$\begin{aligned} J_{ab}(p) = A \frac{2S_b + 1}{(4\pi)^3 p} \int_0^\infty dq \left\{ \left[ f(p)\frac{df(q)}{dq} - f(q)\frac{df(p)}{dp} \right] + \right. \\ \left. + 2p^2q^2 \left[ f(p)\frac{d^2f(q)}{dq^2} - 2\frac{df(p)}{dp}\frac{df(q)}{dq} + f(q)\frac{d^2f(p)}{dp^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Произведем интегрирование по частям в части интеграла, содержащего вторые производные по переменной  $q$ , при этом:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty q^2 \frac{d^2f(q)}{dq^2} dq &= q^2 \frac{df(q)}{dq} \Big|_0^\infty - 2 \int_0^\infty q \frac{df(q)}{dq} dq = \\ &= -2qf(q) \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty f(q)q^2 dq = 2 \int_0^\infty f(q)q^2 dq, \end{aligned}$$

где мы учли необходимое условие сходимости выражений для плотности числа частиц и энергии:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} q^n f(q) = 0, \quad (0 \leq n \leq 3). \quad (\text{VI.255})$$

Таким образом, проводя интегрирование по частям, получим окончательно интеграл столкновений в форме Фоккера - Планка [202]:

$$J_{ab}(p) = A \frac{2S+1}{4(2\pi)^3 p} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 \int_0^\infty q^2 \left( f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right]. \quad (\text{VI.256})$$

## VI.12 Кинетическое уравнение для сверхтепловой компоненты в диффузионном приближении

Подставляя полученный интеграл столкновений в форме Фоккера - Планка (VI.302) в кинетическое уравнение (VI.104), приведем его к виду уравнения типа Фоккера - Планка:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = A \frac{2S+1}{4(2\pi)^3 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 \int_0^\infty q^2 \left( f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right]. \quad (\text{VI.257})$$

Производя еще раз интегрирование по частям в уравнении (VI.314) и учитывая соотношения:

$$n(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q^2 f(q) dq, \quad (\text{VI.258})$$

- плотность числа частиц,

$$T_S(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q f(q) dq, \quad (\text{VI.259})$$

- след тензора энергии-импульса частиц, приведем уравнение (VI.314) к виду:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} - \frac{a'}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{A}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left[ n(\eta) \frac{\partial f(p)}{\partial p} + 2T_S(\eta) f(p) \right]. \quad (\text{VI.260})$$

Вследствие неразличимости частиц выполняются законы сохранения числа частиц:

$$n(\eta) a^3(\eta) = \text{Const} \Rightarrow n(\eta) = \frac{n_*}{a(\eta)^3}. \quad (\text{VI.261})$$

В универсальной системе единиц ( $G = \hbar = c = 1$ ) выберем масштабный фактор в виде:

$$a(t) = \sqrt{2t} = \eta,$$

так что на «полупланковский» момент времени ( $\eta = 1, t = \frac{1}{2}$ ) —  $a = 1, n = n_0$ , и перейдем к конформному импульсу  $\mathcal{P}$ , являющемуся интегралом движения в метрике Фридмана:

$$p = a(\eta) \mathcal{P}, \quad (\text{VI.262})$$

так что на планковский момент времени  $p = \mathcal{P}$ . Далее введем согласно (VI.314), (VI.258) и (VI.262) конформные плотности числа частиц и энергии:

VI.12. Диффузионное уравнение для сверхтепловых частиц

$$n_*(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\eta, \mathcal{P}) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P} \quad (= \text{Const} = n_0);$$

$$\varepsilon_*(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\eta, \mathcal{P}) \mathcal{P}^3 d\mathcal{P},$$

а также средний конформный импульс  $\langle \mathcal{P} \rangle$  с помощью соотношения [202]:

$$\varepsilon_*(\eta) = \langle \mathcal{P}(\eta) \rangle n_*. \quad (\text{VI.263})$$

так что:

$$n = \frac{n_*}{a^3}; \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_*}{a^4}; \quad \Rightarrow \varepsilon = \langle p \rangle n. \quad (\text{VI.264})$$

Введем также безразмерную функцию  $\beta(\eta)$  с помощью отношения:

$$\beta(\eta) n_* = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\eta, \mathcal{P}) \mathcal{P} d\mathcal{P}. \quad (\text{VI.265})$$

В результате приведем уравнение (VI.260) к более изящной форме относительно функции  $f(\eta, \mathcal{P})$  [200, 202]:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{An_*}{\mathcal{P}^2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}} \mathcal{P}^2 \left( \frac{\partial f}{\partial \mathcal{P}} + 2\beta(\eta) f \right), \quad (\text{VI.266})$$

- это и есть искомое кинетическое уравнение в диффузионном приближении.

Заметим, что вследствие определения (VI.265) функция  $\beta(\eta)$  сама определяется через интеграл от функции распределения. Таким образом, несмотря на внешнюю простоту, уравнение (VI.266) остается интегро - дифференциальным. Заметим также, что ультра-релятивистская равновесная функция распределения:

$$f_0 = C(\eta) e^{-2\frac{\beta(\eta)}{\mathcal{P}}}, \quad (\text{VI.267})$$

где  $C(\eta)$  - произвольная функция, обращает в нуль полученный интеграл столкновений. Это означает, что с течением времени  $\eta \rightarrow \infty$  решение уравнения (VI.266) стремится к равновесному распределению (VI.267) с температурой:

$$T(\eta) = \frac{\beta(\eta)}{a(\eta)} \Rightarrow T_* = \beta(\eta), \quad (\text{VI.268})$$

где  $T_*$  - конформная температура.

## VI.13 Эволюция сверхтепловых частиц в сильно неравновесной Вселенной

### VI.13.1 Нормировка диффузионного уравнения для ультрарелятивистской Вселенной

Рассмотрим Вселенную на ультрарелятивистской стадии расширения, и пусть  $\mathcal{E}$  - полная плотность энергии материи, а  $\mathcal{E}_*$  - ее конформное значение. Тогда из уравнений Эйнштейна следует:

$$\mathcal{E} = \frac{3}{32\pi t^2} = \frac{3}{8\pi a^4} = \frac{3}{8\pi \eta^4} \Rightarrow \mathcal{E}_* = \frac{3}{8\pi}. \quad (\text{VI.269})$$

В отличие от разделов VI.6 - VI.10 рассмотрим эволюцию сверхтепловых частиц, когда число равновесных частиц в области энергий порядка и ниже унитарного предела,  $n_T$  меньше числа сверхтепловых частиц в скейлинговой области,

$$n_T \ll n. \quad (\text{VI.270})$$

Такая ситуация, в принципе, может быть реализована в очень ранней Вселенной. Нас будет интересовать процесс термализации неравновесных частиц. В этом случае  $\mathcal{E}_*$  можно с большой точностью полагать равной конформной плотности неравновесных частиц, которая, следовательно, приближенно постоянна, как и конформная плотность числа частиц. Итак, будем в дальнейшем полагать:

$$\varepsilon_* = \frac{3}{8\pi} = \text{Const}; \quad n_* = n_0 = \text{Const}. \quad (\text{VI.271})$$

Наличие двух макроскопических интегралов позволяет провести дальнейшее упрощение диффузионного уравнения. Введем еще одну безразмерную константу — среднее значение конформной энергии сверхтепловых частиц:

$$\mathcal{P}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathcal{P} \rangle \equiv \frac{\varepsilon_*}{n_*} = \text{Const}. \quad (\text{VI.272})$$

Эта безразмерная величина является, фактически, свободным параметром модели, — большим значениям этой константы соответствует большое превышение средней энергии частиц над тепловой. Введем с помощью этой константы безразмерную импульсную переменную  $x$ :

$$x = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \quad (\text{VI.273})$$

и новую безразмерную функцию распределения  $G(x)$ :

$$f(\eta, x) = \frac{3\pi}{4(2S+1)} \frac{G(\eta, x)}{\mathcal{P}_0^4}, \quad (\text{VI.274})$$

так что

$$\int_0^\infty G(\eta, x) x^2 dx = 1, \quad (\text{VI.275})$$

VI.13. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

Произведя замену переменных, получим соотношения:

$$\beta(\eta) = \frac{b(\eta)}{\mathcal{P}_0}; \quad (\text{VI.276})$$

где

$$b(\eta) = \int_0^{\infty} G(\eta, x) x dx; \quad (\text{VI.277})$$

$$\int_0^{\infty} G(\eta, x) x^3 dx = 1. \quad (\text{VI.278})$$

Таким образом, в выбранных нами переменных функция нормированная распределения  $G(\eta, x)$  должна удовлетворять двум соотношениям нормировки - (VI.282) и (VI.283). Введем, наконец, безразмерное время  $\tau$ :

$$\tau = \frac{3A\eta}{8\pi\mathcal{P}_0^3}, \quad (\text{VI.279})$$

и запишем окончательно диффузионное уравнение (VI.269) относительно функции  $G(\tau, x)$  [200, 202]:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left( \frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right). \quad (\text{VI.280})$$

Уравнение (VI.280) должно решаться с начальными и граничными условиями вида:

$$G(0, x) = G_0(x); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(\tau, x) x^3 = 0, \quad (\text{VI.281})$$

причем функция  $G_0(x)$  должна удовлетворять интегральным условиям (VI.282), (VI.283):

$$\int_0^{\infty} G_0(x) x^2 dx = 1; \quad (\text{VI.282})$$

$$\int_0^{\infty} G_0(x) x^3 dx = 1. \quad (\text{VI.283})$$

Отметим далее следующее обстоятельство [200] — точным решением кинетического уравнения (VI.280), удовлетворяющим соотношениям нормировки (VI.282), (VI.283), является равновесное ультрарелятивистское больцмановское распределение с конформной температурой  $\mathcal{T} = 1/3$ :

$$f_0 = \frac{27}{2} e^{-3x}. \quad (\text{VI.284})$$

Можно показать, что при больших временах  $\tau$  функция  $\beta \rightarrow 0$ . При  $\beta = 0$  уравнение (VI.280) сводится к уравнению теплопроводности в сферической системе координат в случае сферической симметрии:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right). \quad (\text{VI.285})$$

## Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

Стандартное решение уравнения трехмерного теплопроводности, отвечающее начальному условию:

$$U(x, y, z, 0) = U_0(x, y, z) \quad (\text{VI.286})$$

имеет вид (см., например, [222]):

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi t^{3/2}} \int_{V_0} U_0(\vec{r}_0) e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4t}} dV_0 \quad (\text{VI.287})$$

Для того, чтобы получить на основе этого решения сферически симметричное решение уравнения (VI.280) выберем временно систему координат:

$$\vec{r}_0 = (0, 0, r)$$

и перейдем в интеграле (VI.287) к сферической системе координат:

$$x = r_0 \cos \phi \cos \theta; y = r_0 \sin \phi \cos \theta; z = r_0 \sin \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \sin \theta$$

и проведем интегрирование по угловым переменным. В результате получим решение, которое на ранних стадиях расширения описывает нормированную функцию распределения в унитарном пределе:

$$G(\tau, x) = \frac{1}{2x\sqrt{\pi\tau}} \times \int_0^\infty G(y) \left[ e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4\tau}} \right] y dy. \quad (\text{VI.288})$$

Заметим, что в приближении  $\beta \rightarrow 0$  функция  $G$  в изучаемой области уже не обязана удовлетворять интегральным соотношениям нормировки (VI.282) и (VI.283), так как данное приближение не учитывает процессы притока частиц в рассматриваемую область за счет столкновения с низкоэнергетическими частицами, приводящими к термализации распределения. Тем не менее, начальное распределение должно удовлетворять этим соотношениям нормировки.

### VI.13.2 Проверка законов сохранения

Как известно (см. разделы II.2, II.3), интегральными следствиями кинетических уравнений являются законы сохранения макроскопических потоков — в случае упругих столкновений, каковыми формально являются четырехчастичные реакции в унифицированной теории, должны выполняться законы сохранения числа сверхтепловых частиц и их энергии. Поскольку диффузионное уравнение VI.280 получено из кинетического уравнения, оно должно поддерживать выполнение указанных законов сохранения. Проверим, так ли это. Умножая обе части (VI.280) на  $x^2$  и интегрируя по частям на всем множестве значений  $x \in [0, +\infty)$ , получим:

VI.13. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^2 G(x, \tau) dx = \left\{ x^2 \left( \frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right) \right\} \Big|_0^{\infty}.$$

Учитывая условия (VI.281), получим отсюда:

$$\int_0^{\infty} x^2 G(x, \tau) dx = \text{Const.}$$

Эта постоянная согласно (VI.282) равна 1, следовательно, закон сохранения числа частиц тождественно выполняется. Умножая теперь обе части (VI.280) на  $x^3$  и интегрируя по частям на всем множестве значений  $x \in [0, +\infty)$ , получим:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^3 G(x, \tau) dx = \left\{ x^3 \left( \frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right) \right\} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x^2 \left( \frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right). \quad (\text{VI.289})$$

Учитывая условия (VI.281) еще раз интегрируя по частям (VI.289), получим:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^3 G(x, \tau) dx = -x^2 G \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x G dx - 2b(\tau) \int_0^{\infty} x^2 G dx.$$

Учитывая теперь соотношение нормировки (VI.282) и определение функции  $b(\tau)$ , (VI.277), получим отсюда:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^3 G(x, \tau) dx = 0,$$

следовательно, энергия частиц также сохраняется.

Дальнейшее аналитическое исследование интегро-дифференциального уравнения (VI.280) возможно в двух крайних приближениях:

1. Приближение малых времен эволюции:

$$\tau \ll 1, \quad (\text{VI.290})$$

соответствующее ранним стадиям эволюции Вселенной;

2. Приближение очень больших импульсов:

$$x \ll 1, \quad (\text{VI.291})$$

соответствующее высокоэнергетическому хвосту распределения.

### VI.13.3 Разложение уравнения типа Фоккера-Планка по малости $\tau$

При выполнении (VI.290) член в левой стороне диффузионного уравнения (VI.280) является главным, что сразу дает с учетом начального условия:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = 0, \Rightarrow G(x, \tau) = G_0(x). \quad (\text{VI.292})$$

В следующем приближении будем иметь:

$$\frac{\partial G_1}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left( \frac{\partial G_0(x)}{\partial x} + 2b_0 G_0(x) \right). \quad (\text{VI.293})$$

Заметим, что  $b_0$ , определенная относительно функции  $G_0(x)$  от времени не зависит, поэтому решение для первого порядка приближения имеет вид:

$$G_1 = \tau g_1(x); \quad g_1(x) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left( \frac{\partial G_0(x)}{\partial x} + 2b_0 G_0(x) \right). \quad (\text{VI.294})$$

Таким образом, очевидно, что приближение малого времени  $\tau$  полностью эквивалентно разложению точной функции  $G(x, \tau)$  в ряд Тейлора по степеням  $\tau$ . Учитывая это, сразу положим:

$$G(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \tau^n. \quad (\text{VI.295})$$

Далее, очевидно, что функции  $G_k(x, \tau)$ , как и функции  $g_k(x)$ , вследствие результатов, приведенных выше, должны удовлетворять соотношениям <sup>16</sup>:

$$\int x^2 G_k(x, \tau) dx = 0; \quad \int x^3 G_k(x, \tau) dx = 0, \quad (k = \overline{1, \infty}); \quad (\text{VI.296})$$

$$\int x^2 g_k(x) dx = 0; \quad \int x^3 g_k(x) dx = 0, \quad (k = \overline{1, \infty}), \quad (\text{VI.297})$$

смысл которых заключается в том, что поправки к функции распределения не может изменить ни полное число частиц, ни полную энергию. Отсюда, кстати, следует и тот простой факт, что эти поправки знакопеременна на положительном промежутке  $[0, +\infty)$ .

Подставляя разложение (VI.295) в диффузионное уравнение (VI.280) и последовательно повторяя указанную выше процедуру, получим рекуррентную формулу для нахождения более высоких приближений:

$$G_{k+1} = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \left\{ \frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k \left[ \left( \frac{\partial g_i}{\partial x} + \frac{2g_i}{x} \right) \int_0^{\infty} g_{k-i} dx \right] \right\}. \quad (\text{VI.298})$$

Аналогично можно получить также рекуррентную формулу для определения функции  $b(\tau)$  в уравнении (VI.280):

$$b_{k+1} = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k (g_i b_{k-i}) \right] dx. \quad (\text{VI.299})$$

<sup>16</sup>Подробное доказательство этого факта приведено в [220].

### Начальное распределение

Рассмотрим конкретную модель начального распределения  $G_0(x)$ :

$$G_0(x) = \frac{A}{e^{\xi x - y} + 1}, \quad (\text{VI.300})$$

где  $A, \xi, y$  - параметры начального распределения. Эти параметры должны быть таковы, чтобы автоматически выполнялись соотношения нормировки (VI.282), (VI.283). Таким образом, имеем 2 алгебраических соотношения на три параметра, разрешая которые через параметр  $y$ , найдем:

$$\xi(y) = \frac{\int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{\exp(t - y) + 1}}{\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\exp(t - y) + 1}}; \quad A(y) = \frac{a^3(y)}{\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\exp(t - y) + 1}} \quad (\text{VI.301})$$

Таким образом, нормированная начальная функция распределения определяется одним произвольным параметром,  $y$ :

$$G_0(x, y) = \frac{A(y)}{\exp[\xi(y)x - y] + 1}. \quad (\text{VI.302})$$

Подставляя найденную функцию в соотношение (VI.299), найдем  $b_0(y)$ .

Как показали численные расчеты, параметры распределения вычисляются крайне неустойчиво, что связано, с одной стороны, с не вполне правильным определением функции «polylog» в пакете Maple, а с другой стороны медленной сходимостью указанных интегралов. Для того, чтобы нам избавиться от этих погрешностей, произведем замену переменных в несобственных интегралах (VI.301) и представим исследуемые три типа интегралов в форме:

$$J_1(y) = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{\exp(t - y) + 1} = y \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} + \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} + y \int_0^y \frac{dx}{e^{-x} + 1} - \int_0^y \frac{x dx}{e^x + 1}; \quad (\text{VI.303})$$

$$J_2(y) = \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\exp(t - y) + 1} = y^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} + 2y \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} + \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x + 1} + y^2 \int_0^y \frac{dx}{e^{-x} + 1} - 2y \int_0^y \frac{x dx}{e^x + 1} + \int_0^y \frac{x^2 dx}{e^x + 1}. \quad (\text{VI.304})$$

$$\begin{aligned}
 J_3(y) &= \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{\exp(t-y) + 1} = \\
 &= y^3 \int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1} + 3y^2 \int_0^\infty \frac{xdx}{e^x + 1} + 3y \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1} + \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1} + \\
 &+ y^3 \int_0^y \frac{dx}{e^{-x} + 1} - 3y^2 \int_0^y \frac{xdx}{e^x + 1} + 3y \int_0^y \frac{x^2 dx}{e^x + 1} - \int_0^y \frac{x^3 dx}{e^x + 1}.
 \end{aligned} \tag{VI.305}$$

Используя представление  $\zeta$  - функций Римана и чисел Бернулли:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x + 1} dx &= (1 - 2^{1-n})\Gamma(n)\zeta(n); \\
 \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{e^x + 1} dx &= \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n,
 \end{aligned} \tag{VI.306}$$

и вводя функции:

$$S(n, y) = \int_0^y \frac{x^n}{e^{-x} + 1} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{VI.307}$$

так что:

$$S(0, y) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^y), \tag{VI.308}$$

получим:

$$J_1(y) = y \ln 2 + \frac{\pi^2}{12} + yS(0, y) - S(1, y); \tag{VI.309}$$

$$J_2(y) = y^2 \ln 2 + y \frac{\pi^2}{6} + \frac{9}{2} \zeta(3) + y^2 S(0, y) - 2yS(1, y) + S(2, y); \tag{VI.310}$$

$$\begin{aligned}
 J_3(y) &= y^3 \ln 2 + y^2 \frac{\pi^2}{4} + y \frac{27}{2} \zeta(3) + \frac{7}{120} \pi^4 + \\
 &+ y^3 S(0, y) - 3y^2 S(1, y) + 3yS(2, y) - S(3, y).
 \end{aligned} \tag{VI.311}$$

Функции  $S(n, y)$  удобнее функций  $J_n(y)$  при численном моделировании, поскольку при вычислении с ними не возникают указанные выше проблемы с функциями полилогарифмов. При этом численные процедуры надо создавать с помощью методов численного интегрирования, а не по стандарту Maple. Таким образом, получим с помощью введенных функций:

$$b_0(y) = A(y) \int_0^\infty \frac{xdx}{e^{\xi(y)x-y} + 1} \equiv \frac{A(y)}{\xi^2(y)} \int_0^\infty \frac{xdx}{e^{x-y} + 1} = \frac{J_3(y)J_1(y)}{J_2^2(y)}. \tag{VI.312}$$

**Первое приближение**

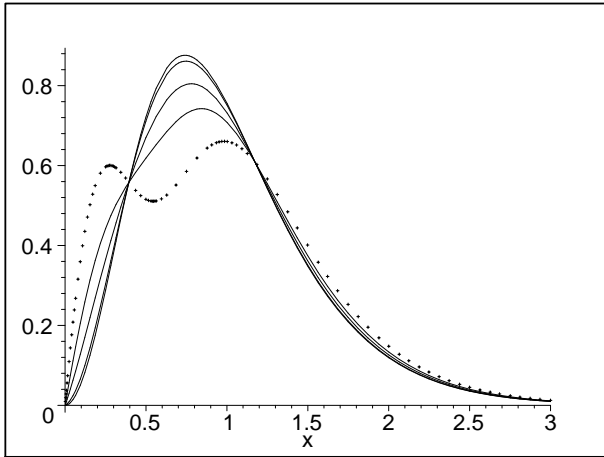
В первом приближении согласно рекуррентным формулам (VI.298), (VI.299) найдем:

$$b_1(\tau) = \tau A(y) \left[ \frac{2b_0 \ln(1 + e^y)}{a(y)} - \frac{e^y}{e^y + 1} \right]. \quad (\text{VI.313})$$

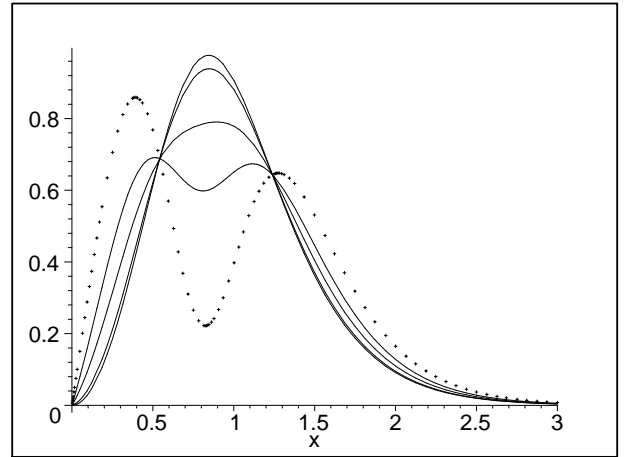
Подставляя далее функцию  $G_0(x, y)$ , а также  $b_0(y)$  в (VI.294), найдем в явном виде поправку к начальному распределению:

$$g_1(x, y) = \frac{2A(y) e^{\xi(y)x-y} [2b_0(y) - \xi(y)] - 2b_0(y)}{x (e^{\xi(y)x-y} + 1)^2} - \frac{A(y)\xi(y)[\xi(y) + 2b_0(y)]e^{\xi(y)x-y}}{(e^{\xi(y)x-y} + 1)^2} + \frac{2A(y)\xi^2(y)e^{2(\xi(y)x-y)}}{(e^{\xi(y)x-y} + 1)^3} \quad (\text{VI.314})$$

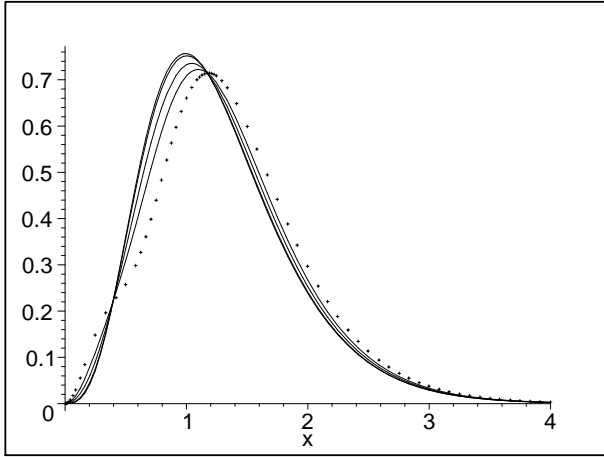
На Рис. 30 - 33 показана эволюция распределений плотности числа частиц и плотности их энергии в первом приближении, при значениях параметра  $y = 1, 3, 6, 10$ , когда значительная часть частиц начального распределения находится в области с малыми значениями энергии.



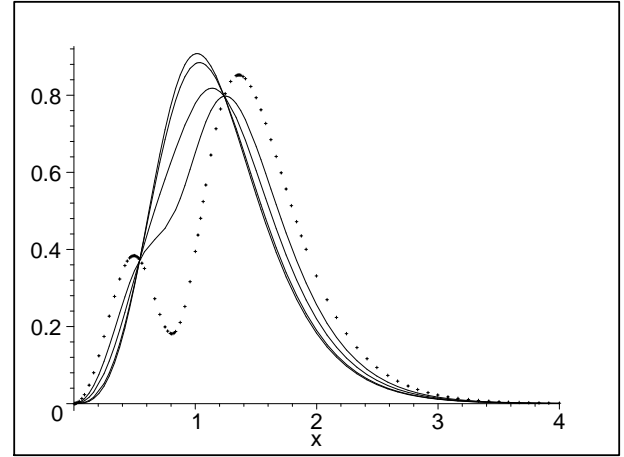
**Рис. 30.** Эволюция распределения плотности числа частиц,  $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$ , в первом приближении при  $y = 1$ . Сплошные линии слева направо:  $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$ , точечная линия -  $\tau = 0, 2$ .



**Рис. 31.** Эволюция распределения плотности числа частиц,  $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$ , в первом приближении при  $y = 3$ . Сплошные линии слева направо:  $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$ , точечная линия -  $\tau = 0, 2$ .



**Рис. 32.** Эволюция распределения плотности энергии частиц,  $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$ , в первом приближении при  $y = 1$ . Сплошные линии слева направо:  $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$ , точечная линия- $\tau = 0,2$ .



**Рис. 33.** Эволюция распределения плотности энергии частиц,  $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$ , в первом приближении при  $y = 3$ . Сплошные линии слева направо:  $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$ , точечная линия- $\tau = 0,2$ .

Поскольку функция распределения частиц по определению неотрицательна, ясно что проникновение минимума распределения в область отрицательных значений является следствием нарушения условий малости поправок в области определенных значений энергии. Тем не менее рассмотренные приближения достаточно полно описывают глобальные свойства распределения сверхтепловых частиц. Нам представляется весьма важным факт появления двух максимумов в распределении сверхтепловых частиц. С точки зрения ранее предложенной модели происхождения частиц сверхвысоких энергий [199], [200], [202] первый из этих максимумов может в дальнейшем эволюционировать в равновесное распределение, что подтверждают наши расчеты, а второй дать высокоэнергетический хвост сверхтепловых реликтовых частиц. Второе приближение рассмотрено в работе [220].

#### VI.13.4 Асимптотическое приближение модели Фоккера - Планка при сверхвысоких энергиях частиц

##### Функция распределения нулевого приближения

Рассмотрим космологическую эволюцию высокоэнергетического хвоста распределения сверхтепловых частиц при больших временах эволюции [220, 221]. При этом для простоты в качестве начального распределения частиц рассмотрим простое ступенчатое распределение:

$$G_0(x) = a\chi(x_0 - x), \tag{VI.315}$$

VI.13. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

где  $\chi(z)$  - функция Хевисайда. Подставляя эту функцию в соотношения нормировки (VI.282) и (VI.283), определим параметры распределения (VI.315):

$$x_0 = \frac{4}{3}; \quad a = \frac{81}{64}. \quad (\text{VI.316})$$

Следует заметить, что, поскольку нас интересует эволюция распределения сверхтепловых частиц при больших временах эволюции, конкретные детали первоначального распределения будут мало влиять на асимптотическое поведение функции распределения — об этом говорилось в предыдущих разделах. Нас не должен смущать тот факт, что полученное нормированное распределение не имеет свободных параметров, на самом деле свободный параметр есть, но он скрыт в определении безразмерных импульсных и временных переменных:

$$x = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}; \quad \tau = \frac{3A}{8\pi\mathcal{P}_0^3}$$

Поэтому, фактически, начальное распределение и эволюция распределения регулируется в данном случае одним параметром,  $\mathcal{P}_0$ , который указывает, во сколько раз средняя энергия частиц на данный момент времени превышает тепловую энергию в горячей модели на этот же момент.

Подставляя распределение (VI.315) в решение (VI.288) и используя четность подынтегральных функций, получим:

$$\mathcal{G}(\tau, x) = \frac{81}{128x\sqrt{\pi\tau}} \int_{-x_0}^{x_0} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} z dz. \quad (\text{VI.317})$$

Проводя интегрирование, найдем окончательно:

$$\mathcal{G}(\tau, x) = \frac{81}{128} \left[ \Phi\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] - \frac{81\sqrt{\tau}}{64\sqrt{\pi}x} \left[ e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\tau}} \right], \quad (\text{VI.318})$$

где  $\Phi(z)$  - интеграл вероятности (ошибок):

$$\Phi(x) = \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz. \quad (\text{VI.319})$$

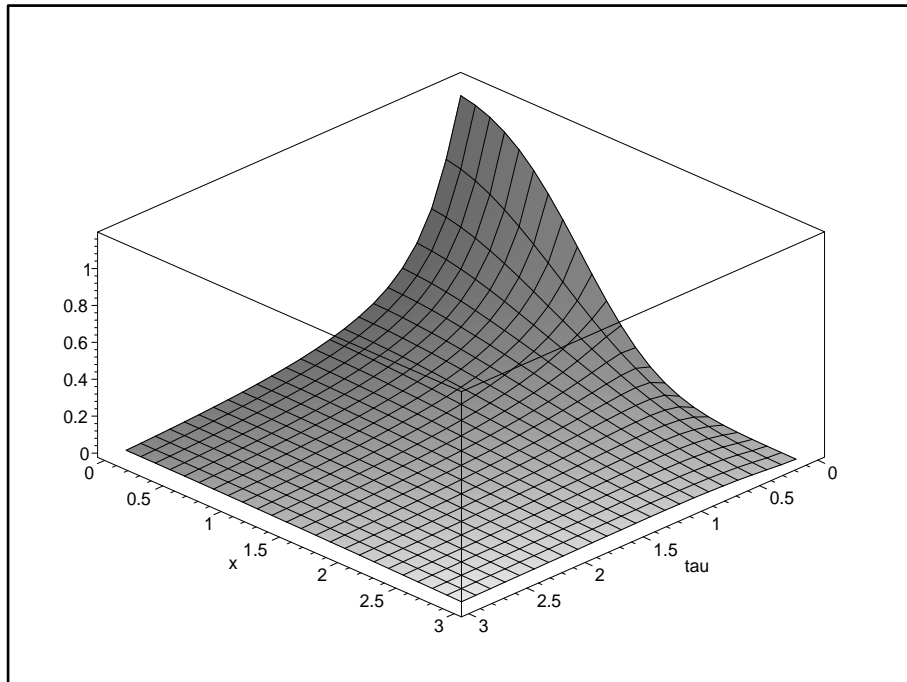


Рис. 34. График функции (VI.318).

Временная эволюция этого распределения показана на VI.13.4. На VI.13.4 и VII.49 показана временная эволюция распределения плотности числа частиц и плотности энергии относительно распределения (VI.318):

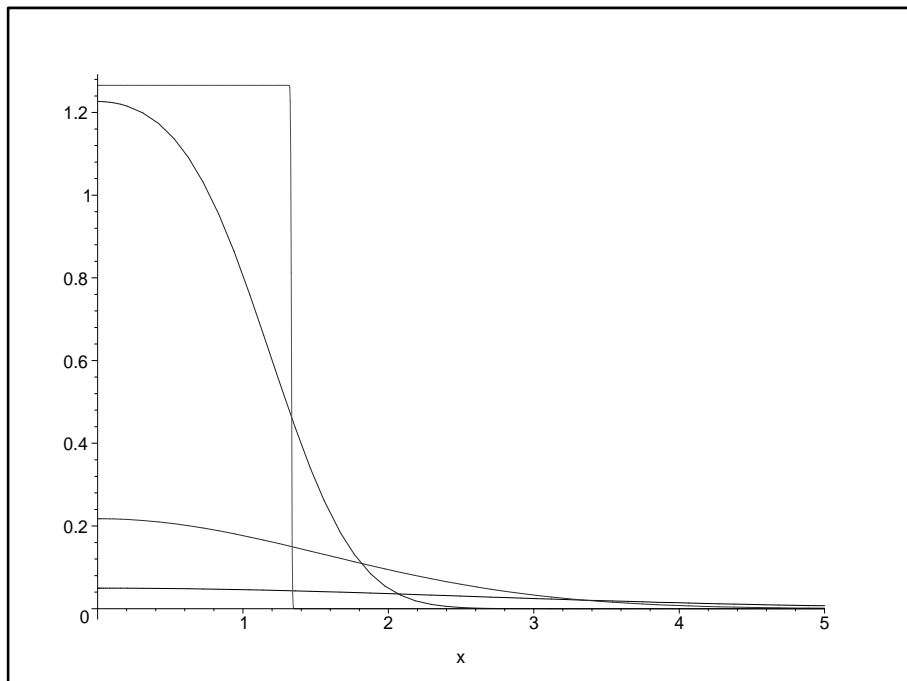
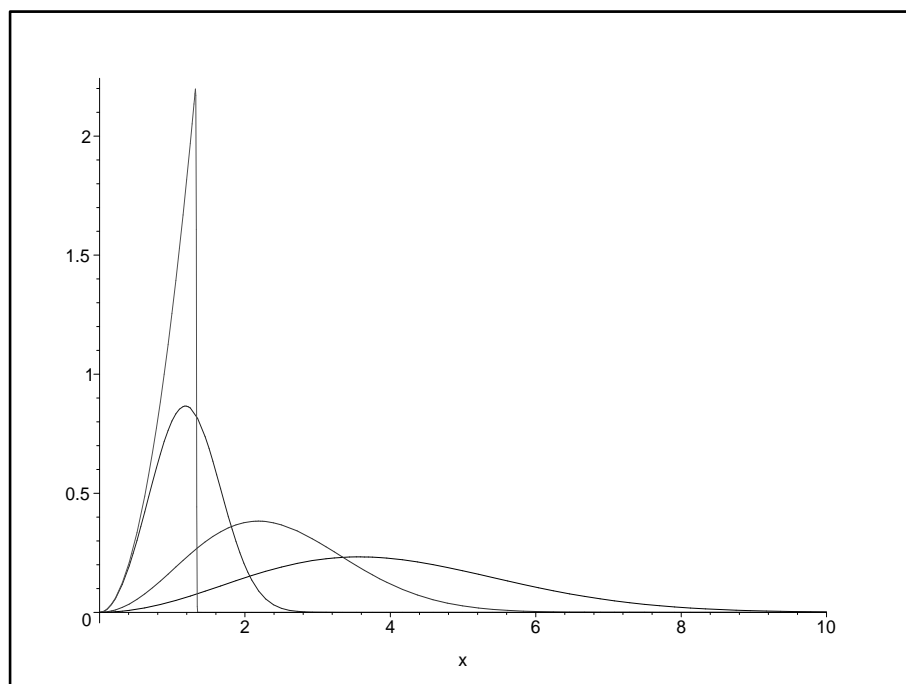
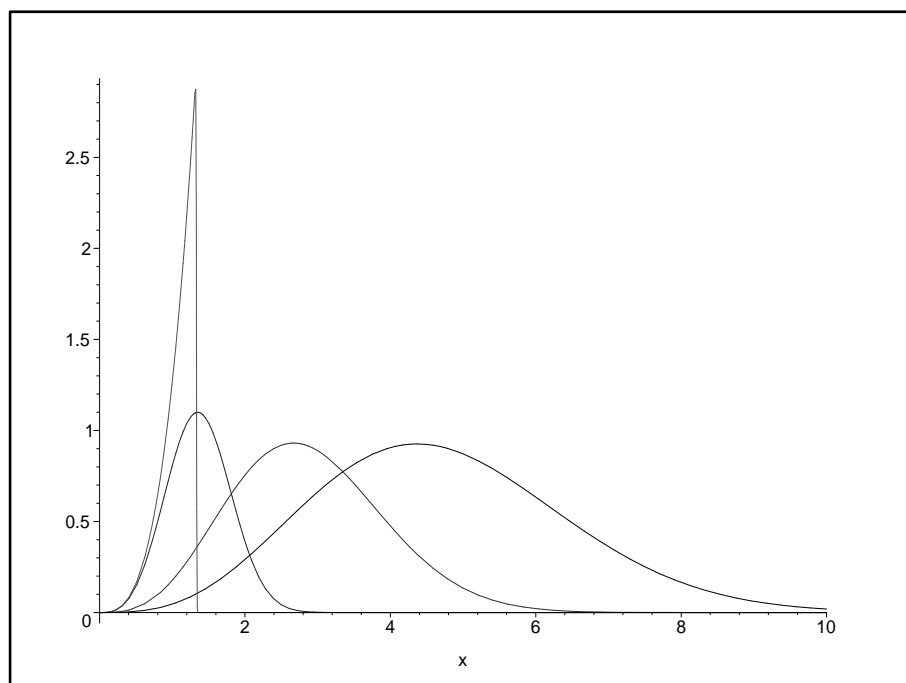


Рис. 35. Эволюция распределения (VI.318); сверху вниз:  $\tau = 0$ ,  $\tau = 0,1$ ,  $\tau = 1$ ,  $\tau = 3$ .

VI.13. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием



**Рис. 36.** Эволюция распределения конформной плотности числа частиц,  $d\mathcal{N} = x^2 \mathcal{G}(\tau, x)$  относительно распределения (VI.318); слева-направо:  $\tau = 0, \tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3$ .



**Рис. 37.** Эволюция распределения конформной плотности энергии частиц,  $d\mathcal{E} = x^3 \mathcal{G}(\tau, x)$  относительно распределения (VI.318); слева-направо:  $\tau = 0, \tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3$ .

### Поправка к нулевому приближению

Заметим, что выполнение закона сохранения энергии обеспечивается наличием члена с функцией  $b(\tau)$  в правой части диффузионного уравнения (VI.280), отсутствие которого не учитывает процесса перекачки энергии при малых временах эволюции. Будем теперь полагать, что  $b(\tau)$  - малая, но отличная от нуля величина. Тогда разлагая уравнение (VI.280) в ряд по малости  $b(\tau)$  и представляя его решение в виде ряда:

$$G = G_0 + G_1 + \dots, \quad (\text{VI.320})$$

в нулевом приближении получим уравнение теплопроводности в сферической системе координат относительно функции  $G_0$ . Таким образом, функция распределения нулевого приближения определяется решением (VI.318). Тогда для линейной по  $b(\tau)$  поправки получим неоднородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial G_1}{\partial \tau} + f(\tau, x) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} \right), \quad (\text{VI.321})$$

где введены обозначения

$$f(\tau, x) = -\frac{2b_0(\tau)}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 G_0(\tau, x); \quad (\text{VI.322})$$

$$b_0(\tau) = \int_0^\infty G_0(\tau, x) x dx. \quad (\text{VI.323})$$

Учитывая (VI.318) и интегрируя в (VI.323), получим:

$$b_0(\tau) = a \left[ \Phi \left( \frac{x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \left( \frac{x_0^2}{2} - t \right) + \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} x_0 \exp \left( -\frac{x_0^2}{4\tau} \right) \right], \quad (\text{VI.324})$$

куда необходимо в дальнейшем подставить из (VI.316) значения для  $a$  и  $x_0$ .

Используем решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} + f(t, \vec{r}) \quad (\text{VI.325})$$

(см., например, [222]):

$$u(t, \vec{r}) = \frac{1}{8\pi^{2/3} t^{3/2}} \iiint_{V_0} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4t}} u(0, \vec{r}_0) d^3 \vec{r}_0 - \frac{1}{8\pi^{2/3}} \int_0^t \frac{dt_0}{t_0^{3/2}} \iiint_{V_0} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4t_0}} f(t_0, \vec{r}_0) d^3 \vec{r}_0, \quad (\text{VI.326})$$

VI.13. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием

где интегрирование проводится по всему трехмерному пространству  $V_0$ . Перейдем затем к сферической системе координат в пространстве импульсов и проведем интегрирование по его угловым переменным, учитывая тот факт, что по определению начальное значение нулевого приближения функции  $G_0(0, x)$  совпадает с начальным значением самой функции  $\mathcal{G}(0, x)$ . Тогда в формуле (VI.326)

$$G(0, x) = 0,$$

и мы получим:<sup>17</sup>

$$G_1(\tau, x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} b_0(t) \times \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left[ e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right] \frac{\partial}{\partial y} y^2 G_0(t, y). \quad (\text{VI.327})$$

Поскольку решение (VI.317) (или (VI.327)) является четной функцией переменной  $x$ , что легко проверить -

$$G_0(\tau, -x) = G_0(\tau, x), \quad (\text{VI.328})$$

то решение для поправки к функции распределения можно представить в более компактном виде:

$$G_1(\tau, x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} b_0(t) \int_{-\infty}^\infty \frac{dy}{y} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \frac{\partial}{\partial y} y^2 G_0(t, y). \quad (\text{VI.329})$$

Проводя интегрирование по частям во внутреннем интеграле (VI.329), получим окончательно:

$$G_1(\tau, x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} b_0(t) \int_{-\infty}^\infty dy e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} G_0(t, y) \left( 1 + \frac{y^2}{2t} - \frac{xy}{2t} \right). \quad (\text{VI.330})$$

Необходимо отметить, что встречающиеся здесь и далее интегралы вида (VI.330) крайне неудобны для численного анализа как при малых временах, при которых показатель подынтегральной экспоненты стремится к  $-\infty$ , так и при малых значениях импульсной переменной. В обоих этих случаях интегралы медленно сходятся. Наличие экспоненты в подынтегральном выражении (VI.330) приводит к тому, что главный вклад в интеграл дают значения  $y$ , близкие к  $x$ . В связи с этим рассмотрим асимптотическое значение этих интегралов при  $t \rightarrow 0$ . Согласно известной теореме метода Лапласа (см., например [223]) справедливо разложение:

$$F(t) = \int_{-a}^a e^{-tz^2} \varphi(z) dz \approx \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(0)}{n! 2^{2n}} t^{-n-1/2}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (\text{VI.331})$$

<sup>17</sup>Здесь и далее мы для простоты обозначений мы вводим переменную  $t = \tau'$

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

где  $\varphi(x)$  - аналитическая функция, регулярная в точках отрезка  $-a, +a$ . Для функций  $F(t, x)$  вида:

$$F(t, x) = \int_{-a}^a e^{-t(z-x)^2} \varphi(z) dz$$

выражение (VI.331) принимает вид:

$$F(t, x) \approx \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(x)}{n! 2^{2n}} t^{-n-1/2}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{VI.332})$$

Таким образом, при  $t \rightarrow +0$  имеет место асимптотическая оценка:

$$\int_{-a}^a e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}} \varphi(z) dz \approx \sqrt{\frac{\pi}{t}} \varphi(x), \quad (\text{VI.333})$$

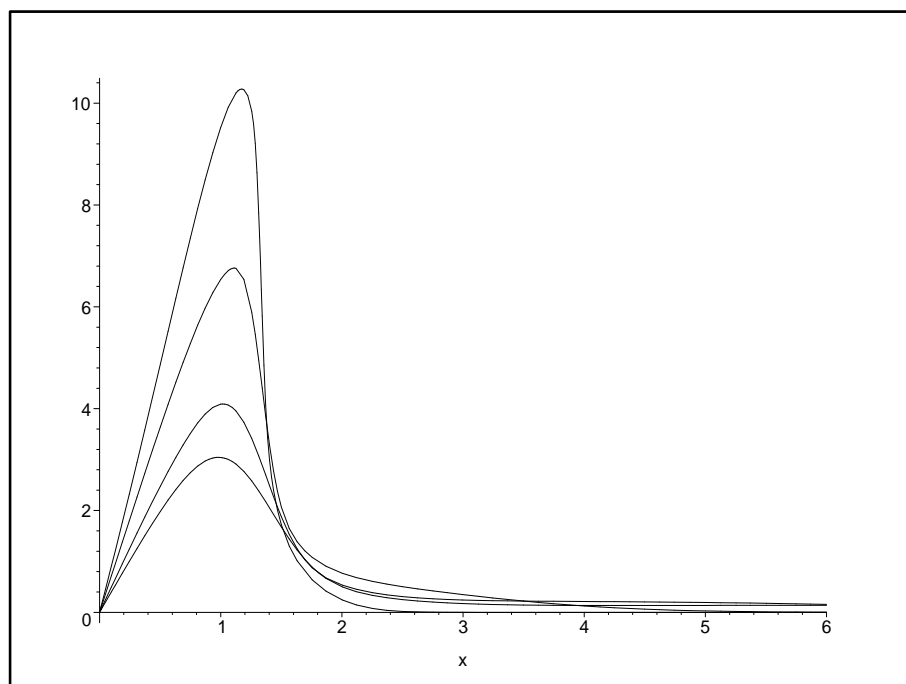
для  $x \in (-a, a)$ . Применяя асимптотическую оценку (VI.333) к выражению (VI.330) получим асимптотическую оценку для функции  $\mathcal{G}_1(\tau, x)$ :

$$\mathcal{G}_1(\tau, x) \approx \frac{1}{x} \int_0^{\tau} \frac{dt}{t} \mathcal{G}_0(t, x) b_0(t). \quad (\text{VI.334})$$

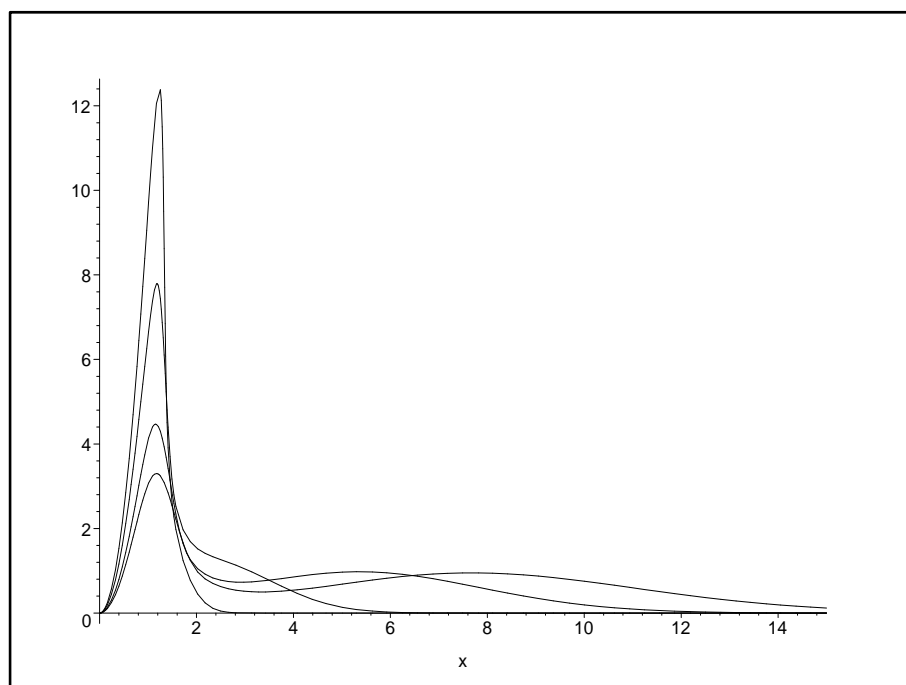
Таким образом, при подстановке нулевого приближения (VI.318), а также (VI.324) в (VI.334), получим явное выражение для первой поправки.

На Рис. VI.13.4, VI.13.4 показаны результаты численного моделирования процесса эволюции сверхтеплого ультрарелятивистского компонента космологической плазмы на основе оценки (VI.334).

VI.13. Космологическая эволюция с сильно нарушенным равновесием



**Рис. 38.** Временная эволюция плотности числа частиц, функции  $x^2 \mathcal{G}(\tau, x)$ , сверху вниз:  $\tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3, \tau = 10$ .



**Рис. 39.** Временная эволюция плотности энергии частиц, функции  $x^3 \mathcal{G}(\tau, x)$ , сверху вниз:  $\tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3, \tau = 10$ .

## VI.14 Вывод кинетических уравнений для плазмы в гравитационном поле

Перейдем теперь к рассмотрению следующего приближения, полагая [41]:

$$\begin{aligned} F_1(\xi_a) &= N_a^{-1} f_a(\xi_a); \\ F_2(\xi_a, \xi_b) &= N_a^{-1} N_b^{-1} \{f_a(\xi_a) f_b(\xi_b) + g_{ab}(\xi_a, \xi_b)\}; \\ F_3(\xi_a, \xi_b, \xi_c) &= N_a^{-1} N_b^{-1} N_c^{-1} \{f_a(\xi_a) f_b(\xi_b) f_c(\xi_c) + g_{ab}(\xi_a, \xi_b, \xi_c)\}; \\ \dots\dots\dots F_S(\xi_1, \dots, \xi_S) &= \prod_{a=1}^S N_a^{-1} f_a(\xi_a); \quad S \geq 4, \quad (\text{VI.335}) \end{aligned}$$

где  $N_a$  - полное число частиц сорта « $a$ », симметрирование в (VI.335) проводится без фактора  $(n!)^{-1}$  и

$$\int g_{ab}(\xi_a, \xi_b) d\Gamma_b = 0. \quad (\text{VI.336})$$

Выпишем два первых уравнения цепочки, переходя к пределу  $N_a \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} p_a^i \overset{a}{\nabla}_i f_a + e_a \ll F^i \cdot k \gg_N p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} + \\ + e_a p_a^k \frac{\partial}{\partial p_a^i} \int d\bar{\Gamma}_b F^i \cdot k(x_a|b) g_{ab}(\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b) = 0; \quad (\text{VI.337}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_a}{d\tau_a} \left\{ f_b \left[ p_a^i \overset{a}{\nabla}_i f_a + e_a \langle F^i \cdot k \rangle_N p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} + e_a F^i \cdot k(x_a|b) p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} \right] + p_a^i \overset{a}{\nabla}_i g_{ab} + \right. \\ \left. + e_a p_a^k \frac{\partial g_{ab}}{\partial p_a^i} \left[ F^i \cdot k(x_a) + F^i \cdot k(x_a|b) \right] + e_a p_a^k \frac{\partial}{\partial p_a^i} \left[ \int d\Gamma_c F^i \cdot k(x_a|c) g_{ac} f_b + \right. \right. \\ \left. \left. + \int d\Gamma_c F^i \cdot k(x_a|c) g_{ab} f_c + \int d\Gamma_c F^i \cdot k(x_a|c) g_{bc} f_a \right] \right\} + \\ + (a \longleftrightarrow b) = 0. \quad (\text{VI.338}) \end{aligned}$$

Уравнение (VI.338) многовременное; оно соответствует уравнению Лиувилля в форме (VII.97). Решение этого уравнения затем необходимо синхронизировать на момент времени  $\tau_a = \tau$ ;  $\tau_b = \tau$ , т.е. положить в решении  $g_{ab}(S_a, S_b)$ ;  $S_a = S_a^*(\tau)$ ;  $S_b = S_b^*(\tau)$ ;  $g_{ab}(S_a^*(\tau), S_b^*(\tau)) = g_{ab}(\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b)$ . Заметим, что корреляционная функция  $g_{ab}$ , получающаяся из (VI.338), автоматически является симметричной по перестановкам частиц в отличие от функции, введенной в [41], которую необходимо симметризовать. Учитывая в (VI.338) следствие уравнений (VI.337) и определение макроскопического поля (см. там же), запишем это уравнение в более простой форме:

$$\begin{aligned} \frac{dS_a}{d\tau_a} \left\{ e_a F^i \cdot k(x_a|b) f_b p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} + [\bar{\mathcal{H}}_a, g_{ab}] + e_a p_a^k \frac{\partial g_{ab}}{\partial p_a^i} F^i \cdot k(x_a|b) + \right. \\ \left. + e_a p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} \int d\Gamma_c F^i \cdot k(x_a|c) g_{bc} \right\} + (a \longleftrightarrow b) = 0, \quad (\text{VI.339}) \end{aligned}$$

#### VI.14. Кинетические уравнения для плазмы в гравитационном поле

где  $\bar{\mathcal{H}}_a$  - функция Гамильтона « $a$ » - частицы, определенная относительно макроскопического поля  $\ll F^i_{.k} \gg_N$ . Пренебрегая в (VI.339) произведением локального поля  $F^i_{.k}(x_a|b)$  на корреляционную функцию, запишем это решение уравнения

$$g_{ab}(S_a, S_b) = -e_a f_b \int^{S_a(\tau_a)} F^i_{.k}(x_a|b) p_a^k \frac{\partial f_a}{\partial p_a^i} dS_a + (a \longleftrightarrow b), \quad (\text{VI.340})$$

где интегрирование проводится вдоль макроскопической мировой линии « $a$ » - той частицы  $x_a^i = x_a^i(S_a)$ ;  $p_a^i = p_a^i(S_a)$ , определяемой уравнениями

$$\frac{dx_a^i}{dS_a} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_a}{\partial P_a^i}; \quad \frac{dP_a^i}{dS_a} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_a}{\partial x_a^i}. \quad (\text{VI.341})$$

Подставляя (VI.340) в (VI.337), получим нелокальные кинетические уравнения:

$$\begin{aligned} [\bar{\mathcal{H}}_a, f_a] = & -\frac{\partial}{\partial p_a^i} p_a^k \int d\bar{\Gamma}_b \left\{ e_a^2 F^i_{.k}(x_a|b) f_b \int^{S_a(\tau)} F^l_{.m}(x'_a|b) p_a^m \frac{\partial f_a}{\partial p_a^l} dS_a + \right. \\ & \left. + e_a e_b F^i_{.k}(x_a|b) f_a \int^{S_b(\tau)} F^l_{.m}(x_b|a) p_b^m \frac{\partial f_b}{\partial p_b^l} dS_b \right\}. \end{aligned} \quad (\text{VI.342})$$

Обозначим с помощью  $f_{lm}(x|b)$  кососимметрический тензор, являющийся решением сингулярных уравнений

$$\begin{aligned} f^{ik}_{.k} &= -4\pi \int \delta(x|x_b) u_b^i dS_b; \\ f^{ik*}_{.k} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.343})$$

Тогда кинетические уравнения (VI.342) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [\bar{\mathcal{H}}_a, f_a] = & -\frac{\partial}{\partial p_a^i} J_a^i; \\ j_a^i = & e_a^2 e_b^2 p_a^k \int d\bar{\Gamma}_b \left[ f_b f^i_{.k}(x_a|b) \int^{S_a(\tau)} f^l_{.m}(x'_a|b) p_a^m \frac{\partial f_a}{\partial p_a^l} dS_a + \right. \\ & \left. + f_a f^i_{.k}(x_a|b) \int^{S_b(\tau)} f^l_{.m}(x'_b|a) p_b^m \frac{\partial f_b}{\partial p_b^l} dS_b \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.344})$$

В приближении ВКБ мы должны полагать одночастичную функцию распределения слабоменяющейся на четырехмерном интервале взаимодействия, что в свою очередь предполагает малость изменения на этом интервале макроскопических полей  $g_{ik}(x)$  и  $\ll F_{ik} \gg_N$ , т.е. выполнено условие четырехточечности столкновения (I.171)

$$r_{eff} \ll L_x; \quad r_{eff}/\bar{v} \ll L_t \quad (\text{VI.345})$$

где  $L_x, L_t$  - характерные масштабы пространственной и временной неоднородности макроскопических полей. Предполагая эти условия выполненными, приведем интеграл (VI.344) к виду

$$J_a^i = p_a^k e_a^2 e_b^2 \int d\bar{\Gamma}_b \left[ f_b(x_a, p_b) p_a^m \frac{\partial f_a(x_a, p_a)}{\partial p_a^l} f_{.k}^i(x_a|b) \int^{S_a(\tau)} f_{.m}^l(x'_a|b) dS_a + \right. \\ \left. + f_a(x_a, p_a) p_b^m \frac{\partial f_b(x_a, b)}{\partial p_b^l} f_{.k}^i(x_a|b) \int^{S_b(\tau)} f_{.m}^l(x'_b|a) dS_b \right].$$

Для вычисления внутренних интегралов необходимо найти ВКБ-решение уравнений (VI.343). Проще всего это сделать в геодезической системе координат с центром в точке нахождения «а» - той частицы. Находя это решение и подставляя в последнее выражение, получим интеграл столкновений в форме Беляева - Будкера [228]. Следующие, нелокальные, члены разложения интеграла столкновений имеют первый порядок по малым параметрам (VI.345).

## VI.15 Усреднение локальных флуктуаций метрики

Изложенная выше теория является по существу теорией *на фоне гравитационного поля*. При попытке распространить эту теорию на гравитационные взаимодействия возникают трудности принципиального характера.

*Во - первых*, нелинейность полевых уравнений Эйнштейна не позволяет отыскать общее решение уравнений с сингулярными источниками, как это делается, например в теории электромагнитных взаимодействий [47].

*Во - вторых*, проводя формальное усреднение уравнений Эйнштейна, получим

$$\langle\langle G_{ik} \rangle\rangle_N = 8\pi \langle\langle T_{ik} \rangle\rangle_N. \quad (\text{VI.346})$$

Нелинейная структура тензора Эйнштейна не позволяет записать равенство

$$\langle\langle G_{ik}(g_{lm}) \rangle\rangle = G_{ik}(\langle\langle g_{lm} \rangle\rangle),$$

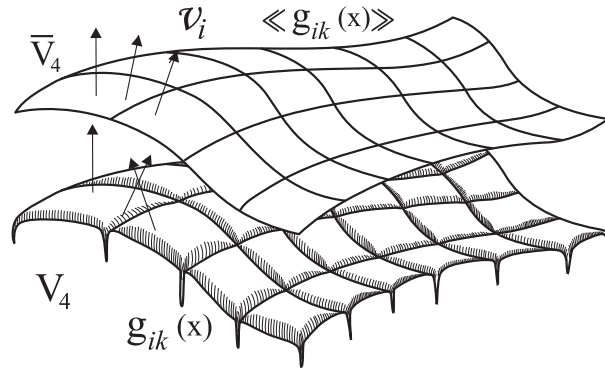
в результате чего *макроскопический тензор энергии - импульса не определяет макроскопическую метрику пространства - времени*.

*В - третьих*, выделение времениподобного поля геодезических наблюдателей, т.е. гиперповерхности Коши, становится невозможным до тех пор, пока не определена макроскопическая метрика пространства - времени.

Выход из создавшегося положения состоит в том, что согласно принципам, сформулированным в [1], наблюдатель должен быть макроскопическим, т.е. масштабы его линеек и часов должны быть гораздо больше соответствующих масштабов длин и времен, определяющих локальные флуктуации гравитационного поля. Выделение макроскопического поля наблюдателей, времениподобных и геодезических в некоторой макроскопической метрике  $\langle\langle g_{ik} \rangle\rangle$  подразумевает существование макроскопического пространства - времени  $\bar{V}_4$ , геометрия которого устанавливается макроскопическими измерениями. В свою очередь, знание этой макроскопической геометрии позволяет сделать некоторые выводы и о

### VI.15. Усреднение локальных флуктуаций метрики

микроскопическом распределении взаимодействующих частиц. При таком подходе микроскопическое поле  $g_{ik}(x|1, \dots, N)$  можно рассматривать как локальные отклонения макроскопической метрики  $\langle\langle g_{ik}(x) \rangle\rangle$  в координатах  $\{x^i\}$  (Рис.40). Общая теория относительности налагает неизгладимый отпечаток на статистическую картину — часы и линейки на микроуровне не совпадают с макроскопическими часами и линейками. Геодезические линии в микроскопическом пространстве - времени  $V_4$  не выглядят таковыми в терминах макроскопического  $\bar{V}_4$ . Дальнодействующий характер гравитационного взаимодействия и неотрицательность масс частиц позволяют предположить, что микроскопическое гравитационное поле ансамбля большого числа частиц имеет, в основном, макроскопический характер и лишь малые в среднем локальные флуктуации вблизи массивных частиц [17].



**Рис. 40.** Микроскопическая и макроскопическая геометрия пространства - времени ансамбля взаимодействующих частиц. Стрелками изображены поля геодезических наблюдателей в микроскопическом,  $V_4$ , и макроскопическом,  $\bar{V}_4$ , пространствах.

В самосогласованной теории должны автоматически появляться некоторые характерные масштабы корреляций, на которых локальные микроскопические поля вырастают в среднее самосогласованное поле ансамбля. Как мы увидим из дальнейшего, таким характерным масштабом является звуковой горизонт частицы. Кинетическая теория, отталкивающая как от первоосновы, от самосогласованного гравитационного поля, будет являться гравитационным аналогом кинетической теории Балеску - Леонарда [229], [230], приводящей к сходящимся на больших прицельных расстояниях интегралам столкновений [231].

Итак, предположим, что микроскопическую метрику пространства - времени  $V_4$  можно записать в виде

$$g_{ik}(x|1, \dots, N) = \bar{g}_{ik}(x) + \delta g_{ik}(x|1, \dots, N), \quad (\text{VI.347})$$

где

$$\langle \delta g_{ik} \delta g^{kl} \rangle \ll 1, \quad (\text{VI.348})$$

причем

$$\langle \delta g_{ik} \rangle = 0. \quad (\text{VI.349})$$

В нулевом приближении по малости гравитационного взаимодействия можно положить

$$\bar{g}_{ik}(x) = \overset{0}{g}_{ik}(x), \quad (\text{VI.350})$$

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

где макроскопическая метрика  $\overset{0}{g}_{ik}(x)$  определяется уравнениями Эйнштейна относительно макроскопического ТЭИ

$$G_{ik}(\overset{0}{g}_{lm}) = 8\pi \langle T_{ik} \rangle. \quad (\text{VI.351})$$

Разложим уравнения Эйнштейна в ряд Тейлора по малости

$$h_{ik} = g_{ik}(x|1, \dots, N) - \overset{0}{g}_{ik}(x); \quad (\text{VI.352})$$

$$G_{ik} = G_{ik}(\overset{0}{g}_{kl}) + \delta G_{ik}^{(1)}(h_{kl}) + G_{ik}^{(2)}(h_{kl}) + \dots \quad (\text{VI.353})$$

При этом удобно воспользоваться следующим представлением возмущенных величин [232]:

$$g_{ik} - \overset{0}{g}_{ik} = h_{ik}; \quad g^{ik} - \overset{0}{g}^{ik} = \gamma^{ik}; \quad (\text{VI.354})$$

$$(\overset{0}{g}_{ik} + h_{ik})(\overset{0}{g}^{kl} + \gamma^{kl}) = \delta_i^l; \quad (\text{VI.355})$$

$$\Gamma_{ik}^l - \overset{0}{\Gamma}_{ik}^l \equiv \Omega_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{lj} (h_{ij,k} + h_{kj,i} - h_{ik,j}); \quad (\text{VI.356})$$

$$R_{ik} - \overset{0}{R}_{ik} = \Omega_{ik,l}^l - \Omega_{l(i,k)}^l - \Omega_{jk}^l \Omega_{il}^j + \Omega_{ik}^l \Omega_{lj}^j, \quad (\text{VI.357})$$

где ковариантное дифференцирование определено относительно метрического тензора  $\overset{0}{g}_{ik}$ . Из (VI.355) следует

$$\gamma^{ik} = -h^{ik} + h_i^i h^{kl} + \dots, \quad (\text{VI.358})$$

где операция поднятия индексов осуществляется метрическим тензором  $\overset{0}{g}^{ik}$ . В первом по взаимодействию приближении положим

$$\overset{1}{h}_{ik} = \sum_a \overset{1}{h}_{ik}(x|a) \quad (\text{VI.359})$$

и определим  $\overset{1}{h}_{ik}(x|a)$  как решение линеаризованных уравнений Эйнштейна

$$\delta \overset{(1)}{G}_{ik}(\overset{1}{h}) = 8\pi \left[ \int m_a u_a^i u_a^k \delta(x|x_a) dS_a - \langle T^{ik} \rangle_a \right], \quad (\text{VI.360})$$

такое, чтобы выполнялись условия сшивки метрики с макроскопической метрикой нулевого приближения

$$\overset{1}{h}_{ik}/S = 0; \quad \overset{1}{h}_{ik,l} h^l/S = 0, \quad (\text{VI.361})$$

где  $S$  - двумерная поверхность, охватывающая трехмерную область  $\sum_\tau$ , в которой находится « $a$ » - тая частица;  $n^i$  - вектор нормали к ней. Поскольку  $\overset{0}{g}_{ik} \neq \bar{g}_{ik}$ , то и  $\bar{h}_{ik} \neq 0$ . Перенормируем поэтому макроскопическую метрику

$$\overset{1}{\bar{g}}_{ik}(x) = \overset{0}{g}_{ik} + \overset{1}{h}_{ik}(x) \quad (\text{VI.362})$$

### VI.15. Усреднение локальных флуктуаций метрики

и ее локальные флуктуации

$$\delta g_{ik}^1 = h_{ik}^1 - \bar{h}_{ik}^1, \quad (\text{VI.363})$$

так что теперь

$$\langle\langle \delta g_{ik}^1 \rangle\rangle = 0. \quad (\text{VI.364})$$

В следующем приближении по порядку взаимодействия получим уравнения для локальных флуктуаций второго порядка

$$\delta G_{ik}^{(1)}(\bar{h}) = -\delta G_{ik}^{(2)}(\bar{h}), \quad (\text{VI.365})$$

усредняя которые, получим линейные уравнения на поправку к макроскопическому метрическому тензору  $\bar{g}_{ik}(x)$ :

$$\delta G_{ik}^{(1)}(\bar{h}) = -\langle\langle \delta G_{ik}^{(2)}(\bar{h}) \rangle\rangle. \quad (\text{VI.366})$$

Следуя методу Айзексона [233], [234] суммарную макроскопическую метрику  $\bar{V}_4$  в квадратичном приближении по порядку взаимодействия мы можем определить из уравнений Эйнштейна

$$G_{ik}(\bar{g}) = 8\pi \langle\langle T_{ik} \rangle\rangle - \langle\langle \delta G_{ik}^{(2)}(\bar{h}) \rangle\rangle, \quad (\text{VI.367})$$

т.е. с поправкой на плотность энергии локальных флуктуаций гравитационного поля.

После нахождения  $\bar{h}_{ik}^{(2)}$  перенормируем локальные флуктуации метрики второго порядка

$$\delta \bar{g}_{ik}^2 = h_{ik}^2 - \bar{h}_{ik}^2,$$

так что и в этом приближении выполняется условие (VI.349). Здесь необходимо сделать несколько замечаний. Во - первых, макроскопический наблюдатель регистрирует уже перенормированную макроскопическую метрику  $\bar{g}_{ik}(x)$ , поэтому второй член в правой части (VI.367) должен обладать такими же симметриями, как и первый. Во - вторых, при выводе уравнений (VI.365), (VI.366) мы полагали, что нам известны точные микроскопические мировые линии частиц, порождающих гравитационное поле. Однако, фактически мы не обладаем такой информацией. Поэтому мировые линии взаимодействующих частиц мы также можем восстановить лишь последовательными приближениями по порядку взаимодействия. Малым параметром разложения является масса точечной частицы,  $m_a$ . Таким образом, в нулевом и первом порядках теории в качестве мировых линий частиц могут быть взяты их геодезические линии в макроскопической метрике  $\bar{g}_{ik}$ . Если мы строим теорию второго порядка по порядку взаимодействия, то в правую часть уравнения (VI.365) необходимо добавить поправку к микроскопическому ТЭИ, обязанную отклонению частиц от макроскопических траекторий  $x^i = x_o^i(S)$ ;  $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_i^0(S)$ :

$$\delta T^{ik} = \sum_a \int m [\delta(x|x(S)) u^i u^k - \delta(x|x(S)) u_0^i u_0^k] dS.$$

Поскольку эта поправка линейна по локальным флуктуациям метрики, она не внесет вклад в уравнение (VI.366) для поправки к макроскопическому метрическому тензору. В - третьих, величина  $\langle\langle \delta G_{ik}^{(2)}(\hbar) \rangle\rangle$  является расходящимся интегралом. Расходимость этих интегралов вызвана неправомерностью линейного приближения уравнений поля вблизи массивной частицы и устраняется стандартной процедурой перенормировки массы точечных частиц,  $m_a$ . Наконец, в - четвертых, масса точечных частиц, определяемых как аддитивный сингулярный источник ТЭИ в уравнениях поля, в присутствии непрерывной среды становится функцией координат частицы:  $m = m(S)$ . Такая зависимость возникает в результате процессов аккреции среды на точечную частицу и обратного процесса испарения. Поэтому классическая точечная частица движется в среде по мировой линии, определяемой каноническими уравнениями движения (I.18) с функцией

$$\mathcal{H}(x, \mathbb{P}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{g^{ik} \mathbb{P}_i \mathbb{P}_k}{m} - m \right] = 0, \quad (\text{VI.368})$$

где  $m = m(x)$  находится из уравнений Эйнштейна с сингулярными источниками (??). Соответствующие уравнения движения в терминах переменных  $x^i, p^i$  совпадают с уравнениями движения частицы в скалярном поле  $\Phi(x)$ , если в последних положить  $m + q\Phi \rightarrow m(x)$ :

$$\frac{Du^i}{dS} = (\ln m)_{,k} (g^{ik} - u^i u^k). \quad (\text{VI.369})$$

Следует также заметить, что в этом разделе мы рассматриваем ансамбль гравитирующих классических точечных частиц. Для классического описания гравитационных взаимодействий частиц, необходимо, чтобы масштаб локализации частиц был гораздо меньше характерного радиуса кривизны пространства - времени. Выражая среднюю плотность числа частиц через их массу и характерный радиус кривизны макроскопического пространства - времени  $\bar{V}_4, L$ , запишем указанное условие классического рассмотрения гравитационных взаимодействий в планковских масштабах

$$Lm^2 \gg 1. \quad (\text{VI.370})$$

## VI.16 Кинетическое уравнение для безмассовых частиц с учетом гравитационного взаимодействия с массивными частицами в пространственно плоском мире Фридмана

В [235] показано, что в рамках макроскопически однородной космологической модели, основанной на ньютоновской теории гравитации, можно построить кинетические уравнения с интегралом гравитационных столкновений, сходящимся при больших прицельных расстояниях. Ядро полученного в [235] интеграла столкновений совпадает с ядром интеграла столкновений Ландау [236], однако «кулоновский» логарифм оказывается конечным при

## VI.16. Кинетическое уравнение для безмассовых частиц

любых конечных космологических временах. В независимой работе [237] получен аналогичный результат, но интеграл столкновений отличается от полученного в [235], - он не обращается в нуль равновесным распределением. Различие ядер интегралов столкновений в [235] и [237] вызвано, по - видимому, следующими обстоятельствами:

1. В мире Фрийдмана отсутствует однородность по времени, в связи с чем энергия частиц не является интегралом движения.
2. Вследствие дальнедействующего характера гравитационного взаимодействия акт столкновения растянут во времени.

Сочетание временной нелокальности гравитационного взаимодействия с отсутствием временной однородности и приводит к интегралу столкновений [237]. В [238] получен интеграл кулоновских столкновений для нерелятивистских заряженных частиц в мире Фрийдмана, с точностью до переобозначений совпадающий с интегралом столкновений [237], хотя все вычисления в [238] проведены в рамках эйнштейновской теории гравитации. Заметим, что привлечение эйнштейновской теории гравитации к задаче о кулоновском взаимодействии нерелятивистских частиц излишне, так как нерелятивистские частицы взаимодействуют посредством кулоновского поля одинаково, в эйнштейновской и ньютоновской трактовке, сама же кулоновская составляющая электромагнитного поля в изотропном однородном пространстве, будучи связана с законом сохранения заряда, не отличается от классической. . Вывод кинетических уравнений без учета излучения для нерелятивистских частиц на фоне мира Фрийдмана всегда можно осуществить в рамках ньютоновской теории гравитации и ньютоновской механики. Принципиально другая ситуация имеет место для ультрарелятивистских частиц - описание гравитационного воздействия на такие частицы можно провести лишь в рамках релятивистской теории гравитации. Ниже мы частично реализуем программу, описанную в предыдущем разделе, и построим кинетическое уравнение для ультрарелятивистских частиц в мире Фрийдмана с учетом их взаимодействия с массивными центрами, распределенными хаотически, но однородно в среднем, причем обратным гравитационным воздействием безмассовых частиц на массивные будем пренебрегать [239, 240, 241].

Для нахождения гравитационного поля массивной точечной частицы в мире Фрийдмана удобнее всего воспользоваться изотропными координатами, в которых интервал имеет вид

$$dS^2 = e^\nu d\eta^2 - e^\lambda [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (\text{VI.371})$$

где  $\nu = \nu(r, \eta)$ ;  $\lambda = \lambda(r, \eta)$ . Тогда мировой линией массивной частицы, определяемой уравнениями движения (VI.369) является линия времени, причем  $m = m(\eta)$  - произвольная функция. Нетривиальные уравнения Эйнштейна для метрики (VI.371) принимают вид

(см., например, [47])

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left[ \frac{\lambda'^2}{2} + \lambda'\nu' + \frac{2}{r}(\lambda' + \nu') \right] - e^{-\nu} \left( \ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} + \frac{3}{4}\dot{\lambda}^2 \right) = \\ = 8\pi[P + v^2(\mathcal{E} + P)]; \end{aligned} \quad (\text{VI.372})$$

$$-e^{-\lambda} \left( \lambda'' + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{2}{r}\lambda' \right) + \frac{3}{4}e^{-\nu}\dot{\lambda}^2 = 8\pi \left[ me^{-\frac{3}{2}\lambda}\delta(\vec{r}) + \mathcal{E} + v^2(\mathcal{E} + P) \right]; \quad (\text{VI.373})$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda}(2\dot{\lambda}' - \nu'\dot{\lambda}) = 8\pi(\mathcal{E} + P)e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}v\sqrt{1+v^2}, \quad (\text{VI.374})$$

где  $v = u^r e^{\lambda/2}$  - реперная проекция радиальной скорости жидкости. Функция Дирака  $\delta(\vec{r})$  определена в трехмерном плоском пространстве

$$4\pi \int \delta(r)r^2 dr = 1.$$

Вычитая из первого уравнения системы (VI.374) второе, получим

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left[ \frac{\lambda'^2}{2} + \lambda'\nu' - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{1}{r}(\lambda' + \nu') - (\lambda'' + \nu'') \right] = 8\pi(\mathcal{E} + P)v^2.$$

Будем считать  $m, v, \lambda', \nu'$  - величины первого порядка малости. Тогда в линейном приближении последнее уравнение легко интегрируется:  $\lambda + \nu = C_1(\eta)r^2 + C_2(\eta)$ . Непосредственной подстановкой можно убедиться, что  $C_1(\eta) = 0$ . производя допустимые преобразования координат, сохраняющие вид метрики (VI.371), положим

$$\lambda = \ln a^2 + \xi(r, \tau); \quad \nu = \ln a^2 - \xi(r, \eta), \quad (\text{VI.375})$$

где  $a = a(\eta)$ ;  $\xi \ll 1$ . Линеаризируя уравнения (VI.374) по малости  $\xi, m, v$ , получим систему

$$\frac{1}{a^2} \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = -8\pi P_0; \quad 3\frac{\dot{a}^2}{a^4} = 8\pi \mathcal{E}_0; \quad (\text{VI.376})$$

$$\ddot{\xi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \xi = -8\pi a^2 \frac{dP}{d\mathcal{E}} \delta\mathcal{E}; \quad (\text{VI.377})$$

$$-\frac{1}{a^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \xi') + 3\frac{\dot{a}}{a^4} \frac{\partial}{\partial \eta}(a\xi) = 8\pi \frac{m}{a^3} \delta(\vec{r}) + 8\pi \delta\mathcal{E}; \quad (\text{VI.378})$$

$$v = \frac{1}{8\pi(\mathcal{E}_0 + P_0)} \frac{\partial}{\partial \eta}(a\xi'), \quad (\text{VI.379})$$

где  $P_0 = P_0(\eta)$ ;  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\eta)$ , и мы положили  $\delta P = \frac{dP}{d\mathcal{E}} \delta\mathcal{E}$ .

### VI.16. Кинетическое уравнение для безмассовых частиц

Уравнения (VI.376) описывают эволюцию пространственно - плоской Вселенной Фридмана; уравнение (VI.379) является определением радиальной скорости жидкости. Для решения сингулярных уравнений (VI.377), (VI.378) положим

$$\xi = \frac{2}{ra}(m - \Psi), \quad (\text{VI.380})$$

причем  $m = m(\eta)$  и

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Psi(r, \eta)}{r} < \infty. \quad (\text{VI.381})$$

Подставляя (VI.380) в (VI.378) и учитывая (VI.381), найдем

$$4\pi a^3 \delta \mathcal{E} = \frac{1}{r} \Psi'' + \frac{3\dot{a}}{ra} \frac{\partial}{\partial \eta} (m - \Psi). \quad (\text{VI.382})$$

Используя (VI.382) в правой части (VI.377), получим уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{m} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{m} \left( 1 + 3 \frac{dP}{d\mathcal{E}} \right) + m \left( \frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \\ - \left[ \ddot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Psi} \left( 1 + 3 \frac{dP}{d\mathcal{E}} \right) + \Psi \left( \frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \Psi'' \frac{dP}{d\mathcal{E}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.383})$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим:

$$\ddot{m} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{m} \left( 1 + 3 \frac{dP}{d\mathcal{E}} \right) + m \left( \frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = \Theta(\eta); \quad (\text{VI.384})$$

$$\ddot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Psi} \left( 1 + 3 \frac{dP}{d\mathcal{E}} \right) + \Psi \left( \frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \Psi'' \frac{dP}{d\mathcal{E}} = \Theta(\eta), \quad (\text{VI.385})$$

где  $\Theta(\eta)$  - произвольная функция. Пусть общим решением однородного уравнения (VI.384) является  $m = m_0(\eta)$ , а частным решением неоднородного -  $m_1(\eta)$ ;  $m = m_0(\eta) + m_1(\eta)$ . Пусть далее  $\Psi_0(r, \eta)$  - общее решение однородного уравнения (VI.385). Тогда общим решением (VI.385) будет  $\Psi = \Psi_0(r, \eta) + m_1(\eta)$ . Таким образом,  $m - \Psi = m_0(\eta) - \Psi_0(r, \eta)$ , следовательно решение задачи определяется решениями однородных уравнений, соответствующих (VI.384), (VI.385). На нерелятивистской стадии расширения  $P_0 = 0$  и согласно (VI.376)  $a \sim \eta^2$ . Тогда (VI.384), (VI.385) легко интегрируются:

$$m = \sigma \left( \frac{\eta_0}{\eta} \right)^3 + \mu \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)^2; \quad \Psi = W(r) \left( \frac{\eta_0}{\eta} \right)^3 + V(r) \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)^2, \quad (\text{VI.386})$$

где  $\sigma, \mu$  - произвольные константы,  $W(r), V(r)$  - произвольные функции. Для определения этих функций необходимо рассмотреть эволюцию метрики на ультрарелятивистской стадии расширения, тогда уравнения (VI.384), (VI.385) принимают вид:

$$\ddot{m} + \frac{2}{\eta} \dot{m} - \frac{2}{\eta^2} m = 0; \quad \ddot{\Psi} + \frac{2}{\eta} \dot{\Psi} - \frac{2}{\eta^2} \Psi - \frac{1}{3} \Psi'' = 0. \quad (\text{VI.387})$$

Первое из этих уравнений легко интегрируется

$$m = \sigma' \left( \frac{\eta_0}{\eta} \right)^2 + \mu' \frac{\eta}{\eta_0}; \quad (\text{VI.388})$$

Для решения второго уравнения сделаем замену  $\eta = \sqrt{3}\tau$  и

$$\Psi = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{\tau} \Phi(r, \tau) \right]. \quad (\text{VI.389})$$

После подстановки (VI.389) и изменения порядка интегрирования, приведем (VI.387) к виду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{\tau} (\Phi_{\tau\tau} - \Phi_{rr}) \right] = 0, \quad (\text{VI.390})$$

откуда с точностью до аддитивного слагаемого, не изменяющего величину  $\Psi(r, \eta)$ , найдем

$$\Phi = \Phi_+(r + \tau) + \Phi_-(r - \tau), \quad (\text{VI.391})$$

где  $\Phi_+$ ,  $\Phi_-$  - произвольные функции. Частным решением (VI.391) является  $\Phi = 0$ . Тогда согласно (VI.380) получим ньютоновский потенциал, создаваемый точечной частицей переменной массы  $m(\eta)$ . Однако, такое решение не соответствует образованию этой частицы за счет перераспределения фридмановской метрики, так как противоречит принципу причинности. Поэтому граничные условия должны быть сформулированы таким образом, чтобы по крайней мере за световым горизонтом потенциал  $\xi(r, \eta)$  исчезал вместе со своими производными. Фактически, однако, таким горизонтом является не световой, а звуковой горизонт, соответствующий характеристикам уравнения (VI.387) и следующий из известных решений Лифшица [47] для продольных возмущений гравитационного поля. Для того, чтобы при  $\eta \rightarrow 0$  масса частицы оставалась ограниченной, в решении (VI.388) необходимо положить  $\sigma' = 0$ . Граничные условия, удовлетворяющие принципу причинности на звуковом горизонте, имеют вид

$$\xi(r, \tau)|_{r=\tau} = 0; \quad \xi'(r, \tau)|_{r=\tau} = 0.$$

Используя эти условия в решении (VI.391), а также требуя, чтобы вследствие (VI.381)  $\Phi(r, \tau)|_{r \rightarrow 0} \rightarrow 0$ , получим окончательно

$$\Psi(r, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu' \frac{r}{\tau_0} \left( 3 - \frac{r^2}{\tau^2} \right), & r \leq \tau; \\ -\mu' \frac{\tau}{\tau_0}, & r > \tau. \end{cases} \quad (\text{VI.392})$$

Сшивая это решение с нерелятивистским (VI.386) в момент смены уравнения состояния  $\eta = \eta_0$ , получим на нерелятивистской фазе расширения:

$$\xi(r, \eta) = \frac{2\mu}{r} \left[ 1 - \frac{r}{2\tau_0} \left( 3 - \frac{r^2}{\tau_0^2} \right) \right] U_+(\tau_0 - r). \quad (\text{VI.393})$$

## VI.16. Кинетическое уравнение для безмассовых частиц

Найденный потенциал не зависит от времени, поэтому синхронный в метрике Фрийдмана наблюдатель, находящийся на расстоянии большем звукового горизонта до частицы, никогда не испытает ее локального гравитационного воздействия. Таким образом в мире Фрийдмана радиус действия локальных гравитационных полей ограничен звуковым горизонтом частицы. Указанное частицеподобное решение для ультрарелятивистского уравнения состояния жидкости, удовлетворяющее принципу причинности, получено автором в [242], затем в более строгой постановке задачи исследовано и получено в [243, 244]. В работе [245] было показано, что решение (VI.392) является автомодельным и получен класс автомодельных решений для баротропного уравнения состояния с произвольным показателем баротропии. В частности, в последней работе показано, что при показателе баротропии,  $\kappa \geq 1/3$  решение описывает ударную сферическую волну.

Пусть теперь в мире Фрийдмана имеется не одна, а несколько массивных тождественных частиц с координатами  $\vec{r}_a = \{x_a, y_a, z_a\}$ . Тогда в линейном по  $m$  приближении суммарную метрику пространства - времени можно записать в виде

$$dS^2 = (g_{ik} + h_{ik})dx^i dx^k, \quad (\text{VI.394})$$

где  $g_{ik}$  - метрика Фрийдмана.

$$h_{ik} = -a^2 \delta_{ik} \sum_a \xi_a (|\vec{r} - \vec{r}_a|). \quad (\text{VI.395})$$

Введем поле макроскопических в метрике (VI.394) наблюдателей, координатная сетка которых натянута на массивные частицы. Такие наблюдатели являются геодезическими относительно метрике Фрийдмана. Пусть координаты массивных частиц принимают случайные равновероятные значения на всем множестве  $\{x, y, z\}$ , причем корреляция между положениями частиц отсутствует. Пусть  $N = \text{Const}$  - среднее число массивных частиц, приходящихся на конформный объем  $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ , где  $r_0 = \sqrt{3}\eta_0$ . В соответствии с правилом (VII.114)

$$\langle\langle \varphi(x) \rangle\rangle = \prod_a V_a^{-1} \int d^3 r_a \varphi(x|x_1, x_2, \dots), \quad (\text{VI.396})$$

— тогда среднее от локальных флуктуаций фридмановской метрики (VI.395) согласно (VI.393) есть

$$\frac{1}{h_{ik}}(r, \eta) = -a^2 \delta_{ik} \frac{3\mu N}{5r_0} = a^2 \text{Const}. \quad (\text{VI.397})$$

Производя перенормировку метрики в соответствии с правилами (VI.362) - (VI.363), получим для перенормированного поля

$$\xi_a \rightarrow \left(\xi_a - \frac{3\mu}{5r_0}\right);$$

перенормировка же макроскопической метрики сводится к умножению  $g_{44}$  и  $g_{\alpha\beta}$  на постоянные числа, которые масштабным преобразованием координат можно превратить в

Глава VI. Кинетическая модель неравновесной Вселенной

единицы, восстановив тем самым прежнее значение макроскопической метрики. Используя переопределенное значение функции  $\xi(r)$  можно убедиться в том, что изменение полной массы внутри радиуса  $r_0$ , вызванное локализацией массивной частицы, равно нулю. вычисляя согласно (VI.396)  $\langle\langle \xi^2(F) \rangle\rangle$ , получим

$$\langle\langle \xi^2(F) \rangle\rangle = \frac{108}{175} N \left( \frac{2\mu}{r_0} \right)^2. \quad (\text{VI.398})$$

Для того, чтобы были малы локальные и средние возмущения метрики, необходимо выполнение двух условий:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_a| &\gg 2\mu; \\ N \left( \frac{2\mu}{r_0} \right)^2 &\ll 1. \end{aligned} \quad (\text{VI.399})$$

Используя свойства изотропии и однородности пространства - времени  $\bar{V}_4$ , можно показать справедливость равенств

$$\begin{aligned} \langle\langle h_{ik} h_{lm} \rangle\rangle &= \delta_{ik} \delta_{lm} a^4 \langle\langle \xi^2 \rangle\rangle; \\ \langle\langle \partial_j h_{ik} h_{lm} \rangle\rangle &= 0; \quad \langle\langle \partial_4 h_{ik} \partial_j h_{lm} \rangle\rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.400})$$

Средние же вида  $\langle\langle \partial_\alpha h_{ik} \partial_j h_{lm} \rangle\rangle$  расходятся как  $1/r$ ; расходимость этих величин связана с известной расходимостью собственной энергии. Производя стандартную процедуру перенормировки массы, получим для этих величин

$$\langle\langle \delta_\alpha \xi \partial_\beta \xi \rangle\rangle = \delta_{\alpha\beta} \frac{6\pi N}{r_0^2} \left( \frac{2\mu}{r_0} \right)^2. \quad (\text{VI.401})$$

Вычисляя средние от поправок к тензору Эйнштейна, вызванные флуктуациями метрики, найдем поправки к ТЭИ фридмановской пыли, обусловленные энергией локальных гравитационных полей

$$\delta T_{ij}^G = -\frac{1}{8\pi} \langle\langle \delta G_{ij}^{(2)} \rangle\rangle = \frac{9N}{4r_0^2} \left( \frac{2\mu}{r_0} \right)^2 \frac{g_{ij}}{a^2}. \quad (\text{VI.402})$$

Таким образом, учет локальных флуктуаций гравитационного поля в уравнениях Эйнштейна эквивалентен добавлению к фридмановской пыли жидкости с предельно жестким уравнением состояния с отрицательным давлением, или, что эквивалентно, — добавлению в макроскопические уравнения Эйнштейна  $\lambda$  - члена

$$\lambda = -\frac{18\pi N}{r_0^2 a^2} \left( \frac{2\mu}{r_0} \right)^2.$$

VI.16. Кинетическое уравнение для безмассовых частиц

Пусть теперь  $f(x, \mathbb{P}|x_1, x_2, \dots) \equiv \tilde{f}(x, \mathbb{P})$  - микроскопическая функция распределения безмассовых частиц. Подсчитывая полное число этих частиц в синхронной по отношению к макроскопической метрике системе отсчета и усредняя затем его по координатам массивных частиц, получим обычную формулу для полного числа частиц, определяемого функцией распределения

$$f(x, \mathbb{P}) = \langle\langle \tilde{f}(x, \mathbb{P}) \rangle\rangle, \quad (\text{VI.403})$$

если вместо микроскопических импульсов  $\tilde{\mathbb{P}}_i$  мы введем макроскопические  $\mathbb{P}_i$  по рецепту

$$\mathbb{P}_\alpha = \tilde{\mathbb{P}}_\alpha; \quad \mathbb{P}_4 = \tilde{\mathbb{P}}_4 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}. \quad (\text{VI.404})$$

Отметим, что при преобразовании (VI.404) микроскопическая функция Гамильтона преобразуется по рецепту

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, \tilde{\mathbb{P}}) = \frac{1}{1+\xi} \mathcal{H}(x, \mathbb{P}),$$

где  $\mathcal{H}(x, \mathbb{P})$  определена по отношению к метрике Фридмана. Полагая далее

$$\tilde{f}(x, \mathbb{P}) = f(x, \mathbb{P}) + \sum_a g_a(x, \mathbb{P}|x_a), \quad (\text{VI.405})$$

причем

$$\langle\langle g_a(x, \mathbb{P}) \rangle\rangle = 0 \quad (\text{VI.406})$$

и усредняя микроскопическое бесстолкновительное кинетическое уравнение для безмассовых частиц, получим

$$\mathbb{P}^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \left[ 1 + \frac{1}{2} \langle\langle \xi^2 \rangle\rangle \right] \mathbb{P}^4 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \mathbb{P}^4 \langle\langle \xi \frac{\partial g}{\partial \eta} \rangle\rangle - \mathbb{P}_4 \mathbb{P}^4 \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_\alpha} \langle\langle \partial_\alpha \xi g \rangle\rangle = 0; \quad (\text{VI.407})$$

$$\mathbb{P}^i \frac{\partial g_a}{\partial x^i} = -\xi_a \mathbb{P}^4 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \mathbb{P}_4 \mathbb{P}^4 \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_\alpha} \partial_\alpha \xi_a. \quad (\text{VI.408})$$

Интегрируя (VI.408) вдоль траектории с учетом (VI.393), вычисляя затем необходимые средние и подставляя их в (VI.407), после весьма громоздких вычислений получим искомого кинетическое уравнение для макроскопической функции распределения [241]:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^4 \left[ 1 + \frac{5}{2} \langle\langle \xi^2 \rangle\rangle \right] \frac{\partial f}{\partial \eta} + \mathbb{P}^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \\ & = \frac{3N}{2r_0} \left( \frac{2\mu}{r_0} \right)^2 \Lambda \mathbb{P}_4 \mathbb{P}^4 \frac{\partial}{\partial \mathbb{P}_\alpha} \left[ \mathbb{P}_4 \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{\mathbb{P}_\alpha \mathbb{P}_\beta}{\mathbb{P}_4^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_\beta} \right], \end{aligned} \quad (\text{VI.409})$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{3} + \ln \frac{r_0}{4\mu}. \quad (\text{VI.410})$$

При получении (VI.409) появлялась логарифмическая в пределе  $|\bar{r} - \bar{r}_a| \rightarrow 0$  расходимость, которая обрезалась условием малости локальных флуктуаций гравитационного поля (VI.399) на гравитационном радиусе частицы  $r = 2\mu$ .

Нетрудно проверить, что вследствие (VI.409) сохраняется полное число безмассовых частиц. В левой части кинетического уравнения член  $\frac{5}{2} \langle \langle \xi^2 \rangle \rangle \mathbb{P}^4 \frac{\partial f}{\partial \eta}$  перенормирует макроскопическую скорость безмассовых частиц

$$v = c / \left( 1 + \frac{5}{2} \langle \langle \xi^2 \rangle \rangle \right) < c. \quad (\text{VI.411})$$

Нетрудно, однако, видеть, что этот член мал по сравнению с правой частью кинетического уравнения вследствие малости звукового горизонта частицы по сравнению с ее звуковым горизонтом. Отбрасывая этот малый член и ковариантно обобщая уравнение (VI.409), получим:

$$[\mathcal{H}, f] = - \frac{\partial J_i}{\partial \mathbb{P}_i}, \quad (\text{VI.412})$$

где

$$J_i = 8\pi \Lambda \rho_m m W_{ik} \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}_k}, \quad (\text{VI.413})$$

$\rho_m$  - плотность массы точечных частиц,

$$W_{ik} = (u, \mathbb{P}) [\mathbb{P}_i \mathbb{P}_k + g_{ik}(u, \mathbb{P})^2 - (u, \mathbb{P})(u_i \mathbb{P}_k + u_k \mathbb{P}_i)]; \quad (\text{VI.414})$$

$u^i$  - вектор средней скорости массивных точечных частиц. Нетрудно видеть, что тензорная структура  $W_{ik}$  совпадает со структурой ядра интеграла Беляева - Будкера, если в последнем одну из частиц положить ультрарелятивистской, а вторую - нерелятивистской.

## VI.17 Изотропизация однородного распределения безмассовых частиц гравитационными взаимодействиями

Точным решением кинетического уравнения (VI.409) является произвольное изотропное распределение  $f(\mathbb{P})$ . Если же первоначальное распределение анизотропно, то оно будет изотропизоваться гравитационными взаимодействиями. Пусть в момент  $\eta = \eta_0$  распределение безмассовых частиц в синхронной системе отсчета имеет вид

$$f(\eta_0, \mathbb{P}_\alpha) = \sum f_{lm}(\eta_0, p) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (\text{VI.415})$$

### VI.17. Изотропизация фотонов гравитационными взаимодействиями

где  $\theta$ ,  $\varphi$  азимутальный и полярный углы в импульсном пространстве,  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  - шаровые функции. Представляя распределение  $f(\eta, \mathbb{P}_\alpha)$  в виде аналогичном (VI.415) и разделяя переменные, получим уравнения для функций  $f_{lm}(\eta, p)$ :

$$\frac{\partial f_{lm}}{\partial \eta} = 8\pi l(l+1)m\Lambda a\rho_m \cdot f_{lm}, \quad (\text{VI.416})$$

решая которые с начальными условиями (VI.415), найдем [241]:

$$f_{lm}(\eta, p) = f_{lm}(\eta_0, p) e^{-l(l+1)24\pi\Lambda m\rho_m t[1 - (t_0/t)^{1/3}]}, \quad (\text{VI.417})$$

где  $m = m(t)$ ,  $\rho_m = \rho_m(t)$ . При  $t \rightarrow \infty$  выражение под знаком экспоненты растет пропорционально  $t$ . Поэтому при  $t \rightarrow \infty$  в выражении (VI.417) остается лишь одна гармоника с  $l = 0$ , т.е. распределение изотропизуется. В действительности это, однако, не совсем так. Полученное кинетическое уравнение пригодно лишь до тех пор, пока масса массивных частиц будет гораздо меньше массы всей области под звуковым горизонтом, что приводит к условию

$$N\mu \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \ll \frac{2t_0}{\sqrt{3}}. \quad (\text{VI.418})$$

На современном этапе эволюции Вселенной условие (VI.418) принимает вид  $m \ll 10^{18} M_\odot / N$ . При этом степень изотропизации первоначального распределения еще мала. Однако гармоники распределения с высоким орбитальным числом  $l$  могут затухнуть к настоящему времени. Гармонике с номером  $l$  соответствует угловой масштаб  $\Delta\varphi = 2\pi(l+1)$ . Поэтому при заданных современных значениях массы частиц  $m(t)$  и их средней плотности  $\rho_m(t)$  исчезают все гармоники с угловым размером

$$\Delta\varphi < 2\pi\sqrt{24\pi\Lambda m\rho_m t}. \quad (\text{VI.419})$$

При  $m \sim 10^{16} M_\odot$ ,  $\rho_m \sim 10^{-30}$  г/см<sup>3</sup> и  $t = 2 \times 10^{10}$  лет получим из (VI.419)  $\Delta\varphi < 10$  угловых минут. Таким образом, любое реликтовое излучение должно быть в высокой степени однородно на масштабах, меньших 10 угловых минут.

## Глава VII

# Установление термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной

### VII.1 Условия локального термодинамического равновесия космологической плазмы

Одним из главных положений стандартного космологического сценария (SCS)<sup>1</sup> является предположение о локальном термодинамическом равновесии (LTE) космологической плазмы на раннем этапе расширения Вселенной. Как известно, для установления LTE в статистической системе необходима малость эффективного времени между столкновениями частиц,  $\tau_{eff}$ , по сравнению с характерным временным масштабом эволюции системы. В космологической ситуации таким масштабом является возраст Вселенной, а более точно, – обратная величина логарифмической производной масштабного фактора,  $a(t)$ . Это приводит к следующему известному условию LTE в расширяющейся ультрарелятивистской космологической плазме<sup>2</sup>:

$$\frac{\dot{a}}{a} \tau_{eff} \ll 1, \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{n(t) \sigma_{tot}} \ll 1, \quad (\text{VII.1})$$

где  $a(t)$  – масштабный фактор,  $\dot{a} \equiv da/dt$ ,  $n(t)$  – плотность числа частиц,  $\sigma_{tot}$  – полное сечение рассеяния частиц в парных столкновениях. Здесь мы разовьем более общую теорию восстановления термодинамического равновесия во Вселенной, не ограничиваясь случаем суммарного ультрарелятивистского уравнения состояния. Поэтому еще раз выпишем основные необходимые нам формулы, чтобы не затруднять Читателя поиском их по книге.

#### VII.1.1 Кинематика четырехчастичных столкновений

Четырехчастичные реакции типа

$$a + b \rightleftharpoons c + d. \quad (\text{VII.2})$$

---

<sup>1</sup>см., например, [248] (2008)

<sup>2</sup>Мы выбираем планковскую систему единиц  $G = \hbar = c = 1$ .

### VII.1. Условия локального термодинамического равновесия космологической плазмы

полностью описываются двумя кинематическими инвариантами,  $s$  и  $t$  (см, например, [249] (1979)):

$$s = (p_a + p_b)^2 \equiv (p_a + p_b, p_a + p_b), \quad (\text{VII.3})$$

квадратом энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс, и

$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_b - p_d)^2. \quad (\text{VII.4})$$

релятивистским квадратом переданного импульса:<sup>3</sup>. Далее  $(p, q) \equiv g_{ik}p^i q^k$  – скалярное произведение векторов  $p, q$  относительно метрики  $g$ ,  $a, b$  – индексы частиц,  $i, k = \overline{1, 4}$ ;  $\sqrt{s}$  – энергия сталкивающихся частиц в центре масс (СЦМ).

При этом инвариантные амплитуды рассеяния  $F(s, t)$ , определяемые как результат усреднения инвариантной амплитуды рассеяния по состояниям частиц,  $c$  и  $d$ , оказываются зависящими лишь от этих двух инвариантов:

$$|\overline{M_{FJ}}|^2 = |F(s, t)|^2, \quad (\text{VII.5})$$

где  $S_i$  – спины частиц. С помощью инвариантной амплитуды  $F(s, t)$  определяется полное сечение реакции (VII.2):

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt |F(s, t)|^2, \quad (\text{VII.6})$$

где  $m_i$  – массы покоя частиц,  $\lambda$  – функция треугольника:

$$\lambda^2(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc,$$

и

$$t_{min}^{max} = \frac{4}{s} [(m_c^2 - m_a^2 + m_b^2 - m_d^2)^2 - (\sqrt{\lambda} \mp \sqrt{\lambda'})^2],$$

где для сокращения приняты обозначения:

$$\lambda = \lambda(s, m_a^2, m_b^2); \quad \lambda' = \lambda(s, m_c^2, m_d^2).$$

В ультрарелятивистском пределе

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty \quad (\text{VII.7})$$

имеем:

$$s \rightarrow 2(p_a, p_b); \quad t \rightarrow -2(p_a, p_b); \quad \lambda \rightarrow s^2;$$

$$t_{min} \rightarrow -s; \quad t_{max} \rightarrow 0; \quad \frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty,$$

---

<sup>3</sup>Автор надеется, что читателя не смутит совпадение обозначений:  $t$  – время в метрике Фридмана,  $s$  – ее интервал, одновременно  $t, s$  – кинематические инварианты. Эти обозначения являются стандартными и мы не сочли необходимым их менять.

и формула (VII.6) значительно упрощается введением безразмерной переменной:

$$x = -\frac{t}{s} : \quad (\text{VII.8})$$

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (\text{VII.9})$$

Таким образом, полное сечение рассеяния зависит лишь от кинематического инварианта  $s$  - квадрата энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(s). \quad (\text{VII.10})$$

Именно эта зависимость и будет управлять установлением локального термодинамического равновесия в ранней Вселенной.

### VII.1.2 Влияние зависимости $\sigma(s)$ на процесс восстановления LTE

В пространственно-плоской метрике Фрийдмана<sup>4</sup>, которая будет рассматриваться в этом разделе,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{VII.11})$$

интегралом движения является *конформный импульс* (см., например, [250] (1982))

$$\tilde{p} = a(t)p = \text{const}, \quad (\text{VII.12})$$

где  $p = \sqrt{-g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta}$  - физический трехмерный импульс ( $\alpha, \beta = \overline{1,3}$ ),  $a$  - масштабный фактор. Таким образом, для ультрарелятивистских частиц

$$s \sim p^2 \sim a^{-2}. \quad (\text{VII.13})$$

Предполагая степенную зависимость полного сечения рассеяния частиц от  $s$

$$\sigma_{tot} \sim s^\nu \quad (\text{VII.14})$$

и *баротропическое* суммарное уравнение состояния материи  $p = \varkappa \varepsilon$ , где  $p$  - суммарное давление<sup>5</sup>,  $\varepsilon$  - суммарная плотность энергии,  $\varkappa$  - коэффициент баротропии, при условии сохранения полного числа частиц  $n(t)a^3(t) = \text{const}$  придем к следующему выводу [251] (1986).

При выполнении условия

$$4\nu + 3(1 - \varkappa) > 0; \quad (\varkappa \neq -1), \quad (\text{VII.15})$$

LTE поддерживается на ранних стадиях расширения, а на поздних нарушается, т.е., при:

$$\nu > -\frac{3}{4}(1 - \varkappa) \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (\text{VII.16})$$

<sup>4</sup>как, впрочем, и для любой другой метрики Фрийдмана

<sup>5</sup>в отличие от импульса,  $p$ , давление выделено прямым римским шрифтом,  $p$ .

## VII.2. Унифицированное асимптотическое сечение рассеяния

а при выполнении обратного к (VII.16) условия LTE нарушается на ранних стадиях и восстанавливается на поздних  $t > t_0$ .

В частности,

1<sup>0</sup>. в случае ультрарелятивистского уравнения состояния  $\varkappa = 1/3$  получим из (VII.16) условие существования LTE на ранних стадиях расширения [251] —

$$\nu > -\frac{1}{2} \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad p = \frac{1}{3}\varepsilon; \quad (\text{VII.17})$$

2<sup>0</sup>. в случае предельно жесткого уравнения состояния  $\varkappa = 1$  условие поддержания ЛТР на ранних стадиях и нарушения на поздних эквивалентно условию —

$$\nu > 0 \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (p = \varepsilon) \quad (\text{VII.18})$$

(отсюда следует, что при постоянном сечении рассеяния  $\nu = 0$  в случае предельно жесткого уравнения состояния время вообще выпадает из условия LTE [251], - на этой стадии расширения во Вселенной LTE существует либо во все времена, либо всегда отсутствует); 3<sup>0</sup>. в случае инфляции  $\varkappa = -1$  при выполнении условия

$$\nu > -\frac{3}{2} \quad (\text{VII.19})$$

LTE поддерживается на ранних стадиях ( $t < t_0$ ) и нарушается на поздних ( $t > t_0$ ). Последнее, разумеется, верно при сохранении полного числа частиц на инфляционной стадии расширения.

## VII.2 Унифицированное асимптотическое сечение рассеяния

### VII.2.1 Унитарность и унитарный предел

Для исследования кинетики процессов в ранней Вселенной необходимо знать асимптотическое поведение инвариантных амплитуд  $F(s, t)$  в пределе (VII.7). Современные экспериментальные возможности ограничены значениями  $\sqrt{s}$  порядка нескольких Тев. Было бы неосторожным опираться на ту или иную полевую модель взаимодействия для прогнозирования асимптотического поведения сечения рассеяния в области сверхвысоких энергий порядка  $10^{11} \div 10^{16}$  Тев. Более разумно в современных условиях опираться на выводы аксиоматической теории  $S$ -матрицы, полученные на основе фундаментальных законов унитарности, причинности, масштабной инвариантности и т.п. Унитарность  $S$ -матрицы приводит к известному асимптотическому соотношению (см., например, [252]):

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{s \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{s^2} \quad (\text{VII.20})$$

при значениях  $s$  выше унитарного предела, т.е., при условии (VII.7), если под  $m_i$  понимать массы всех промежуточных частиц. Но тогда из (VII.9) следует:

$$F(s, 1)|_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Const.} \quad (\text{VII.21})$$

Понятие *унитарного предела* впервые было введено L.D. Landau в 1940 г. применительно к векторным мезонам [253]. Следуя этой работе, под энергией унитарного предела в дальнейшем будем понимать такую критическую энергию, выше которой прекращается рост эффективного сечения взаимодействия и поведение сечения взаимодействия подчиняется условию унитарности. Например, для стандартного  $\nu e$ -рассеяния энергия унитарного предела  $E_u = \sqrt{s_u}$  составляет (см., например, [252])  $\sqrt{\sqrt{2}\pi/G} \approx 600 \text{ Gev}$ , где  $G$  - константа электрослабого взаимодействия.

## VII.2.2 Асимптотическое поведение сечений рассеяния частиц в области сверхвысоких энергий

На основе аксиоматической теории  $S$ -матрицы в 60-е годы XX-го столетия были получены строгие ограничения на асимптотическое поведение полных сечений и инвариантных амплитуд рассеяния:

$$\frac{C_1}{s^2 \ln s} < \sigma_{tot}(s) < C_2 \ln^2 s, \quad (\text{VII.22})$$

где  $C_1, C_2$  - неизвестные константы. Верхний предел (VII.22) был установлен в работах [254] (1961), [255] (1963), [256] (1966), нижний - в [257] (1964), [258] (1965)б см. также обзор в книге [259] (1967). Отметим также ограничения на инвариантные амплитуды рассеяния [259]:

$$|F(s, t)| \leq |F(s, 0)|; \quad (\text{VII.23})$$

$$C'_1 < |F(s, 0)| < C'_2 s \ln^2 s. \quad (\text{VII.24})$$

Поэтому инвариантные амплитуды рассеяния в пределе (VII.7) должны быть функциями лишь переменной  $x = -t/s$ , т.е.:

$$|F(s, t)| = |F(x)|, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (\text{VII.25})$$

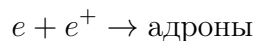
Но тогда вследствие (VII.9)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(x)|^2 = \frac{\text{Const}}{s} \quad (\text{VII.26})$$

— полное сечение ведет себя также, как и сечение электромагнитных взаимодействий, т.е., при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг.

Скейлинговая асимптотика сечения (VII.26) лежит строго посередине между возможными крайними асимптотиками полного сечения рассеяния (VII.22). Кроме того при выполнении (VII.26) автоматически выполняются и соотношения, полученные на основе аксиоматической теории  $S$ -матрицы (VII.20) и (VII.21).

Для лептон-адронного взаимодействия предположение о существовании скейлинга было выдвинуто в работах [260] (1969), [261] (1969), [262] (1970). В частности, для полного сечения реакции



### VII.3. Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

было получено выражение:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum e_i^2,$$

где  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры,  $e_i$  - заряды фундаментальных фермионных полей. Данные, полученные на Станфордском накопителе, подтвердили наличие скейлинга для этих взаимодействий. Для гравитационных взаимодействий скейлинг, по-видимому, также должен восстанавливаться при сверхвысоких энергиях вследствие масштабной инвариантности гравитационных взаимодействий в ВКБ-приближении [263] (1974). Можно привести большое количество аналогичных примеров, являющихся надежно установленными фактами.

## VII.3 Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

### VII.3.1 Упрощение релятивистского интеграла столкновений

Процесс установления термодинамического равновесия описывается релятивистскими кинетическими уравнениями. В работе [250] показано, что релятивистские кинетические уравнения конформно инвариантны в ультрарелятивистском пределе при наличии скейлинга взаимодействий. Этот факт является основой для утверждения о том, что, по крайней мере, в ультрарелятивистской Вселенной, LTE могло нарушаться. Итак, будем рассматривать однородные изотропные распределения частиц в метрике Фрийдмана (VII.11). Такие распределения описываются функциями:

$$f_a(x^i, p^k) = f_a(t, p). \quad (\text{VII.27})$$

Релятивистские кинетические уравнения относительно однородных изотропных распределений (VII.27) принимают вид (подробности см. в [266], [267], [268], [Ignat'ev, (1983)], [269]):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab}(t, p), \quad (\text{VII.28})$$

где  $J_{ab}(t, p)$  - интеграл четырехчастичных реакций [269], [268]:

$$\begin{aligned} J_{ab}(t, p) = & (2\pi)^4 \times \\ & \int d\pi_b d\pi_c d\pi_d \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_c - p_d) \\ & \times [(1 \pm f_a)(1 \pm f_b) |f_c f_d \overline{M_{cd \rightarrow ab}}|^2 - \\ & (1 \pm f_c)(1 \pm f_d) f_a f_b |\overline{M_{ab \rightarrow cd}}|^2], \end{aligned} \quad (\text{VII.29})$$

знаки  $\pm$  соответствуют бозонам (+) и фермионам (-),  $M_{i \rightarrow f}$  - инвариантные амплитуды рассеяния (черта означает усреднение по состояниям поляризации частиц),  $d\pi_a$  - нормированный элемент объема импульсного пространства  $a$ -той частицы:

$$d\pi_a = \sqrt{-g} \frac{\rho_a dp^1 dp^2 dp^3}{(2\pi)^3 p_4}, \quad (\text{VII.30})$$

$\rho_a$  - фактор вырождения.

Упростим интеграл четырехчастичных взаимодействий (VII.30), используя свойства изотропии распределений  $f_a(t, p)$ . Для выполнения двух внутренних интегрирований по импульсным переменным перейдем в локальную систему центра масс, в которой интегрирование проводится элементарно. После обратного преобразования Лоренца и перехода к сферической системе координат в импульсном пространстве в ультрарелятивистском пределе (VII.7) найдем ([251], [270]):

$$J_{ab}(p) = -\frac{2S_b + 1}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx |F(x, s)|^2 \times \int_0^{2\pi} d\varphi \{ f_a(p) f_b(q) [1 \pm f_c(p - \Delta)] [1 \pm f_d(q + \Delta)] - f_c(p - \Delta) f_d(q + \Delta) [1 \pm f_a(p)] [1 \pm f_b(q)] \}, \quad (\text{VII.31})$$

где  $x = -t/s$  безразмерная переменная (VII.8), и

$$\Delta = x(p - q) - \cos \varphi \sqrt{x(1-x)(4pq - s)}. \quad (\text{VII.32})$$

### VII.3.2 Релятивистские кинетические уравнения в терминах конформно соответствующего пространства

Учитывая тот факт, что переменная  $\tilde{p}$  (VII.12) является интегралом движения в метрике Фридмана и при этом для любой функции  $\Psi(t, p)$  имеет место соотношение:

$$\frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial p} = \frac{\partial \Psi(t, \tilde{p})}{\partial t}, \quad (\text{VII.33})$$

преобразуем кинетические уравнения для однородных изотропных распределений к виду:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} = \frac{a}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab}(\eta, p), \quad (\text{VII.34})$$

куда необходимо подставить  $p = \tilde{p}/a$ .

Заметим, что с другой стороны переход к переменной (VII.12),  $\tilde{p}$ , фактически является конформным преобразованием к однородному статическому пространству

$$ds^2 = a^2 ds_0^2 = a^2 (d\eta^2 - dl^2),$$

при котором физическая компонента импульса,  $p$ , преобразуется по закону:

$$p = \frac{\tilde{p}}{a}. \quad (\text{VII.35})$$

Таким образом, импульсная переменная (VII.12),  $\tilde{p}$ , есть абсолютная величина физического импульса в конформно соответствующем статическом пространстве постоянной кривизны<sup>6</sup>, а  $\eta$  - временная переменная в этом пространстве.

<sup>6</sup>В рассматриваемом случае – в пространстве Минковского

### VII.3. Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

Плотности числа частиц,  $n(\eta)$ , и плотности их энергии,  $\varepsilon(\eta)$ , относительно изотропного распределения частиц,  $f(\eta, p)$  определяются формулами):

$$\begin{aligned} n(\eta) &= \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 f(\eta, p) dp = \\ &= \frac{\rho}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}; \end{aligned} \quad (\text{VII.36})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\eta) &= \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{m^2 + p^2} p^2 f(\eta, p) dp = \\ &= \frac{\rho}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{p}^2 \sqrt{m^2 + \tilde{p}^2/a^2} f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}. \end{aligned} \quad (\text{VII.37})$$

В связи с этим удобно ввести конформные плотности числа частиц,  $\tilde{n}(\eta)$ , а для ультра-релятивистских частиц - и плотности их энергии,  $\tilde{\varepsilon}(\eta)$ :

$$\tilde{n}(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}; \quad (\text{VII.38})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\eta) &= \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{m^2 + p^2} p^2 f(\eta, p) dp \\ &\approx \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \tilde{p}^3 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}. \end{aligned} \quad (\text{VII.39})$$

Тогда имеют место два соотношения:

$$\tilde{n}(\eta) = n(\eta) a^3(\eta); \quad (\text{VII.40})$$

$$\tilde{\varepsilon}(\eta) \approx \varepsilon(\eta) a^4(\eta); \quad (p/m \rightarrow \infty), \quad (\text{VII.41})$$

из которых первое выполняется строго, а второе, - асимптотически, в ультрарелятивистском пределе.

#### VII.3.3 Интеграл столкновений для слабого отклонения распределений от равновесия

Исследуем сначала слабое нарушение термодинамического равновесия в горячей модели, когда основная часть частиц,  $n_e(t)$ , находится в состоянии теплового равновесия, и лишь для небольшой доли частиц,  $n_{ne}(t)$ , -

$$n_{ne}(t) \ll n_e(t) \quad (\text{VII.42})$$

тепловое равновесие нарушено (см. Рис.49). Причем в дальнейшем в этом разделе мы будем полагать, что функции распределения мало отличаются от равновесных в области

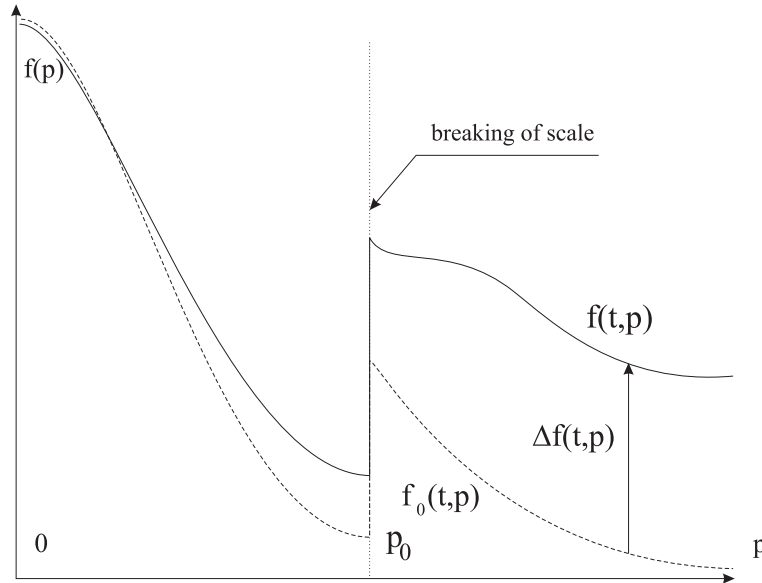
малых значений энергии, меньших некоторого унитарного предела,  $p = p_0$  (или  $T = T_0$ ), ниже которого отсутствует скейлинг, и может сильно нарушаться при энергиях, выше унитарного предела:

$$f_a(p) \approx \begin{cases} f_a^0 = [\exp(\frac{-\mu_a + E_a(p)}{T}) \pm 1]^{-1}, & p < p_0; \\ \Delta f_a(p); f_a^0(p) \ll \Delta f_a(p) \ll 1, & p > p_0, \end{cases} \quad (\text{VII.43})$$

где  $\mu_a(t)$  - химические потенциалы,  $T(t)$  - температура равновесной компоненты плазмы. Таким образом, в области  $p > p_0$  может наблюдаться аномально большое по сравнению с равновесным число частиц, но при этом малое (см. (VII.42)) по сравнению с полным числом равновесных частиц.

Исследуем процесс релаксации распределения  $f_a(p)$  к равновесному  $f_a^0(p)$ . Задача в такой постановке для частного случая первоначального распределения  $f(t=0, p)$  решалась ранее в [?], [251], [270]. Здесь мы дадим общее решение этой задачи. При этом, как будет видно из дальнейшего, космологическую плазму формально можно рассматривать как двухкомпонентную систему - равновесную с распределением  $f_a^0(t, p)$ , и неравновесную, *сверхтепловую*, с распределением  $\delta f_a(t, p) = \Psi(t, p)$ , причем число частиц в неравновесной компоненте мало, но плотность ее энергии, вообще говоря, произвольна. Исследуем интеграл столкновений (VII.31) в области

$$p \geq p_0 \gg T. \quad (\text{VII.44})$$



**Рис. 41.** Схематическое изображение отклонения функции распределения от равновесия.

Вследствие неравенства (VII.43) в этой области можно пренебречь столкновениями сверхтепловых частиц между собой, ограничиваясь учетом рассеяния сверхтепловых частиц на равновесных. Поэтому в интеграле столкновений значение одного из импульсов,  $p' = p - \Delta$ , либо  $q' = q + \Delta$  должно лежать в тепловой области, второго - в сверхтепловой, за унитарным пределом. Вне этой области подинтегральное значение интеграла столкновений чрезвычайно мало. Вследствие этого обстоятельством вторым членом в фигурных

### VII.3. Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

скобках (VII.31) можно пренебречь, так как он может конкурировать с первым лишь в асимптотически малых областях изменения переменных  $x$  и  $\varphi$ :  $x(1-x) \lesssim T/p \rightarrow 0$ . Статистические факторы вида  $[1 \pm f_a(p')]$  в первом члене интеграла (VII.31) могут заметно отличаться от единицы опять-таки лишь в области тепловых значений импульсов. В результате в исследуемой нами области значений импульсов интеграл столкновений (VII.31) можно записать в виде [270]:

$$J_{ab \leftrightarrow cd}(p)|_{p \geq p_0} = \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \times \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx |F(x, s)|^2. \quad (\text{VII.45})$$

Используя здесь определение полного сечения рассеяния (VII.31), получим из (VII.45):

$$J_{ab \leftrightarrow cd}(p)|_{p \geq p_0} = \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \times \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \sigma_{tot} s(s) ds. \quad (\text{VII.46})$$

Подставляя, наконец, во внутренний интеграл выражение для  $\sigma_{tot}$  в форме ACS, (VI.95), проводя интегрирование с логарифмической точностью и суммируя полученное выражение по всем каналам реакций, найдем окончательно:

$$J_a(p)|_{p \geq p_0} = -\Delta f_a(p) \sum_b \frac{4(2S_b + 1)\nu_{ab}}{\pi} \times \int_0^\infty \frac{q^2 f_b^0(q)}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \frac{dq}{L(\bar{s})}, \quad (\text{VII.47})$$

где

$$\bar{s} = \frac{1}{2} p q^4,$$

$\nu_{ab}$  - число каналов реакций, в которых может участвовать частица сорта  $a$ .

Вычислим значения интеграла (VII.47) в предельных случаях.

#### VII.3.4 Выражения для равновесных плотностей

Выпишем выражения для макроскопических плотностей относительно равновесных распределений  $f_a^0(p)$  (VII.36), (VII.37),  $\bar{n}$ , и энергии,  $\bar{\varepsilon}$ . В случае газа безмассовых частиц ( $\mu = 0$ ) получим (см., например, [271]):

$$\bar{n} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3); \quad (\text{VII.48})$$

Глава VII. Установление термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной

$$\varepsilon_a^0 = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho \pi^2 T^4}{30} g_a, \quad (\text{VII.49})$$

где  $\rho$  - число независимых поляризаций (спина) частицы ( $\rho = 2$  - для фотонов и безмассовых нейтрино),  $g_a$  - статистический фактор:

$$\begin{aligned} g_n &= g_e = 1 && \text{for Bose particles;} \\ g_n &= 3/4, \quad g_e = 7/8 && \text{for Fermi particles.} \end{aligned} \quad (\text{VII.50})$$

знак “+” соответствует фермионам, “-” - бозонам,  $\zeta(x)$  -  $\zeta$  есть функция Римана.

Суммарная плотность энергии безмассовых частиц равна:

$$\varepsilon = \sum_a \varepsilon_a^0 = N \frac{\pi^2 T^4}{15}, \quad (\text{VII.51})$$

где

$$N = \frac{1}{2} \left[ \sum_B (2S + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S + 1) \right] \quad (\text{VII.52})$$

- эффективное число типов частиц ( $S$  - спин частицы)<sup>7</sup>; суммирование идет по бозонам (B) и фермионам (F), соответственно. Введем числа типов бозонов и фермионов,  $N_B$  и  $N_F$ :

$$N_B = \frac{1}{2} \sum_B (2S + 1); \quad N_F = \frac{1}{2} \sum_F (2S + 1). \quad (\text{VII.53})$$

Тогда:

$$N = N_B + \frac{7}{8} N_F. \quad (\text{VII.54})$$

Для газа нерелятивистских частиц:

$$\varepsilon_a^0 \approx \delta \dot{n}_\gamma^0 = \delta \frac{2T^3}{\pi^2} \zeta(3), \quad \varepsilon_a \approx m_a n_a, \quad (\text{VII.55})$$

где  $\dot{n}_\gamma^0$  - плотность числа реликтовых фотонов,

$$\delta \sim 10^{-10}. \quad (\text{VII.56})$$

Следует отметить, что возможная относительная средняя концентрация частиц небарионной природы темной материи,  $\delta_{nb}$ , при ее плотности порядка 25% от критической плотности,  $\rho_c \approx 0.9 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ , и ожидаемой минимальной массе частиц порядка 50 Gev еще меньше  $1/\delta$  и составляет порядка  $0.5 \cdot 10^{-11}$ .

<sup>7</sup>В полевых моделях взаимодействий типа SU(5)  $\mathcal{N} \sim 100 \div 200$ .

## VII.4. Построение и решение уравнения энергодбаланса

### VII.3.5 Рассеяние на нерелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта  $b$  нерелятивистские, т.е.,  $q \ll m_b$ , то интеграл (VII.47) сводится к выражению:

$$J_a(p)|_{p \geq p_0} = -32\pi^2 \Delta f_a(p) \times \sum_b \frac{n_b^0(t)}{m_b} \frac{\nu_{ab}}{1 + \ln^2 pm_b/2}, \quad (m_b > T). \quad (\text{VII.57})$$

### VII.3.6 Рассеяние на ультрарелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта  $b$  являются ультрарелятивистскими, т.е.,  $m_b \ll T$ , причем их химический потенциал мал, -  $\mu_b \ll T$ , то вычисляя интеграл (VII.47) относительно равновесного распределения (VII.43), найдем:

$$J_a(p)|_{p \geq p_0} = -\frac{4\pi}{3} \frac{\tilde{N}T^2(t)}{1 + \ln^2 Tp/2} \Delta f_a(p), \quad (\text{VII.58}) \\ (m_b \ll T, \mu_b \ll T),$$

где

$$\tilde{N} = \frac{1}{2} \left[ \sum_B (2S + 1) + \frac{1}{2} \sum_F (2S + 1) \right] = N_B + \frac{1}{2} N_F;$$

$N_B$  - число сортов равновесных бозонов,  $F$  - фермионов.

Вычисляя отношение вкладов в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских равновесных частиц, получим:

$$\frac{J_{non}}{J_{ultra}} \sim \frac{24\pi n_b^0}{m_b T^2} = \zeta(3) \delta \frac{64T(t)}{\pi m_b} \sim 10^{-9} \frac{T}{m_b}, \quad (\text{VII.59})$$

- отношение вкладов мало при  $T \ll 10^9 m_b$  и уменьшается со временем. Поэтому в дальнейшем вкладом нерелятивистских частиц в интеграл столкновений будем пренебрегать.

## VII.4. Построение и решение уравнения энергодбаланса

Построим строгую самосогласованную математическую модель восстановления теплового равновесия в расширяющейся Вселенной в условиях слабого нарушения равновесия в смысле малости числа неравновесных частиц по сравнению с числом равновесных частиц (VII.42). Заметим, что при этом энергия, заключенная в неравновесном высокоэнергетическом “хвосте” распределения,

$\Delta f_a(t, p)$ , может быть большой и даже значительно превышать энергию равновесной компоненты космологической плазмы. Выпишем сначала основные соотношения, определяющие динамику космологической плазмы.

### VII.4.1 Модель материи

Как известно (см., например, [272]), уравнения Эйнштейна в случае изотропной однородной космологической модели с нулевой трехмерной кривизной сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \quad (\text{VII.60})$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p(\varepsilon)) = 0. \quad (\text{VII.61})$$

Далее:

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_s; \quad p = p_p + p_s, \quad (\text{VII.62})$$

где  $\varepsilon_p, p_p$  – плотность энергии и давление космологической плазмы,  $\varepsilon_s, p_s$  – плотность энергии и давление всевозможных фундаментальных полей, возможно, скалярных, приводящих к ускорению Вселенной.

*Инвариантное ускорение Вселенной*

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (\text{VII.63})$$

связано с *эффективным коэффициентом баротропии* материи,  $\varkappa \equiv p/\varepsilon$ , соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\varkappa). \quad (\text{VII.64})$$

Таким образом, на стадии ускорения ( $t > t_1$ ):

$$0 < \Omega < 1, \Rightarrow -1 < \varkappa < -\frac{1}{3}. \quad (\text{VII.65})$$

До этого момента  $\varkappa \in [1/3, -1/3]$ . Согласно (VII.60) – (VII.61) масштабный фактор и суммарная плотность энергии *при заданном постоянном коэффициенте баротропии* меняются по закону:

$$a = a_1 t^{2/3(\varkappa+1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{6\pi(\varkappa+1)^2 t^2}, \quad \varkappa + 1 \neq 0 \quad (\text{VII.66})$$

Используя связь (VII.64), перепишем соотношения (VII.66) в более удобном для нас виде:

$$a = a_1 t^{1/(1-\Omega)}; \quad \varepsilon = \frac{3}{8\pi(1-\Omega)^2 t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (\text{VII.67})$$

Заметим, что при любых значениях инвариантного ускорения  $\Omega = \text{Const} \in [-1, 1)$  плотность энергии пропорциональна  $t^{-2}$ .

## VII.4. Построение и решение уравнения энергодбаланса

### VII.4.2 Основные предположения модели

Примем следующие предположения в нашей модели:

1°. Скейлинговый характер взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий и унификация всех межчастичных взаимодействий на основе фундаментальных постоянных  $G, \hbar, c$  при энергиях выше унитарного предела, что приводит к формуле универсального асимптотического сечения рассеяния (VI.95);

2°. Минимальность связи фундаментальных макроскопических полей с космологической плазмой. Это автоматически означает, что закон сохранения энергии (VII.67) выполняется по отдельности для фундаментальных полей и плазмы:

$$\dot{\varepsilon}_s + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_s + p_s(\varepsilon_s)) = 0, \quad (\text{VII.68})$$

$$\dot{\varepsilon}_p + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_p + p_p(\varepsilon_p)) = 0. \quad (\text{VII.69})$$

3°. Ультрарелятивистское уравнение состояния космологической плазмы на рассматриваемой стадии расширения:

$$p_p = \frac{1}{3}\varepsilon_p, \quad (\text{VII.69}) \Rightarrow \varepsilon_p a^4 = \text{Const}. \quad (\text{VII.70})$$

4°. Ультрарелятивистское начало Вселенной:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varkappa = \frac{1}{3}. \quad (\text{VII.71})$$

### VII.4.3 Баланс энергии космологической плазмы

Основой развиваемой здесь теории является уравнение энергодбаланса космологической плазмы, являющееся, фактически, законом сохранения ее энергии. Для случая суммарного ультрарелятивистского состояния материи эта теория была построена автором в работах [251], [270]. Здесь мы обобщим и детализируем результаты этой теории на случай произвольного суммарного уравнения состояния материи. Из (VII.69) с учетом (VII.70) сразу следует:

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const}, \quad (\text{VII.72})$$

где  $\tilde{\varepsilon}_p$  — конформная плотность энергии космологической плазмы. Определим эту константу, полагая согласно (VII.67) на начальной ультрарелятивистской стадии расширения:

$$a(t)|_{t \rightarrow 0} = \sqrt{t}. \quad (\text{VII.73})$$

Тогда для конформной плотности энергии плазмы получим, предполагая, что космологическая плазма является единственной ультрарелятивистской компонентной материи,

$$\tilde{\varepsilon}_p = \frac{3}{32\pi}. \quad (\text{VII.74})$$

Введем далее температуру  $T_0(t)$  космологической плазмы в идеальной Вселенной, в которой на данный момент космологического времени  $t$  вся плазма является локально равновесной. Таким образом, плотность энергии этой плазмы описывается формулой (VII.51)

Глава VII. Установление термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной

с  $N = N_0$  – эффективным числом типов равновесных частиц в плазме с температурой  $T_0$ . Отсюда с учетом (VII.74) получим закон эволюции температуры плазмы в равновесной Вселенной:

$$T_0(t) = \frac{1}{a(t)} \left( \frac{45}{32\pi^3 N_0} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{VII.75})$$

Относительно величины  $N_0$  – *эффективного числа типов частиц*, находящихся в термодинамическом равновесии, мы будем полагать, что  $N_0(t)$  – медленно меняющаяся функция космологического времени:

$$\dot{N}_0 t \ll 1. \quad (\text{VII.76})$$

Пусть теперь  $T(t)$  – истинная температура равновесной компоненты космологической плазмы, а  $\Delta f_a(p, t)$  – функция распределения «а»-го сорта неравновесных частиц плазмы. Найдем плотности энергии равновесной,  $\varepsilon_e$ , и неравновесной,  $\varepsilon_{ne}$ , компонент:

$$\varepsilon_e = \frac{N\pi^2}{15} T^4(t); \quad (\text{VII.77})$$

$$\varepsilon_{ne} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty p^3 \Delta f_a(p, t) dp, \quad (\text{VII.78})$$

где  $S$  – спин частиц;  $N(t)$  – эффективное число типов равновесных частиц в плазме с температурой  $T(t)$ . Выражая далее с помощью (VII.75) масштабный фактор через температуру  $T_0(t)$  и вводя новую *безразмерную* конформную импульсную переменную  $\tilde{p}$ :<sup>8</sup>

$$p = \left( \frac{45}{32\pi^3} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\tilde{p}}{a(t)} = T_0(t) N_0^{\frac{1}{4}} \tilde{p}, \quad (\text{VII.79})$$

получим для (VII.78):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p}. \quad (\text{VII.80})$$

Далее, из (VII.75) и (VII.77) получим для конформной плотности энергии равновесной компоненты плазмы:

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{3}{32\pi} y^4, \quad (\text{VII.81})$$

где введена безразмерная функция,  $y(t)$  – *относительная температура* [270]:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \leq 1. \quad (\text{VII.82})$$

Из (VII.81) можно получить соотношение:

$$\sigma(t) \equiv y^4(t) \equiv \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_p} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\tilde{\varepsilon}_e + \tilde{\varepsilon}_{ne}}. \quad (\text{VII.83})$$

<sup>8</sup>В отличие от импульсной переменной,  $p$ , давление обозначается римским шрифтом, – р.

## VII.5. Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

Таким образом, закон сохранения энергии космологической плазмы (VII.74) с помощью соотношений (VII.78) и (VII.81) можно переписать в виде:

$$y^4 + \frac{15}{2\pi^4} \sum_a (2S + 1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p} = 1. \quad (\text{VII.84})$$

Соотношение (VII.84) и называется *уравнением энергобаланса плазмы*. Оно получено нами при использовании трех предположений модели — 2°, 3°, 4°. Заметим, что в предыдущей главе VI это основное соотношение математической модели восстановления термодинамического равновесия выводилось при более частных предположениях. При заданной зависимости функции распределения неравновесных частиц от температуры равновесной компоненты плазмы и космологического времени уравнение энергобаланса становится нелинейным интегральным уравнением относительно температуры равновесной компоненты. Следовательно, для получения этого уравнения в явной форме необходимо решить кинетическое уравнение для неравновесных частиц.

## VII.5 Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

### VII.5.1 Решение кинетического уравнения

Уравнение энергобаланса (VII.84), в свою очередь, определяется решением кинетического уравнения относительного неравновесного распределения

$\Delta f(t, p)$ . Используя здесь соотношение (VII.79), приведем кинетическое уравнение для сверхтепловых частиц (VII.34) с интегралом столкновений (VII.58) к виду:

$$\frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = - \frac{8\pi N}{3\tilde{p}L(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N^{1/4})} \times \left( \frac{2\pi^3}{45} \right)^{1/4} T^2(t) a(t) \Delta f_a. \quad (\text{VII.85})$$

Решая (VII.85), получим:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \times \exp \left[ - \frac{8\pi}{3\tilde{p}} \left( \frac{2\pi^3}{45} \right)^{1/4} \int_0^t \frac{NaT^2 dt}{L(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4})} \right], \quad (\text{VII.86})$$

где

$$\Delta f_a^0(\tilde{p}) \equiv \Delta f_a(0, \tilde{p}). \quad (\text{VII.87})$$

## VII.5.2 Переход к безразмерным нормированным переменным

Введем среднюю конформную энергию неравновесной компоненты ультрарелятивистских частиц в начальный момент времени,  $\langle \tilde{p} \rangle_0$ , –

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\tilde{n}(0)} \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^3 d\tilde{p}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^2 d\tilde{p}} \quad (\text{VII.88})$$

и безразмерную нормированную импульсную переменную,  $\rho$ , –

$$\rho \equiv \frac{\tilde{p}}{\langle \tilde{p} \rangle_0}, \quad (\text{VII.89})$$

так что

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle_0 &= \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\langle \tilde{p} \rangle_0 \tilde{n}(0)} \equiv 1 \Rightarrow \\ \langle \rho \rangle_0 &= \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^3 d\rho}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^2 d\rho} = 1. \end{aligned} \quad (\text{VII.90})$$

Согласно математической модели неравновесной плазмы средняя энергия частиц в первоначальном неравновесном распределении должна быть больше и даже значительно больше тепловой энергии частиц, таким образом согласно (VII.79), (VII.88) в рассматриваемой нашей модели:

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 \gg 1. \quad (\text{VII.91})$$

Фактически величина  $\langle \tilde{p} \rangle_0$  является *независимым параметром* рассматриваемой здесь модели, – физический смысл этого безразмерного параметра – отношение средней энергии частиц первоначального неравновесного распределения к температуре плазмы в равновесной Вселенной в начальный момент времени<sup>9</sup>. В отличие от конформной импульсной переменной  $\tilde{p}$  среднее значение безразмерной конформной импульсной переменной  $\rho$  в начальном распределении тождественно равно 1.

Преобразуем выражение в экспоненте (VII.86), переходя к безразмерным переменным  $y, \rho$ . Учитывая слабую зависимость логарифмического фактора  $L$  от своих аргументов, а также убывающий характер подынтегральной функции в (VII.86), примем следующую оценку логарифмического фактора:

$$L\left(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4}\right) \simeq L(\langle \tilde{p} \rangle_0 T_0^2) \equiv L_0(t). \quad (\text{VII.92})$$

Таким образом, с логарифмической точностью представим решение (VII.86) в компактной форме:

$$\Delta f_a(t, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \exp\left(-\frac{2}{\rho} \int_0^t \xi \frac{y^2}{a} dt\right), \quad (\text{VII.93})$$

<sup>9</sup>Сами эти величины могут быть бесконечными, но их отношение конечно.

### VII.5. Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

где введено обозначение:

$$\begin{aligned}\xi \equiv \xi(t) &= \left(\frac{5\pi}{18}\right)^{1/4} \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)} \approx \\ &0.967 \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)} \approx \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)}.\end{aligned}\quad (\text{VII.94})$$

Вводя теперь новую безразмерную временную переменную,  $\tau$ , –

$$\tau = 2 \int_0^t \frac{\xi}{a} dt, \quad (\text{VII.95})$$

такую, что:

$$\frac{d\tau}{dt} \equiv 2 \frac{\xi}{a} > 0, \quad (\text{VII.96})$$

и новую безразмерную функцию,  $Z(\tau)$ , –

$$Z(\tau) = \int_0^\tau y^2(\tau) d\tau, \quad (\text{VII.97})$$

приведем решение кинетического уравнения (VII.93) к виду:

$$\Delta f_a(\tau, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (\text{VII.98})$$

Исследуем *уравнение связи* (VII.95) безразмерной временной переменной  $\tau$  и космологическим временем  $t$ . Полагая в (VII.95) степенную зависимость масштабного фактора  $a(t)$  от космологического времени и принимая во внимание слабую зависимость от времени фактора  $\xi$ , получим:

$$a \sim t^\alpha \rightarrow \begin{cases} t^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, 0; \\ \tau \sim \ln t, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (\text{VII.99})$$

Отсюда следует, что при  $\alpha \leq 1 \rightarrow \tau(\infty) = \infty$ , а при  $\alpha < 1 \rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < \infty$ . Сравнивая соотношение (VII.99) с соотношениями (VII.64) – (VII.67), приходим к следующему важному выводу:

$$\begin{aligned}\kappa \geq -\frac{1}{3} \quad (\Omega \leq 0) &\Rightarrow \tau(\infty) = +\infty; \\ \kappa < -\frac{1}{3} \quad (\Omega > 0) &\Rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < +\infty.\end{aligned}\quad (\text{VII.100})$$

Поскольку функция распределения неравновесной компоненты космологической плазмы (VII.98) зависит от времени лишь посредством *монотонно возрастающей функции* безразмерной временной переменной  $Z(\tau)$ , то соотношения (VII.100) означают, что в ультррелятивистской космологической плазме во Вселенной с отрицательным ускорением асимптотически достигается полное термодинамическое равновесие, тогда как *в ускоряющейся Вселенной термодинамическое равновесие никогда строго не достигается.*

### VII.5.3 Конформная плотность энергии неравновесной компоненты

Подставляя решение кинетического уравнения в форме (VII.98) в выражение для конформной плотности энергии неравновесных частиц, получим

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (\text{VII.101})$$

Произведем тождественное преобразование с этим выражением, учитывая что согласно определению (VII.83) и уравнению энергодоланса (VII.84):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \frac{3}{32\pi} : \quad (\text{VII.102})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}}{\tilde{\varepsilon}_{ne}^0} \tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \Phi(Z) \frac{3}{32\pi}, \quad (\text{VII.103})$$

где мы с учетом преобразования к безразмерной импульсной переменной  $\rho$  (VII.89) ввели новую *безразмерную функцию*  $\Phi(Z)$ :

$$\Phi(Z) \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}. \quad (\text{VII.104})$$

### VII.5.4 Решение и исследование уравнения энергодоланса

Вследствие определения (VII.97) функция  $Z(\tau)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$Z'(\tau) = y^2(\tau) \Rightarrow Z'^2 = \sigma(\tau); \quad (\text{VII.105})$$

$$Z(0) = 0; \quad Z'(0) = y^2(0) = \sqrt{\sigma_0}, \quad (\text{VII.106})$$

где

$$Z' \equiv \frac{dZ}{d\tau} > 0. \quad (\text{VII.107})$$

Таким образом, с учетом (VII.103) – (VII.105) уравнение энергодоланса (VII.84) можно переписать в виде дифференциального уравнения относительно функции  $Z(\tau)$ :

$$\begin{aligned} y^2 + (1 - \sigma_0)\Phi(Z) &= 1 \Rightarrow \\ Z'^2 + (1 - \sigma_0)\Phi(Z) &= 1, \end{aligned} \quad (\text{VII.108})$$

решая которое с учетом соотношений (VII.106) – (VII.107), найдем формальное решение в неявном виде:

$$\int_0^Z \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)\Phi(u)}} = \tau. \quad (\text{VII.109})$$

VII.5. Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

Согласно определению (VII.104) функция  $\Phi(Z)$  неотрицательна:

$$\Phi(Z) > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (\text{VII.110})$$

причем

$$\Phi(0) = 1; \quad \lim_{Z \rightarrow +\infty} \Phi(Z) = 0. \quad (\text{VII.111})$$

Вычисляя первую и вторую производную по  $Z$  от функции  $\Phi(Z)$ , дифференцируя соотношение (VII.104) по  $Z$ , получим:

$$\Phi(Z)'_Z < 0, \quad (Z \in [0, +\infty)); \quad (\text{VII.112})$$

$$\Phi(Z)'' > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)). \quad (\text{VII.113})$$

Вследствие (VII.112) функция  $\Phi(Z)$  является строго монотонно убывающей, но тогда вследствие соотношений (VII.111) эта функция ограничена на интервале:

$$\Phi(Z) \in [0, 1]; \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (\text{VII.114})$$

причем график функции  $\Phi(Z)$  вогнутый. Вследствие этих свойств функции  $\Phi(Z)$  уравнение  $\Phi(Z) = \Phi_0$  на рассматриваемом интервале значений всегда имеет одно и только одно решение  $Z = Z_0$ , т.е., отображение  $Y = \Phi(Z)$  на множестве неотрицательных чисел является биективным.

Далее, из соотношения (VII.105) следует, что функция  $Z(\tau)$  является монотонно возрастающей на интервале  $\tau \in [0, \tau_\infty]$ . Дифференцируя соотношение (VII.108) по  $\tau$  как сложную функцию, получим:

$$Z'[2Z'' + (1 - \sigma_0)\Phi'_Z] = 0. \quad (\text{VII.115})$$

Отсюда вследствие положительности  $Z'$  (VII.108) найдем вторую производную:

$$Z'' = -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi'_Z. \quad (\text{VII.116})$$

Поэтому вследствие (VII.112) и (VII.82) – (VII.83) получим из (VII.116):

$$Z'' > 0, \quad (\text{VII.117})$$

т.е., график функции  $Z(\tau)$  также является вогнутым. Далее, дифференцируя (IV.53), получим с учетом (VII.117):

$$y' > 0, \quad (\text{VII.118})$$

— т.е. функция  $y(\tau)$  (а вместе с ней и функция  $\sigma(\tau)$ ) является монотонно возрастающей. С другой стороны, она ограничена снизу начальным значением  $y_0$  ( $\sigma_0$ ), а сверху — значением 1:

$$y' > 0, y \in [y_0, 1); \quad \sigma' > 0, \sigma \in [\sigma_0, 1). \quad (\text{VII.119})$$

Перечисленные свойства функций  $y(\tau)$ ,  $Z(\tau)$  и  $\Phi(Z)$  обеспечивают биективность цепочки отображений  $\tau \leftrightarrow y$ ,  $y \leftrightarrow Z$ ,  $Z \leftrightarrow \Phi$ . В итоге, каждому значению  $\Phi$  соответствует

Глава VII. Установление термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной

одно и только одно значение  $Z$  и одно и только одно значение  $\tau$ :  $\tau \leftrightarrow \Phi$ . Для замыкания этой цепочки достаточно определить связь функций  $y(\tau)$  и  $Z(\tau)$  с помощью уравнения энергодбаланса (VII.109):

$$y = [1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)]^{1/4}. \quad (\text{VII.120})$$

Уравнения (VII.109) и (VII.120) являются параметрическим решением уравнения энергодбаланса (VII.108), а вышеперечисленные свойства функций  $\Phi(Z)$  и  $Z(\tau)$  обеспечивают единственность его решения. Согласно (VII.104) функция  $\Phi(Z)$  полностью определяется начальным распределением неравновесных частиц  $\Delta f_a^0(\rho)$ . Поэтому с математической точки зрения задача о восстановлении термодинамического равновесия во Вселенной с произвольным ускорением полностью решена. Конкретные модели определяются моделью темной материи и моделью первоначального неравновесного распределения частиц.

Продифференцируем теперь соотношение (VII.116) по  $\tau$  и учтем связь (VII.105) между функциями  $y(\tau)$  и  $Z(\tau)$ :

$$\begin{aligned} Z''' &= -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}Z' \\ \Rightarrow y''y &= -y'^2 - \frac{1}{4}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}y^2. \end{aligned}$$

Таким образом, вследствие (VII.113):

$$y'' < 0, \quad (\text{VII.121})$$

— т.е., график функции  $y(\tau)$ , а вместе с ним и  $\sigma(\tau)$ , является выпуклым. Далее, поскольку  $\Phi_Z(Z \rightarrow \infty) = 0$ , из (VII.116) следует:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y'(\tau) = 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma'(\tau) = 0, \quad (\text{VII.122})$$

— т.е., значение  $\sigma = 1$  достигается асимптотически при  $\tau \rightarrow \infty$ . Это позволяет нарисовать качественный график функции  $y(\tau)$  (Figure 42). Конечность безразмерного времени  $\tau_\infty$  приводит к установлению предельного значения функции  $y(\tau)$ :

$$y(\tau_\infty) = y_\infty < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty < 1. \quad (\text{VII.123})$$

Вследствие этого часть энергии космологической плазмы навсегда консервируется в неравновесной сверхтепловой компоненте:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{ne}(t)}{\varepsilon_p(t)} = 1 - \sigma_\infty = \begin{cases} = 0, & \tau_\infty = \infty \\ > 0, & \tau_\infty < \infty \end{cases}. \quad (\text{VII.124})$$

Согласно (VII.100) это возможно лишь для ускоренно расширяющейся Вселенной.

VII.6. Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную

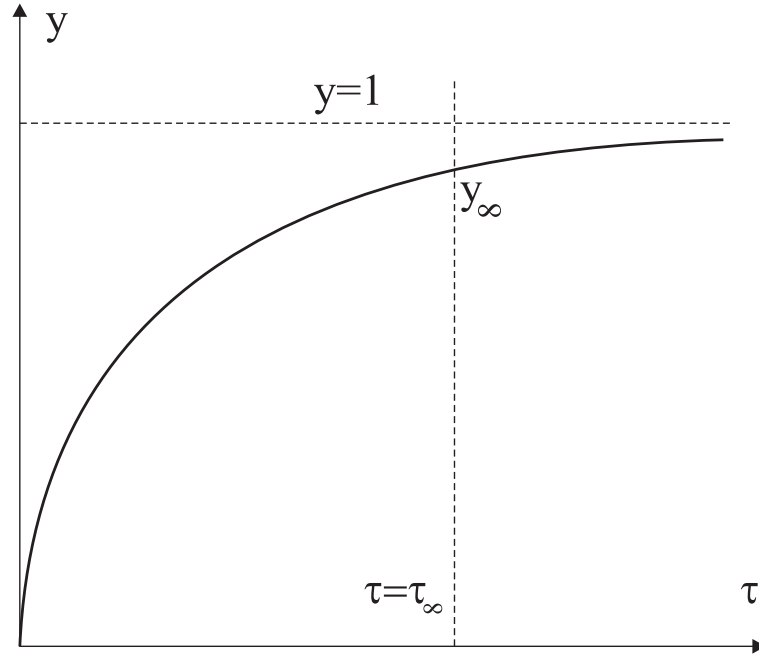


Рис. 42. Качественный вид графика функции  $y(\tau)$ .

## VII.6 Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную

Рассмотрим следующую простую модель материи, состоящей из двух компонент – минимально связанного массивного скалярного поля (космологический член) с уравнением состояния:

$$p_s = -\varepsilon_s, \quad (\text{VII.125})$$

и ультрарелятивистской плазмы с уравнением состояния (VII.70). Тогда суммарный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение можно записать в виде:

$$\varkappa(t) = \frac{1}{3} \frac{1 - 3\delta}{1 + \delta}; \quad \Omega(t) = -\frac{1 - \delta}{1 + \delta}, \quad (\text{VII.126})$$

где

$$\delta = \delta(t) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}. \quad (\text{VII.127})$$

Таким образом, при  $\delta = \text{Const}$  формулы (VII.66) можно записать в следующем удобном виде [273]:

$$a = a_1 t^{(1+\delta)/2}; \quad \varepsilon = \frac{3}{32\pi} \frac{(1 + \delta)^2}{t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (\text{VII.128})$$

Законы сохранения энергии (VII.68) – (VII.69) принимают вид:

$$\varepsilon_s = \text{Const} = \frac{3\Lambda^2}{8\pi}; \quad (\text{VII.129})$$

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const} \simeq \frac{3}{32\pi}. \quad (\text{VII.130})$$

Подставляя (VII.129)-(VII.130) в уравнение (VII.60) и интегрируя его, получим:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2} \right) e^{(t-t_0)/2\Lambda} - \frac{b^2}{t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2}} e^{-(t-t_0)/2\Lambda} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{VII.131})$$

где:

$$b^2 = \frac{3}{32\pi\Lambda^2}. \quad (\text{VII.132})$$

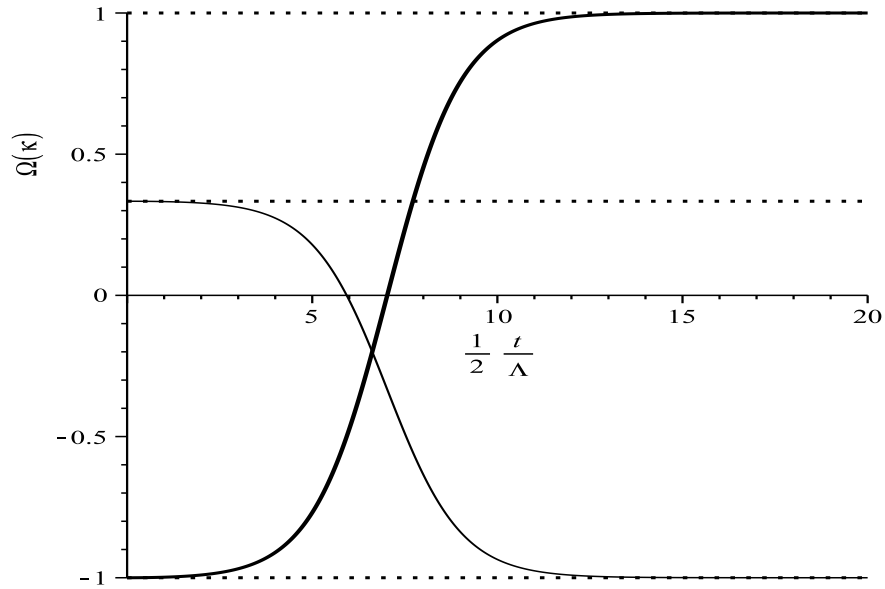
В частности, при  $t_0 = 0$  для масштабного фактора имеем отсюда:

$$a(t) = \frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{3}{32\pi} \text{sh} \frac{t}{2\Lambda}} \quad (\text{VII.133})$$

Вычисляя согласно (VII.127), (VII.129), (VII.130) и (VII.133) отношение  $\delta$ , найдем:

$$\delta(t) = \left( \frac{3}{16\pi\Lambda} \text{sh} \frac{t}{2\Lambda} \right)^2. \quad (\text{VII.134})$$

Далее, согласно (VII.127) можно вычислить эффективный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение (см. Рис. 43).



**Рис. 43.** Эволюция эффективного коэффициента баротропы  $\kappa(t)$  (тонкая линия) и инвариантного ускорения  $\Omega(t)$  (жирная линия) относительно точного решения (VII.133) при  $\Lambda = 1$ . Пунктирными линиями показаны асимптоты  $-1$ ;  $1/3$ ;  $1$ .

Следующий рисунок показывает, что с помощью параметра  $\Lambda$  можно легко управлять временем перехода на инфляционный режим ускорения  $\kappa \rightarrow -1$ . Напомним, что космологическое время  $t$  измеряется в планковских единицах.

VII.6. Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную

Таким образом, согласно (VII.95) определим новую безразмерную временную переменную,  $\tau$ :

$$\tau = \frac{2\Lambda\langle\xi\rangle}{\langle\tilde{p}\rangle_0} F(\varphi, 1/\sqrt{2}), \quad (\text{VII.135})$$

где:

$$\varphi = \arccos \frac{1 - \text{sh } t/2\Lambda}{1 + \text{sh } t/2\Lambda}; \quad (\text{VII.136})$$

$F(\varphi, k)$  – эллиптический интеграл первого рода:

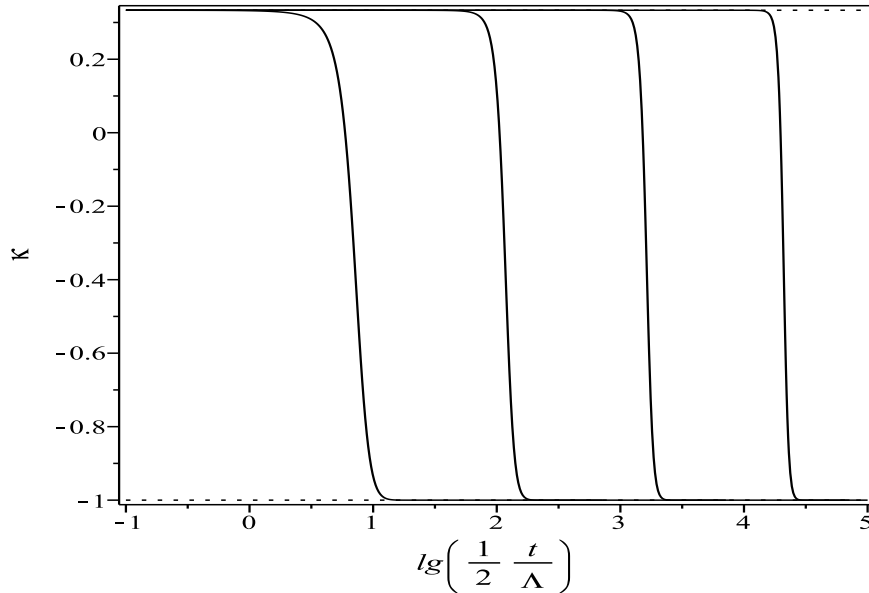
$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}; \quad (k^2 < 1). \quad (\text{VII.137})$$

Таким образом:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2\Lambda} \frac{1}{\text{sh } \varphi} \frac{\text{ch } \varphi}{1 + \text{sh } \varphi} > 0; \quad \tau \in [0, \tau_\infty), \quad (\text{VII.138})$$

где<sup>10</sup>

$$\tau_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = \frac{2\Lambda\langle\xi\rangle}{\langle\tilde{p}\rangle_0} F(1, 1/\sqrt{2}). \quad (\text{VII.139})$$



**Рис. 44.** Эволюция эффективного коэффициента баротропы  $\kappa(t)$  относительно точного решения (VII.133) в зависимости от космологической постоянной  $\Lambda$  слева – направо:  $\Lambda = 1$ ,  $\Lambda = 10$ ,  $\Lambda = 100$ ,  $\Lambda = 1000$ .

<sup>10</sup> $F(1, 1/\sqrt{2}) \approx 1.083216773$ .

## VII.7 Численная модель восстановления LTE в ускоренной Вселенной

### VII.7.1 Модель первоначального неравновесного распределения

Таким образом, как мы отмечали выше, математическая модель процесса восстановления LTE в космологической плазме сводится к двум параметрическим уравнениям (VII.109) и (VII.120), определяющим *при заданной функции*  $\Phi(Z)$  связи вида:

$$\tau = \tau(Z) \quad (VII.109); \quad (VII.140)$$

$$y = y(Z) \quad (VII.120), \quad (VII.141)$$

разрешая которые, мы можем определить функцию  $y(\tau)$  и, тем самым, формально полностью решить поставленную задачу. Таким образом, окончательное решение задачи находится в квадратурах заданием начального распределения неравновесных частиц  $\Delta f_0(p)$  и последующим определением интегральной функции  $\Phi(Z)$  (VII.104). Заметим, что формально параметрические уравнения (VII.109) и (VII.120), как и определение функции  $\Phi(Z)$ , не отличаются от аналогичных, полученных ранее автором в работах [251], [270]. Принципиально новый момент, вносимый ускорением Вселенной, заключается в связи  $\tau(t)$  (VII.95).

Для построения численной модели рассмотрим первоначальное распределение типа белого шума:

$$\Delta f_0(\rho) = \frac{A}{\rho^3} \xi(\rho_0 - \rho), \quad (VII.142)$$

где  $A$  - нормировочная постоянная,  $\rho_0 > 1$  - безразмерный параметр,  $\xi(x)$  - ступенчатая функция Heaviside, так что конформная плотность энергии относительно этого распределения равна:

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = \frac{\langle \tilde{p} \rangle_0^4 A \rho_0}{32\pi^5}. \quad (VII.143)$$

Вычисляя функцию  $\Phi(Z)$  относительно распределения (VII.142), найдем:

$$\Phi(Z) = e^{-x} - x \text{Ei}(x); \quad x \equiv \frac{Z}{\rho_0}, \quad (VII.144)$$

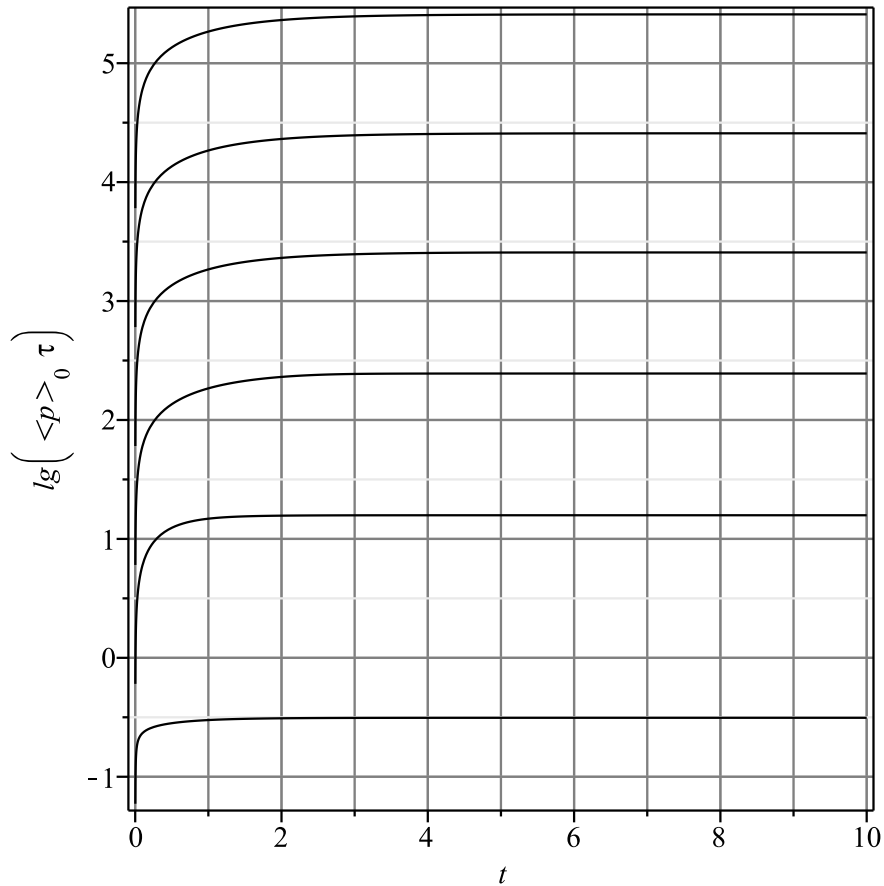
где  $\text{Ei}(x)$  есть интегральная показательная функция

$$\text{Ei}(x) = \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-tx}}{t} dt. \quad (VII.145)$$

### VII.7.2 Результаты численного интегрирования

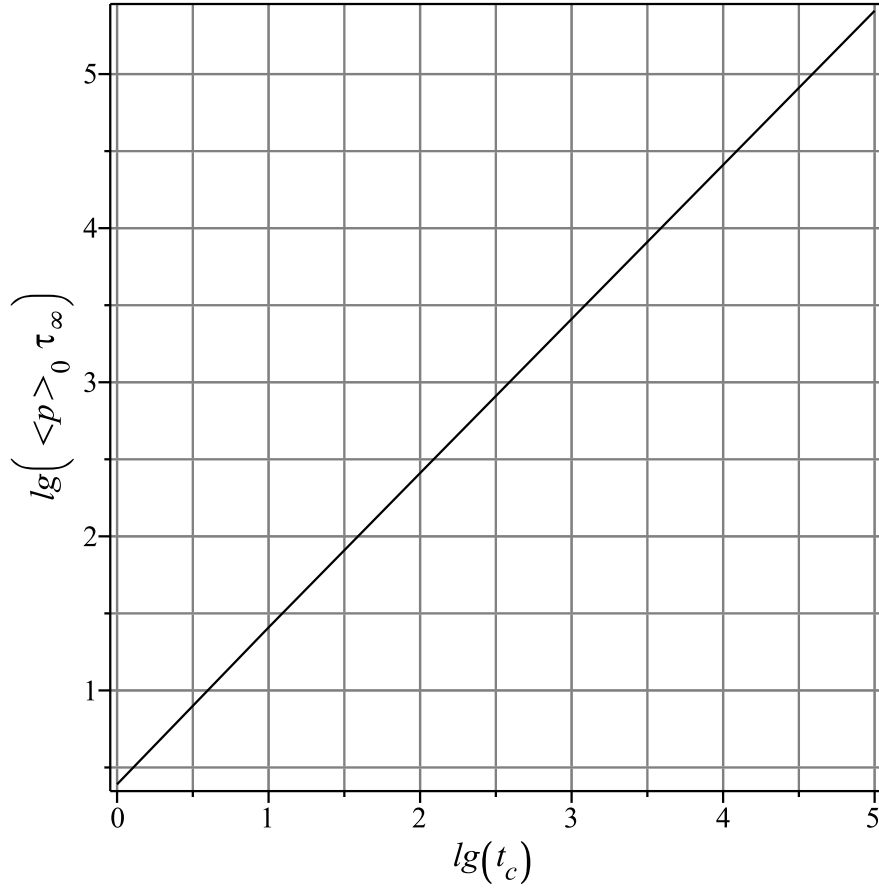
Задача, таким образом, сводится к численному интегрированию системы уравнений (VII.95), (VII.109), (VII.120). Ниже представлены некоторые результаты интегрирования. В дальнейшем в соответствии с (VII.129) и (VII.133) удобно ввести *временную космологическую постоянную*

$$t_c \equiv 4\Lambda. \tag{VII.146}$$



**Рис. 45.** Зависимость десятичного логарифма безразмерной временной переменной  $\langle \tilde{p} \rangle_{0\tau}$  от космологического времени  $t$ . Снизу – вверх:  $t_c = 1; 10; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5$ . Всюду принято  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ .

На Рис. 46 представлены результаты численного интегрирования для определения параметра  $\tau_\infty$ . В частности, интегрирование соотношения (VII.95) подтвердило нечувствительность величины  $\tau_\infty$  от ряда параметров и, фактически, подтвердило оценочную формулу (VII.139), которая не учитывала деталей логарифмической зависимости параметра  $\langle \xi \rangle$  от времени. На Рис. 46 показаны результаты численного интегрирования этой величины.



**Рис. 46.** Зависимость безразмерного временного параметра  $\tau_\infty \langle \tilde{p} \rangle_0$  от временной космологической постоянной; всюду  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $p_0 = 10$ ;  $\sigma_0$  — снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.

Эти результаты хорошо описываются формулой

$$\tau_\infty \approx \frac{2.57 t_c}{\langle \tilde{p} \rangle_0}. \quad (\text{VII.147})$$

На Рис. 47 показана зависимость переменной  $Z(t)$  при различных значениях временной космологической постоянной. Как следует из результатов, представленных на рисунке 49, значение функции  $Z(t)$  также имеет предельное значение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = Z_\infty < \infty. \quad (\text{VII.148})$$

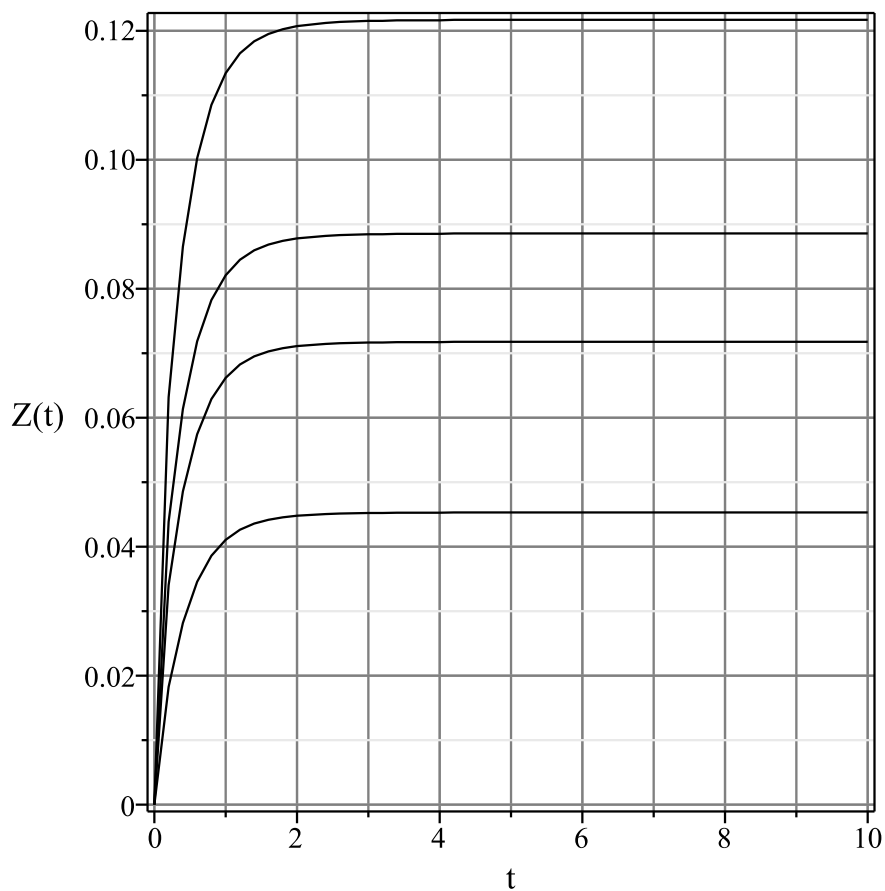
Согласно (VII.98) это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  «замораживается» распределение сверхтепловых частиц:

$$\Delta f_a(\tau_\infty, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z_\infty}{\rho}}. \quad (\text{VII.149})$$

Таким образом, в современной Вселенной может остаться «хвост» неравновесных частиц сверхвысоких энергий:

$$E > E_\infty = Z_\infty \langle \tilde{p} \rangle_0. \quad (\text{VII.150})$$

VII.7. Численная модель восстановления LTE в ускоренной Вселенной

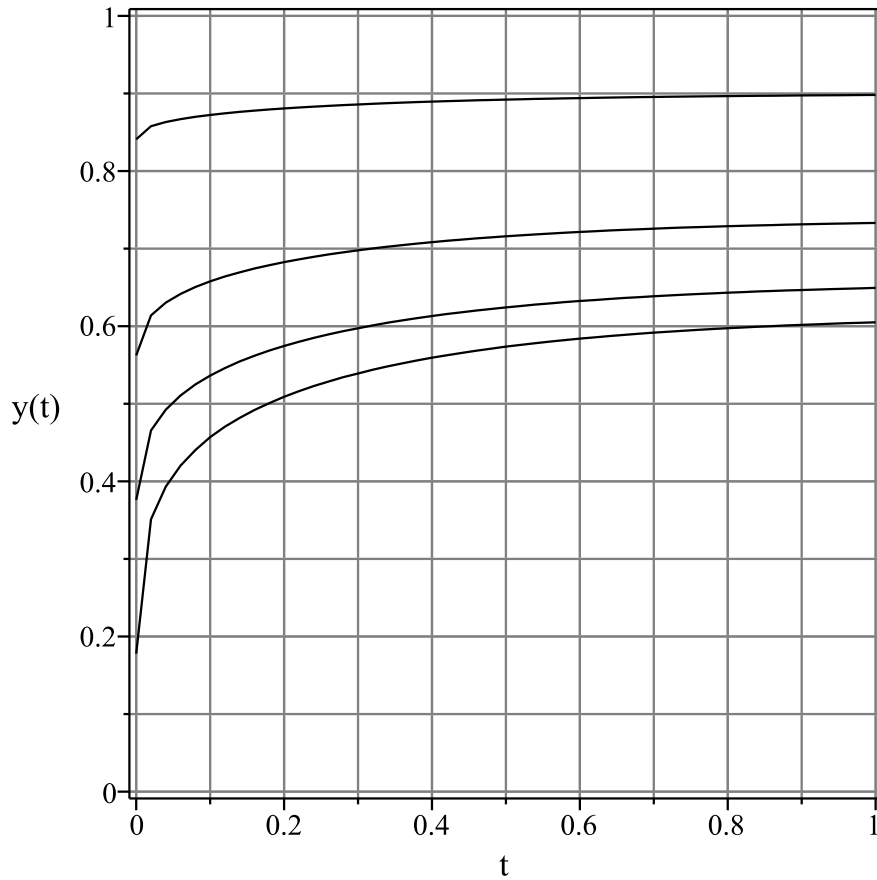


**Рис. 47.** Зависимость безразмерной функции  $Z(t)$  от времени; всюду  $t_c = 1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $p_0 = 10$ ;  $\sigma_0$  — снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.

На Рис. 48–49 представлены результаты численного интегрирования для относительной температуры  $y(t) = T(t)/T_0(t) \leq 1$ . Согласно смыслу этой величины безразмерный параметр:

$$e_\infty = 1 - \sigma_\infty = 1 - y_\infty^4 > 0 \quad (\text{VII.151})$$

есть относительная доля энергии космологической плазмы, заключенная в этом неравновесном «хвосте» распределения.

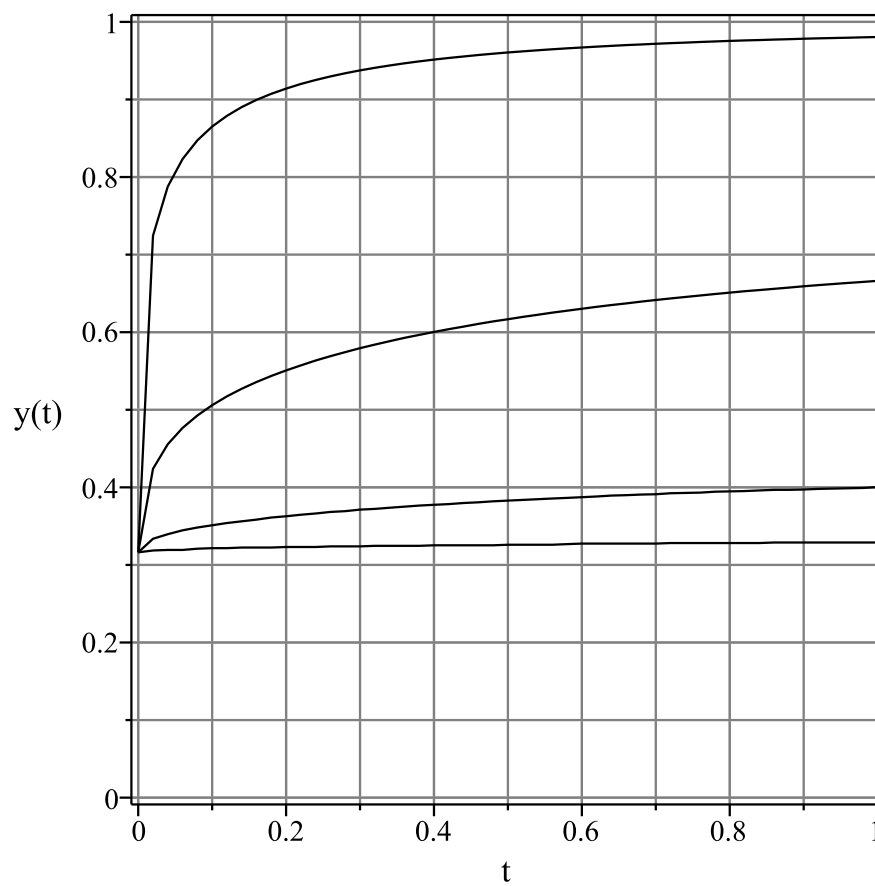


**Рис. 48.** Зависимость относительной температуры  $y(t)$  от времени; всюду  $t_c = 1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $p_0 = 10$ ;  $\sigma_0$  — снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.

## Заключение

Таким образом, построена замкнутая теоретическая модель восстановления LTE в ультррелятивистской плазме в предположении восстановления скейлинга взаимодействий частиц в области выше унитарного предела для произвольного ускорения Вселенной. Найдено решение в квадратурах уравнения энергобаланса, решение которого полностью определяет процесс восстановления LTE. Показано, что в случае ускорения Вселенной LTE в космологической плазме не восстанавливается строго. Построены численные модели, описывающие процесс восстановления LTE в ускоренной Вселенной. Следует заметить, что решение задачи о восстановлении LTE в космологической плазме позволяет с помощью решения кинетического уравнения (VII.98) исследовать спектр высокоэнергетических частиц, имеющих космологическое происхождение, и на этой основе делать выводы о специфике взаимодействий элементарных частиц при сверхвысоких энергиях в реакциях, которые происходили в ранней Вселенной.

VII.7. Численная модель восстановления LTE в ускоренной Вселенной



**Рис. 49.** Зависимость относительной температуры  $y(t)$  от времени; всюду  $\sigma_0 = 0.01$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $p_0 = 1000$ ;  $t_c$  — снизу вверх: 1; 0.1; 0.01; 0.001.

# Литература

- [1] Игнатъев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. // Казань: Изд-во «Фолиант». – 2010. – 506 с.
- [2] Черников Н.А. Релятивистское кинетическое уравнение и равновесное состояние газа в статическом сферически - симметричном гравитационном поле. - Докл. Акад. Наук СССР, **133** (1960) - 333-336.
- [3] Tauber.E., Weinderg J.W. Internal state of a graviting gas. - Phys. Rev., **122** (1961) - 1342-1365.
- [4] Черников Н.А. Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле. - Докл. Акад. Наук СССР, **144** (1962) - 89-92.
- [5] Черников Н.А. Вектор потока и тензор массы релятивистского идеального газа. - Докл. Акад. Наук СССР, **144** (1962) - 314-317.
- [6] Черников Н.А. Релятивистское распределение Максвелла - Больцмана и интегральная форма законов сохранения. - Докл. Акад. Наук СССР, **144** (1962) - 544-547.
- [7] Chernikov N.A. The microscopic foundation of the relativistic hydrodynamics. - Acta Phys. Polon., **27** (1965) - 723-739.
- [8] Власов А.А. Статистические функции распределения. - Наука, М. (1966).
- [9] Lindquist E.W. Relativistic transport theory. - Ann. Phys., **37** (1966) - 487-518.
- [10] Stewart J.M. Non - Equilibrium Relativistic Kinetic Theory. - Lect. Notes in Physics, **10** (1971) - 78-81.
- [11] Ehlers J. General Relativity and Kinetic Theory. - General Relativity and Cosmology, proceeding of course 47 of the International School of Physics “Enrico Fermi”, ed. Sachs R.K.. New York, Academic Press (1971) - 358
- [12] Ehlers J. Kinetic theory of gases in general relativity theory. - Lect. Notes in Physics, **28** (1974) - 78-105.
- [13] Israel W., Stewart J.M. Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. - Ann. Phys., **118** (1977) - 341-372.

## Литература

- [14] Сахаров А.Д. Нарушение CP-инвариантности, C-асимметрия и барионная асимметрия Вселенной. - Письма в журн. эксперим. и теорет. физ., **5** (1967) - 32-35.
- [15] Кузьмин В.А. CP-неинвариантность и барионная асимметрия Вселенной. - Письма в журн. эксперим. и теорет. физ., **12** (1970) - 335-337.
- [16] Fry J.N., Clive K.A., Turner M.S. Hierachy of cosmological baryon generation. - Phys. Rev. Let., **45** (1980) - 2074-2077.
- [17] Игнатъев Ю.Г. О статистической динамике ансамбля частиц в ОТО. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 14 (1978) - 90-107.
- [18] Игнатъев Ю.Г. Статистическая динамика ансамбля классических частиц в гравитационном поле. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 20 (1983) - 50-109.
- [19] de Groot S.R., van Leeuwen W.A., van Weert Ch.G. Relativistic Kinetic Theory. - North - Holland Publishing Company Amsterdam - New-York - Oxford (1980).  
Русский перевод: de Гроот С., ван Леувен В., ван Верт Х. Релятивистская кинетическая теория. Принципы и применения. Москва: Мир, 1983, 422 с.
- [20] Jüttner F.. Ann. d. Phys., **34**, 146, (1911).
- [21] Jüttner F.. Ann. d. Phys., **35**, 145, (1911).
- [22] Tolman R.C.. Phil. Mag. **28**, 1953, (1914).
- [23] Jüttner F.. Zs. Phys., **47**, 542, (1928).
- [24] Walker A.G.. Proc.Edinburgh Math. Soc., **2**, 238, (1935).
- [25] D.Van Dantzing. Nederl. Akad. Wetensch. Proc., **42**, 608, (1939).
- [26] Lichnerovich A., Marrot R.. Comp.Rend., **210**, 759, (1940).
- [27] Marrot R.. Math. Pur. Appl., **25**, 93, (1946).
- [28] Taub A.H.. Phys. Rev., **74**, 328, (1948).
- [29] Корпе Н.. Ann. d. Phys., **112**, 103, (1948).
- [30] Власов А.А.. Теория многих частиц, ГИТТЛ, М.-Л. (1950).
- [31] Климонтович Ю.Л. Релятивистское уравнение для квантовой функции распределения. ДАН СССР, **87**, вып. 6, 927, (1952).
- [32] Lindhard J.L. Det. Kong. Dansske Videnskab.Selskab. Dan.Mat.Fyz. Medd., **28**, 8, (1954).
- [33] Климонтович Ю.Л.. Труды Московского авиационного технологического института, **26**, 233, (1955).

## Литература

- [34] *Беляев С.Г., Буджер Г.И.* Релятивистское кинетическое уравнение. - Докл. Акад. Наук СССР, **107** No 6 (1956) - 807-810.
- [35] Synge J.L.. The relativistic gas. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, (1957).
- [36] Черников Н.А.. ЖЭТФ, **32**, 389 (1957).
- [37] Черников Н.А.. ЖЭТФ, **33**, 541 (1957).
- [38] Черников Н.А.. ДАН СССР, **112**, 1030 (1957).
- [39] Черников Н.А.. ДАН СССР, **114**, 530 (1957).
- [40] Власов А.А.. Труды VI-го совещания по вопросам космогонии, Изд-во АН СССР; Scientia Sinica, v. 3, 266 (1959).
- [41] *Климонтович Ю.Л.* Релятивистские кинетические уравнения для плазмы. I. - Журн. эксперим. и теорет. физ., **37** (1959) - 735-746.
- [42] *Syng J.L.* Relativity: The General Theory. - North - Holland Publishing Company, Amsterdam (1960).
- [43] *Климонтович Ю.Л.* Релятивистское кинетическое уравнения для плазмы. II. - Журн. эксперим. и теорет. физ., **38** (1960) - 1212-1221.
- [44] *Игнатъев Ю.Г.* Дисперсия гравитационных волн в релятивистском газе. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **17** No 12 (1974) - 136-142.
- [45] *Ignat'ev Yu.G.* The propagation of electromagnetic plasma oscillations in the gravitational field. - Acta Phys. Polon. No2, **36** (1975) - 203-223.
- [46] *Игнатъев Ю.Г.* Равновесные состояния релятивистского заряженного газа в рамках общей теории относительности. - Укр. физ. журн., **21** No 12 (1976) - 1970-1977.
- [47] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. - М., Наука (1973).
- [48] *Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.* Gravitation. - W.H. Freeman & Company, San Francisco (1973).
- [49] *Барабаненков Ю.Н., Озрин В.Д., Петрова О.А.* О волновом выводе релятивистского кинетического уравнения для скалярных частиц в заданной метрике. - "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"/Под редакцией Станюковича К.П./М., Атомиздат, вып 7 (1977) - 119-124.
- [50] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистские кинетические уравнения для неупруго взаимодействующих частиц в гравитационном поле. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **26** No 8 (1983) - 19-23.
- [51] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистский канонический формализм и инвариантная одночастичная функция распределения в ОТО. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **26** No 8 (1983) - 15-19.

## Литература

- [52] *Игнатьев Ю.Г.* Релятивистская кинетическая теория и конформные преобразования. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 4 (1982) - 92-96.
- [53] *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. - Наука, М. (1966).
- [54] *Cartan E.* Sur les espaces de Finsler. - Compt. Rend., **196** (1933) - 582.
- [55] *Захаров А.В., Игнатьев Ю.Г.* К методу кинетического уравнения в общей теории относительности. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 13 (1976) - 49-56.
- [56] *Захаров А.В., Игнатьев Ю.Г.* О распространении излучения в плазме, находящейся в гравитационном поле. I. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **19** No 9 (1976) - 57-62.
- [57] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. - Наука, М. (1964).
- [58] *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. - ГИФМЛ, М. (1961).
- [59] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. - Наука, М. (1982).
- [60] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. - Наука, М. (1964).
- [61] *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Релятивистская квантовая теория. Т.1. - Наука, М. (1968).
- [62] *Alvares E.J.* On the transport equations for a one component relativistic gas. - J. Phys. and Math. Gen., **9** (1976) - 1861-1875.
- [63] *Иванов Г.Г.* Уравнение Улинга - Уленбека и квантовая статистика идеальных газов в ОТО. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 14 (1978) - 80-89.
- [64] *Исихира А.* Статистическая физика. - Мир, М. (1973).
- [65] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - Наука, М. (1965).
- [66] *Игнатьев Ю.Г.* Законы сохранения и термодинамическое равновесие в общерелятивистской кинетической теории неупруго взаимодействующих частиц. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **26** No 12 (1983) - 9-14.
- [67] *Иванов Г.Г.* О самогравитирующем скалярном поле с кубической нелинейностью. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **23** No 12 (1980) - 18-22.
- [68] *Bancel D., Choquet-Bruhat Y.* Existence, Uniqueness and Local Stability for the Einstein - Maxwell - Boltzman System. - Commun. Math. Phys., **33** (1973) - 83-96.
- [69] *Игнатьев Ю.Г., Кузеев Р.Р.* Термодинамическое равновесие самогравитирующей плазмы со скалярным взаимодействием. - Укр. физ. журн., **29** No 7 (1984) - 1021-1025.

## Литература

- [70] *Игнатъев Ю.Г.* Равновесные макроскопические движения релятивистского гравитирующего газа заряженных частиц. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 17 (1980) - 56-70.
- [71] *Мухамедов А.М.* О свойствах симметрии заряженной жидкости в ОТО. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **21** No 11 (1978) - 113-117.
- [72] *Захаров А.В., Игнатъев Ю.Г.* О распространении излучения в плазме, находящейся в гравитационном поле. II. Электромагнитные волны в приближении геометрической оптики. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **19** No 9 (1976) - 62-69.
- [73] *Иванов Г.Г., Даишев Р.А.* Макроскопические движения идеального газа и симметрия пространства - времени. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 14-15 (1978) - 74-79.
- [74] *Иванов Г.Г.* Стационарные макроскопические движения релятивистского газа и их связь с симметриями гравитационных полей. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **22** No 6 (1979) - 15-20.
- [75] *Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю.* Столкновительная релаксация плазмы в поле плоской гравитационной волны. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 10 (1982) - 85-89.
- [76] *Игнатъев Ю.Г.* Дисперсия гравитационных волн в релятивистском газе. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 12 (1977) - 73-94.
- [77] *Игнатъев Ю.Г., Фазлеева А.З.* Столкновительное затухание гравитационных волн в ультрарелятивистской плазме. - Укр. физ. журн., **26** No 1 (1981) - 28-38.
- [78] *Bondi H., Pirani F., Robinson I.* Gravitational waves in general relativity. III. Exact plane waves. - Proc. Roy. Soc. A., **251** (1959) - 519-533.
- [79] *Asseo E., Gerbal D., Heyvaev J., Signore M.* General relativistic kinetic theory of waves in a massive particle medium. - Phys. Rev., **13 D** (1976) - 2724-2737.
- [80] *Ignat'ev Yu.G., Zakharov A.V.* The reflection of gravitational waves from compact stars. - Phys. Letters, **66 A** (1978) - 3-4.
- [81] *Gayer S., Kennel C.F.* Possibility of Landau damping of gravitational waves. - Phys. Rev., **19 D** (1979) - 1070-1083.
- [82] *Захаров А.В.* Гравитационные волны в релятивистском газе. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Казань, изд-во КГУ, вып. 16 (1979) - 37-53.
- [83] *Игнатъев Ю.Г.* Бесстолкновительный газ в поле плоской гравитационной волны. - Журн. эксперим. и теорет. физ., **81** (1981) - 3-12.

## Литература

- [84] *Игнатъев Ю.Г., Балакин А.Б.* Нелинейные гравитационные волны в плазме. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **24** No 7 (1981) - 20-24.
- [85] *Балакин А.Б., Игнатъев Ю.Г.* Действие плоских гравитационных волн на бесстолкновительные плазмоподобные среды. - "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"/Под редакцией Станюковича К.П./М., Энергоатомиздат, вып. 14 (1984) - 43-62.
- [86] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. - ГИФМЛ, М.-Л. (1963).
- [87] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистские кинетические уравнения и космология. - "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"/Под редакцией Станюковича К.П./М., Атомиздат, Выпуск 11 (1980) - 113-125.
- [88] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистская кинетика и космология. I. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **23** No 8 (1980) - 42-47.
- [89] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистская кинетика и космология. II. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **23** No 9 (1980) - 27-32.
- [90] *Игнатъев Ю.Г.* Космология, кинетика и масса покоя нейтрино. - "Гравитация и теория относительности"/Под редакцией Кайгородова В.Р./Изд-во КГУ, Казань, Выпуск 18 (1981) - 73-75.
- [91] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М., Физматгиз (1963).
- [92] *Synge J.L.* Geometrical optics in moving dispersive media. - Comm. Dublin Inst. Adv. Stud., **12A** (1956) - 29-43.
- [93] *Игнатъев Ю.Г.* Кинетическое уравнение и массовая поверхность. - Казань, изд-во КГУ, вып. 19 (1980).79-88
- [94] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистская кинетика анизотропной плазмоподобной среды с затуханием в поле гравитационного излучения. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **27** No 12 (1984) - 70-74.
- [95] *Игнатъев Ю.Г.* Резонансная генерация плазменных колебаний плоской гравитационной волной. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **28** No 1 (1985) - 74-77.
- [96] *Игнатъев Ю.Г., Балакин А.Б.* Кинетика бесстолкновительной плазмы в поле плоской гравитационной волны. - Москва, II Всесоюзн. совещ. по избранным проблемам статистической физики. Тез. докл., (1982) - 47-48.
- [97] *Игнатъев Ю.Г.* Действие плоских гравитационных волн на плазмоподобные среды и жидкости. - Киев, Космические исследования на Украине. Тез. докл. Всесоюзн. совещ., **12** (1983) - 65-66.
- [98] *Balakin A.B., Ignat'ev Yu.G.* The effect of gravitational waves at the contact of conductors. - Phys. Letters, **V.96A** (1983) - 10-11.

## Литература

- [99] *Игнатъев Ю.Г.* Магнитоактивная бесстолкновительная плазма в поле длинноволнового гравитационного излучения. - Укр. физ. журн., **29** No 7 (1984) - 1025-1029.
- [100] *Ю.Г.Игнатъев.* Кинетические процессы в релятивистских полях тяготения. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ. - мат. наук. Казань, 1987. (Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ-мат. наук, Минск, (1988)).
- [101] *Балакин А.Б.* О воздействии сильной гравитационной волны на анизотропную плазму. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 9 (1982) - 48-52.
- [102] *Игнатъев Ю.Г., Хуснутдинов Н.Р.* Действие плоских гравитационных волн на однородную магнитоактивную плазму. Укр. физ. журн., **31** No 5 (1986), с. 707-715.
- [103] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М: Высшая школа, 1978. -407 с.
- [104] *Гальцов Д.В., Грац Ю.В., Петухов В.И.* Излучение гравитационных волн электродинамическими системами. - , Москва Изд-во Московского ун-та (1984) - 128.
- [105] *Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю.* Релятивистская кинетика столкновительного затухания гравитационных волн в горячей Вселенной.// В сб. Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной. Казань: Изд-во Казанского пединститута. (1987), с. 84-96.
- [106] *Баранов В.Б., Краснобаев К.В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. - , Москва "Наука" (1977) - 336.
- [107] *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. - , **1** Москва Мир (1978) - 404.
- [108] *Игнатъев Ю.Г.* Движение идеальной жидкости в поле плоской гравитационной волны. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 11 (1982) - 96-99.
- [109] *Игнатъев Ю.Г.* Идеальная жидкость с предельно жестким уравнением состояния в поле плоской гравитационной волны. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 11 (1982) - 99-102.
- [110] *Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю.* Действие гравитационной волны на радиационно-доминированную плазму. - , **1532** Деп. в ВИНТИ (1984) - 2.
- [111] *Игнатъев Ю.Г.* Идеальная жидкость с коротким скалярным взаимодействием в поле плоской гравитационной волны. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **26** No 12 (1983) - 7-9.
- [112] *Игнатъев Ю.Г., Смирнов А.В.* Колебания анизотропной ограниченной плазмы в поле слабой гравитационной волны.// Укр. физ. журн., **31**, (1986), с. 1917-1925.
- [113] *Ю.Г.Игнатъев.* «Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации». Тезисы докладов 8 Российской гравитационной конференции, М, (1993), с. 47.

*Литература*

- [114] Yu. G. Ignat'ev, Excitation of Magnetohydrodynamic Shock Waves by a Gravitational Wave. *Gravitation & Cosmology*, **1**, No 4, (1995), p. 287-300
- [115] Yu.G.Ignat'ev, About on the magnetohydrodynamic shock waves, *Gravitation & Cosmology*, **2**, No. 2,1996, p. 174.
- [116] Yu.G.Ignat'ev, Gravimagnetic shock waves and gravitational -waves experimenttes, *Gravitation & Cosmology*, **2**, No. 4, 1996, p. 167-174.
- [117] Yu.G.Ignat'ev, Gravitational magnetic shocks as a detector of a gravitational waves, *Physics Letters A*. **230**, 1997, p. 171-176.
- [118] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. *Механика*. М: Наука, (1975), 204 с.
- [119] Yu.G.Ignat'ev. Kinetic model of GMSW in an anisotropic plasma. *Gravitation & Cosmology*, **3**, No 4, (1997), p. 254-260.
- [120] Yu.G.Ignat'ev, D.N.Gorokhov. Gravimagnetic shock waves in an anisotropic plasma. *Gravitation & Cosmology*, **3**, No 4, (1997), p. 261-265.
- [121] F.G.Smith, *Pulsars*, Cambridge University Press, Cambridge, (1977).
- [122] Yu.G.Ignat'ev, V.A. Markov. Local GMSW -response of a magnetoactive plasma to the gravitational wave. *Gravitation & Cosmology*, **4**, No. 1, (1998), p. 40-48.
- [123] Yu. G. Ignatyev and A. A. Agafonov. Bremsstrahlung Response of a Homogeneous Magnetoactive Plasma to a Gravitational Wave. *Gravitation and Cosmology*, 2010, Vol. 16, No. 1, pp. 16–24.
- [124] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. - , Москва: Мир (1978) - 496.
- [125] Копвиллем У.Х., Нагибаров В.Н. Письма в ЖЭТФ, **2** (1965), 529.
- [126] K.R.Lang, *Astrophysical Formulae*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York, (1974).
- [127] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., *Теория тяготения и эволюция звезд*. М: Наука, (1971), 484 с.
- [128] Агекян Т.А. *Звезды, галактики и метagalactika*. М: Наука, (1966) 320с.
- [129] Т.А.Лозинская, *Итоги науки и техники, Астрономия*, **22**, Москва, (1988),33 (в России).
- [130] W.D.Langer, A.G.W.Cameron, *Ap.& Spa. Sci.*, **5**, (1969),213.
- [131] S.Tsuruta, A.G.W.Cameron, *Can. J. Phys.*, **43**, (1965),2056.
- [132] С.М.Varma, *Nature*, **267**, (1977),686.

## Литература

- [133] F. Pacini, Nature, **219**,(1968), N5150, 145.
- [134] Агафонов А.А., Игнатъев Ю.Г. Гравимагнитные ударные волны в магнитосферах нейтронных звезд. Труды 2-й Российской школы-семинара по теории гравитации и космологии - «Gracos-2009». Казань-Яльчик: Изд-во «Фолиант», 2009. - с. 16-20.
- [135] Игнатъев Ю.Г. Физические процессы на границе раздела плазмы в сильном гравитационном поле. II. Рождение электронно-позитронных пар. Украинский физический журнал, **24**, No 6, (1979), с. 742-747.
- [136] Игнатъев Ю.Г., Иванов Г.Г. Равновесие и стратификация плазмы в гравитационном поле. Украинский физический журнал, **23**, No 12, (1978), с. 2044-2051.
- [137] Игнатъев Ю.Г. Физические процессы на границе раздела плазмы в сильном гравитационном поле. Тормозное излучение, Украинский физический журнал, **24**, No 5, (1979), с. 646-653.
- [138] Игнатъев Ю.Г. Равновесие магнитоактивной плазмы в гравитационном поле, Украинский физический журнал, **24**, No 11, (1979), с. 1631-1636.
- [139] Игнатъев Ю.Г., Чепкунова Е.Г. Гравимагнитные ударные волны в неоднородной плазме. Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского, **11**,(2001), 120-133.
- [140] Yu.G. Ignat'ev, E.G. Chepkunova. The moving semibounded magnetoactive plasma in field of a plane gravitational wave. Gravitation & Cosmology, **10**, No 4, (2004), p. 123-127.
- [141] Игнатъев Ю.Г., Чепкунова Е.Г. Точное плоско-симметричное нестационарное решение самосогласованных уравнений Эйнштейна -Максвелла для плазмы. Вестник КГПУ, вып. 2, 2004, с. 40-49.
- [142] Yu.G. Ignat'ev, E.G. Chepkunova, Exact plane symmetric non-stationary solution to the Einstein Maxwell equations for a magneto active plasma. Gravitation & Cosmology. **10**, No 3, 2004г p. 1-6.
- [143] *Пилькун Х.* Физика релятивистских частиц. - Мир, М. (1983).
- [144] *Черников Н.А., Шавохина Н.С.* Принцип конформной инвариантности. . - Новейшие проблемы гравитации, Тез. доклал. Всесоюзн. симпозиум, М., (1973) - 40-42.
- [145] *Ehlers I., Geren P., Sachs R. K.* Isotropic solutions of the Einstein - Liouville equations . - J. Math. Phys., **9** (1968) - 1344 - 1361.
- [146] *Игнатъев Ю.Г.* О кинетическом уравнении в общей теории относительности. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **22** No 2 (1979) - 72-76.
- [147] Магалинский В.Б. Кинетика малых возмущений пространственно однородной гравитирующей среды. Астроном. ж., **49**, вып. 5, (1972). с. 1017-1025.

## Литература

- [148] *Игнатъев Ю.Г.* Локальная температура статистической системы в общей теории относительности . - “Гравитация и теория относительности”/Под редакцией Кайгородова В.Р./Изд-во КГУ, Казань, Выпуск 16 (1980) - 73-75.
- [149] *Игнатъев Ю.Г.* Локальная температура неравновесного релятивистского газа в стационарных полях тяготения . - Всесоюзн. научн. конф. по неевклидовой геометрии. Тез. докл. Казань, (1976) - 85.
- [150] *Орлов С.В.* Релятивистское расширение бозе- конденсата. - Проблемы теории гравитации и элементарных частиц , М: Энергоатомиздат, Выпуск 16 (1985) - 119-122.
- [151] *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* Строение и эволюция Вселенной . - , М: Наука, (1975) - 736.
- [152] *Козик В.С, Любимов В.А. Новиков Е.Г., Нозик В.З., Третьяков Е.Ф.* Об оценке массы по спектру  $\beta$  - распада трития в валине.. - , Ядерная физика (1985) - 301-303.
- [153] *Балакин А.Б., Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю.* Кинетика изотропного расширения однородной электронно-фотонной плазмы. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 9 (1982) - 53-57.
- [154] *Брагинский С.Н.* Явления переноса в плазме. - Вопросы теории плазмы , М: Госатомиздат, Выпуск 1 (1963) - 183-272.
- [155] *Балакин А.Б., Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю.* Кинетика изотропного расширения оптически прозрачной плазмы на комптоновской стадии. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **25** No 10 (1982) - 82-85.
- [156] *Компанеев А.С.* Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами . - Журн. эксперим. и терет. физ., **31** (1956) - 876-885.
- [157] *Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю.* Затухание гравитационных волн в ранней Вселенной. - , **1532** Деп. в ВИНТИ (1984) - 10.
- [158] *Yu.G. Ignat'ev, V.Yu. Shulikovskiy* Relativistic kinetics of collisional damping of gravitational waves in a hot Universe. - Gravitation & Cosmology, **12** No 4 (2006) - p. 321-327.
- [159] *Полнарев А.Г.* О возможности бесстолкновительного затухания гравитационных волн . - Релятивистская астрофизика. Космология. Гравитационный эксперимент, Тез. докл. IV Всесоюзн. конф. по гравитации, Минск, (1976) - 74-76.
- [160] *Grishchuk B.P., Polnarev A. G.* Gravitational waves and their interaction with matter and fields. - General Relativity and Gravitation, New York: Plenum Press, ed. A.Meld., **11** (1980) - 393-434.
- [161] *Клоуз Ф.* Кварки и лептоны. Введение в теорию. - , Москва: Мир (1982) - 438.
- [162] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной . - Астроном. журн. , **62** Москва, Выпуск 4 (1985) - 633-638.

## Литература

- [163] *Hawking S.W.* Pertubations of an expending universe. - *Astrophys. Journ.*, **145** (1966) - 544-554.
- [164] Д. Гальцов и Е. Давыдов. // В кн.: Квантовая теория и космология. - Санкт-Петербург: Изд-во Фридмановской лаборатории. - 2009. - С. 25-44.
- [165] Ю.Г. Игнатъев, Р.Ф. Мифтахов. // Труды II –й Российской летней школы «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии». – 2009. – Казань. Изд-во «Фолиантъ». – С. 76-83.
- [166] V.M. Zhuravlev, R.R. Abbyazov. // *Gravitation and Cosmology*, bf 16, No 1, 50, (2010).
- [167] В. М. Журавлев. // *ЖЭТФ*, **120**, 1042, (2001).
- [168] Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov. // *Gravitation & Cosmology*. – 2006. - **12**, No 2-3. – p.179-184; см. также: Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov. // arXiv:1011.5774[gr-qc].
- [169] Ю.Г. Игнатъев. // *Известия вузов, Физика*. - 1982. - № 4. – С. 92-93.
- [170] Ю.Г. Игнатъев. // *Известия вузов, Физика*. - 1983. - № 8. – С. 15-19.
- [171] [8] Ю.Г. Игнатъев. // *Известия вузов, Физика*. - 1983. - № 8. – С. 19-23.
- [172] [9] Ю.Г. Игнатъев. // *Известия вузов, Физика*. - 1983. - № 12. – С. 9-13.
- [173] [10] Г.Г. Иванов. // *Известия вузов, Физика*. - 1983. - № 1. – С. 32-36.
- [174] [11] Yu.G. Ignatev and A.A. Popov. // *Actrophysics and Space Science*. – 1990. – **163**. - p. 153-174; Yu.G. Ignatyev, A.A. Popov. // arXiv:1101.4303v1 [gr-qc].
- [175] К.П. Станюкович и В.Н. Мельников. *Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации*. М: Энергоатомиздат. – 1983.
- [176] [15] Vitaly N. Melnikov. *Fields and Constants in the Theory of Gravitation*. CBPF-MO-002/02, Rio de Janeiro, 2002; <http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf>
- [177] Ю.Г. Игнатъев // *Известия вузов, Физика*. - 2012. – **55**, № 2. – С. 36 – 40.
- [178] Ю.Г. Игнатъев // *Известия Вузов, Физика*, - 2012.- **55**, №5. 2012. – с. 71 – 78.
- [179] Ю.Г. Игнатъев // *Известия Вузов, Физика*, 2012.- **55**, №11. – с. 94 – 97.
- [180] Ю.Г.Игнатъев, Р.Ф.Мифтахов // *Матем. моделирование и краев. задачи*. – 2006. – **4**. – С. 48–51
- [181] Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov // *Grav. and Cosmol.* – 2006, Vol. 12, No. 2 – 3, p.179 – 185.
- [182] Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov // *Grav. and Cosmol.* – 2011, Vol. 17, No. 1, p. 71–75.

Литература

- [183] [26] Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения.// М: ГИФМЛ. – 1963. – 358 с.
- [184] L.V.Okun L.V., Ja.B.Zeldovich, *Comments on Nucl. and Part. Physics* **6**, 69 (1976).
- [185] A.Yu. Ignat'ev, N.V. Krasnikov, V.A. Kusmin, A.N. Tavhelidze, *Phys. Lett* **76B**, 436 (1976).
- [186] *Yoshimura H.* Unified Gauge Theories and the Baryon Number of the Universe . - *Phys. Rev. Let.*, **41** (1978) - 281-284.
- [187] *Weinberg S.* Cosmological Production of Baryons . - *Phys. Rev. Let.*, **42** (1979) - 850-853.
- [188] *Weinberg S.* Beyond the first Three Minuts. - *Physica Scripta*, , **21** (1981) - 773-781.
- [189] *Долгов А.Д., Зельдович Я.Б.* Космология и элементарные частицы . - *Успехи физ. наук*, **130** (1980) - 559-614.
- [190] *J.M. Fry, K.A. Olive, M.S. Turner.* Evolution of cosmological baryon asymmetries. I. The role of gauge bosons. *Phys. Rev.D* **22**, 2953 (1980).
- [191] *Fry J.N., Olive K.A., Turner M.S.* Evolution of cosmological baryon asymmetries. II. The role of Higgs bosons . - *Phys. Rev.D.*, **22** (1980) - 2977-2988.
- [192] *J.M. Fry, K.A. Olive, M.S. Turner.* Hierarchy of cosmological Baryon Generation. *Phys. Rev. Lett* **45**, 2074 (1980).
- [193] *Игнатъев Ю.Г.* Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной . - *Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тез. доклад. Всесоюзн. конф., М.,* (1984) - 19-21.
- [194] Ю.Г. Игнатъев. Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной. *Астрономический журнал*, **62**, 633 (1985).
- [195] Ю.Г. Игнатъев. Кинетическая модель бариогенезиса в симметричной горячей Вселенной. В сб.: «Классические и квантостатистические проблемы релятивистской теории гравитации», Казань: Изд-во КГПУ, 1991, с. 6-21.
- [196] *Yu.G.Ignatyev, K.Alsmadi.* A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. I. Exact model. *Gravitation & Cosmology*, **11** No 3, 252 (2005).
- [197] *Yu.G.Ignatyev, K.Alsmadi.* A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. II. Numerical model. *Gravitation & Cosmology*, **11** No 4, 363 (2005).
- [198] *Yu.G.Ignatyev, K.Alsmadi.* A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. III. Specific Entropy Calculation *Gravitation & Cosmology*, **13** No 2, 114 (2007).

## Литература

- [199] *Игнатъев Ю.Г.* Нарушение термодинамического равновесия в ранней Вселенной . - Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тез. доклад. Всесоюзн. конф., М., (1984) - 18-19.
- [200] *Игнатъев Ю.Г.* Возможность нарушения термодинамического равновесия в горячей Вселенной. - Известия ВУЗов, сер. Физика, **29** No 2 (1986) - 27-32.
- [201] *Смирнов А.В.* В сб.: «Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной», Казань: изд-во КГПИ, 1988, с. 59-61.
- [202] *Игнатъев Ю.Г.* В сб.: «Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной», Казань: изд-во КГПИ, 1988, с. 62-83.
- [203] *Ожунь Л.Б.* Лептоны и кварки. Москва: Наука, (1981), 304 с.
- [204] *M. Froissart.* Phys. Rev., 123, (1961), p. 1053.
- [205] *A. Martin.* Phys. Rev., 129, (1963), p. 1432.
- [206] *A. Martin.* Nuovo. Cim., 142, (1966), p. 930.
- [207] *Y.S. Jin, A. Martin.* Phys. Rev. **B** 135, (1964), p. 1369
- [208] *M. Sugawara.* Phys. Rev. Lett., **14**, (1965), p. 336.
- [209] *R.I. Eden.* High Energy Collisions of Elementary Particles, Cambridge At the University Press, 1967.  
*Русский перевод:* Р. Иден. Соударения элементарных частиц при высоких энергиях. М: Наука, 1970, 392 с.
- [210] *J.D. Bjorken, E.A. Paschos.* Phys. Rev., **185**, (1969), p. 1975.
- [211] *R.P. Feynman.* Phys. Rev. Lett., **23**, (1969), p. 1415.
- [212] *Грицук Л.П.* ЖЭТФ. **67**, (1974), с. 825.
- [213] *Игнатъев Д.Ю., Игнатъев Ю.Г.* Обоснование кинетической модели неравновесной Вселенной. Труды международного семинара «Современные проблемы теории гравитации и космологии — Gracos - 2009», Казань - Яльчик - 2009. Изд-во «Фолиантъ», 2009, с. 59-67.
- [214] *А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий.* Квантовая электродинамика, Москва: Наука, 1969, 624 с..
- [215] *Шуликовский В.Ю.* Влияние процессов множественного рождения частиц на эволюцию неравновесной Вселенной. В сб.: «Классические и квантово - статистические проблемы релятивистской теории гравитации». Казань: Изд-во КГПИ, 1991, с. 39-45.
- [216] *Yu.G. Ignatyev.* Kinetics of the nonequilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition. Gravitation & Cosmology, 13 (2007), No 1, pp. 31-42.

## Литература

- [217] *Yu. G. Ignatyev and D. Yu. Ignatyev*. Kinetics of the nonequilibrium Universe. II. Kinetics of local thermodynamic equilibrium recovery. *Gravitation & Cosmology*, **13**, No 2, (2007), pp. 101-113.
- [218] *Yu. G. Ignatyev and D. Yu. Ignatyev*. Kinetics of a Non-Equilibrium Universe. III. Stability of the Non-Equilibrium Scenario. *Gravitation and Cosmology*, **14**, No. 4, 2008, pp. 309-313.
- [219] *Yu. G. Ignatyev and R. A. Ziatdinov*. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles in the expanding Universe. *Gravitation & Cosmology*, **12**, No 4, (2006), p. 289-298.
- [220] *Yu. G. Ignatyev and R. A. Ziatdinov*. Diffuzion model of evolution of superthermal high-energy particles under scalling in the early universe. II. Evolution at the Early Stages of Universe Expanation. *Gravitation & Cosmology*, Vol. 14 (2008), No 4, pp. 291-298.
- [221] Игнатъев Ю.Г., Зиятдинов Р.А. Асимптотическое приближение модели Фоккера - Планка космологической эволюции сверхтепловых ультрарелятивистских частиц при наличии скейлинга взаимодействий. *Известия ВУЗов, Физика*, 2008, **41**, No 9, с. 67-76.
- [222] Соболев С.Л. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1966, 444 с.
- [223] Евграфов М.А. Аналитические функции, М: Наука, 1991, 326 с.
- [224] *Климонтович Ю.Л.* Релятивистское уравнение для квантовой функции распределения . - Докл. Акад. Наук СССР, **87** No6 (1952) - 927-930.
- [225] *Сильин В.П.* К теории электромагнитных флуктуаций . - Журн. эксперим. и теорет. физ., **41** (1961) - 969-978.
- [226] *Игнатъев Ю.Г.* О статистической динамике ансамбля гравитирующих заряженных частиц в ОТО . - Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тез. доклал. Всесоюзн. конф., Минск., (1976) - 148-151.
- [227] *Tauber G. E., Weinberg J. W.* Internal state of a graviting gas. - *Phys. Rev.*, **122** 4 (1961) - 1342-1365.
- [228] *Игнатъев Ю.Г.* Вывод кинетических уравнений из общерелятивистской цепочки Боголюбова . - Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тез. доклал. Всесоюзн. конф., Минск., (1976) - 146-148.
- [229] *Benard A.* On Bogolubovs kinetic equation for a spetieally homogeneous plasma . - *Ann. Phys.*, **3** (1960) - 390-405.
- [230] *Balescu R.* Irreversible processes in ionized gases . - *Phys. of Fluid*, **3** (1960) - 52-67.

## Литература

- [231] *Балеску Р.* Статистическая механика заряженных частиц. - , Москва “Мир” (1967) - 512.
- [232] *Игнатъев Ю.Г.* Теория возмущений гравитационного поля. - “Гравитация и теория относительности”/Под редакцией Кайгородова В.Р.//Изд-во КГУ, Казань, Выпуск 11 (1976) - 195-201.
- [233] *Isaakson R.A.* Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. Linear Approximation and Geometrical optics. - Phys. Rev., **166** (1968) - 1263-1271.
- [234] *Isaakson R.A.* Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor. - Phys. Rev., **166** (1968) - 1272-1281.
- [235] *Бисноватый-Коган Г.С., Шухман Н.Г.* Столкновения частиц в расширяющейся Вселенной. - Журн. эксперим. и теор. физ., **82** вып.1 (1982) - 3-8.
- [236] *Ландау Л.Д.* Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия. - Журн. эксперим. и теор. физ., **7** (1937) - 203-209.
- [237] *Kandrup H.V.* Correlation dynamics in an expanding newtonian cosmology: the derivation of an exact equation. - Astrophys. Journ., **259** (1982) - 1-8.
- [238] *Захаров А.В.* Интеграл столкновений в мире Фридмана. - Журн. эксперим. и теор. физ., **86**, вып.1 (1984) - 3-12.
- [239] *Игнатъев Ю.Г., Попов А.А.* Кинетические уравнения для ультррелятивистских частиц в мире Фридмана и изотропизация реликтового излучения гравитационными взаимодействиями. «Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной», Казань: Изд-во КГПИ, 1988, с. 5-16.
- [240] *Игнатъев Ю.Г., Попов А.А.* О статистическом описании ансамбля ультррелятивистских частиц в пространственно - плоской Вселенной, Известия ВУЗов, Физика, **31**, No 5 (1989) с. 82-87.
- [241] *Yu.G. Ignat'ev, A.A. Popov.* Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universe and isotropization of relict radiation by gravitational interactions, Actrophysics and Space Science, **163**, (1990), p. 153-174.
- [242] *Yu.G. Ignat'ev, A.A. Popov.* Spherically symmetric perturbation of a ultrarelativistic fluid in a homogeneous and isotropic universe. Physics Letters **A. 220**, (1996), p. 22-29.
- [243] *Игнатъев Ю.Г., Эльмахи Н.* Динамическая модель сферических возмущений во вселенной Фридмана. I. Известия Вузов, Физика, **41** No 1, (2008), с. 66-76.
- [244] *Игнатъев Ю.Г., Эльмахи Н.* Динамическая модель сферических возмущений во вселенной Фридмана. II. Запаздывающие решения для ультррелятивистского уравнения состояния. Известия ВУЗов, Физика, **41**, No 7, (2008), с. 69-76.

## Литература

- [245] *Игнат'ев Ю.Г., Эльмахи Н.* Динамическая модель сферических возмущений во вселенной Фрийдмана. III. Автомодельные решения. Известия ВУЗов, Физика, **41**, No 10, (2008), с. 72-80.
- [246] *Зельдович Я.Б.* Структура Вселенной. - Итоги науки и техники. Астрономия, М. ВИНТИ , **22** (1983) - 4 - 32.
- [247] *Yu.G.Ignatyev, K.Alsmadi* A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. I. Exact model.. - Gravitation & Cosmology, **11** No 3 (2005) - pp. 252-258.
- [248] Steven Weinberg. Cosmology, Oxford University Press, 2008.
- [249] H.M. Pilkuhn. *Relativistic Particle Physics*, Springer-Verlag, New York Inc, 1979.
- [250] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **25** No 4, 92 (1982)
- [251] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **29**, No 2, 19 (1986).
- [252] L.B. Okun, *Leptons and quarks*, North-Holland, Amsterdam · Oxford · New-York · Tokyo, 1981.
- [253] L.D. Landau, *J.Sov.Phys. (JETP)*, **10**, 718 (1940).
- [254] M. Froissart, *Phys. Rev.*, 123, 1053 (1961)
- [255] A. Martin, *Phys. Rev.*, 129, 1432 (1963)
- [256] A. Martin, *Nuovo. Cim.*, 142, 930 (1966)
- [257] Y.S. Jin, A. Martin, *Phys. Rev.B* 135, 1369 (1964)
- [258] M. Sugawara, *Phys. Rev. Lett.*, 14, 336 (1965)
- [259] R.I. Eden, High Energy Collisions of Elementary Particles, Cambridge At the University Press, 1967
- [260] J.D. Bjorken, E.A. Paschos, *Phys. Rev.*, 185, 1975 (1969)
- [261] R.P. Feynman, *Phys. Rev. Lett.*, 23, 1415 (1969)
- [262] N. Cabibo, G. Parivisi, M. Tesla, *Lett. Nuovo. Cimento*, 35, 4. (1970)
- [263] L.P. Gritchuk, J. Sov. Phys. (JETP), 67, 825 (1974).
- [264] UACS Yu.G. Ignat'ev, *in: "Actual theoretical and experimantal problems of relativity theory and gravitation"*, Report of Soviet conference, Moscow, 1984 (in Russian).
- [265] Yu.G. Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 1 (49), pp. 1-14.
- [266] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **23** No 8, 42 (1980).

*Литература*

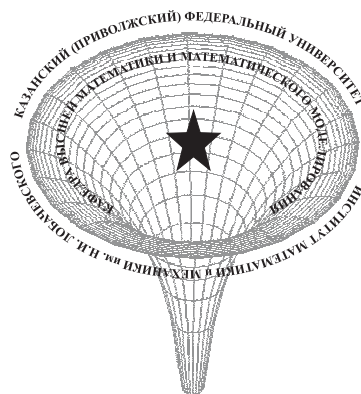
- [267] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **23** No 9, 27 (1980).
- [268] Yu.G. Ignatyev, *in*: Problems of Gravitation Theory and Elementary Particles, Moskow, Atomizdat, No 11, 113 (1980).
- [Ignat'ev, (1983)] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **26**, No 8, 19 (1983).
- [269] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **26** No 12 9 (1983)
- [270] Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 2 (50), pp. 101-113
- [271] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1980.
- [272] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971
- [273] Yurii Ignatyev, arXiv:1306.3633v1 [gr-qc] 13 June 2013; Yu.G. Ignatyev, Grav. and Cosmol., to be publish in vol. 19, No 4, 2013.



Набор монографии осуществлен в издательском пакете  
LaTeX2 $\epsilon$  в научно-исследовательской лаборатории  
«Информационных технологий в математическом  
образовании» КФУ.

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления -  
Ю.Г.Игнатъев

Техническая редакция, набор и верстка: Ю.Г.Игнатъев,  
В.И.Ковтун.



Оформление обложки - А.А. Агафонов.

Объем монографии 316 страниц, в монографии содержатся  
49 иллюстрации, 2 таблицы. Библиография:

273 наименования.

Подписано в печать 5.08.13.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60×84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ.  
л. 18,4

Уч.-изд. л. 19,8. Тираж 126 экз. Заказ 103/7

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37  
тел. (843) 233-73-59, 292-65-60