

А. М. Баранов

СВЕТОПОДОБНЫЕ
ИСТОЧНИКИ
В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

монография

институт инженерной физики и радиоэлектроники



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

А. М. Баранов

**СВЕТОПОДОБНЫЕ
ИСТОЧНИКИ
В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Монография

Красноярск
СФУ
2011

УДК 530.12
ББК 22.313
Б24

Р е ц е н з е н т ы: С. В. Сушков, доктор физ.-мат. наук, профессор;
И. Р. Мубаракшин, кандидат физ.-мат. наук, доцент

Баранов, А. М.

Б24 Светоподобные источники в общей теории относительности:
монография / А. М. Баранов. – Красноярск : Сибирский федеральный
университет, 2011. – 112 с.
ISBN 978-5-7638-2077-5

Монография посвящена введению в общую теорию относительности светоподобного предела, когда скорость частицы устремляется к скорости света, а ее масса покоя при этом исчезает. Такая процедура, примененная к частицеподобным решениям уравнений Эйнштейна, приводит к светоподобным источникам: скалярным частицам – лайтонам (*lightons*) и частицам со спиральностью – геликсонам (*helixons*). Рассмотренный предельный переход представляет собой фазовый гравитационный переход второго рода алгебраического типа **D** в волновые типы **N** или **III**. Алгебраические типы Петрова суть различные «фазы» поля тяготения. Из таких светоподобных источников могут быть сконструированы бесконечная светоподобная нить без спиральности и луч со спиральностью. Показано, что в общей теории относительности у светоподобных источников **«нет волос»**.

Монография будет полезна специалистам в области общей теории относительности и гравитации, аспирантам и студентам, специализирующимся по теоретической физике.

УДК 530.12
ББК 22.313

ISBN 978-5-7638-2077-5

© Сибирский федеральный
университет, 2011

The Ministry of Education and Science of the Russian Federation
Siberian Federal University

A. M. Baranov

**LIGHTLIKE SOURCES
IN GENERAL RELATIVITY**

Monograph

Krasnoyarsk
SibFU
2011

UDK 530.12
BBK 22.313
B24

Reviewers: S. V. Sushkov, the doctor of phys. & math. sciences, professor; .
I. R. Mubarakshin, the candidate of phys. & math. sciences, docent

Baranov, A. M.

B24 Lightlike Sources in General Relativity : monograph / A. M. Baranov. –
Krasnoyarsk : Siberian Federal University, 2011. – 112 p.
ISBN 978-57638-2077-5

The monograph is devoted to an introduction of a lightlike limit in general relativity when velocity of a particle aims for a velocity of light, and its rest mass disappears. This procedure is applied to the particlelike solutions of Einstein's equations and leads to lightlike sources: to scalar particles – ***lightons*** and to particles with a helicity – ***helixons***. Such limit transition is a phase gravitational transition of the second kind of algebraic type ***D*** in the wave types ***N*** or ***III***. The Petrov algebraic types are various «phases» of a gravitational field. An lightlike pencil can be constructed from such lightlike sources. It is shown that in general relativity the lightlike sources «have not hairs».

The monograph will be useful to experts in the field of general relativity and gravitation, to post-graduate students and the students, specialising on theoretical physics.

UDK 530.12
BBK 22.313

ISBN 978-57638-2077-5

© Siberian Federal
University, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
Глава 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ	
ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.....	11
1.1. Принцип эквивалентности Галилея-Эйнштейна.....	11
1.2. Арифметизация пространства.....	14
1.3. Введение метрики.....	16
1.4. Тетрадный формализм и дифференциальные формы.....	18
1.5. Уравнения Эйнштейна	23
Глава 2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕТРОВА	
ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ.....	27
2.1. Алгебраическая классификация пространства-времени.....	27
2.2. Алгебраическая классификация гравитационных полей	
и системы отсчета.....	34
Глава 3. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КАТАСТРОФ.....	36
3.1. Элементарная теория катастроф.....	36
3.2. Теория катастроф, алгебраическая классификация пространств	
и фазовые переходы в гравитационном поле.....	50
Глава 4. ФОРМУЛА ГАУССА-БОННЕ	
В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.....	56
4.1. Пространство-время и введение формулы Гаусса-Бонне.....	56
4.2. Общая схема исследований с помощью формулы Гаусса-Бонне.....	63
Глава 5. СВЕТОПОДОБНЫЕ ИСТОЧНИКИ.....	65
5.1. О проблеме светоподобных источников в электродинамике	
и общей теории относительности.....	65
5.2. Светоподобный предел массивной шварцшильдоподобной частицы	
на уровне матрицы Вейля.....	66
5.3. Светоподобный предел в электродинамике.....	71
5.4. Светоподобный предел метрики Шварцшильда.....	73
5.5. Светоподобный предел метрики НУТ.....	77
5.6. Светоподобный предел метрики Керра.....	80
5.7. Светоподобный предел массивной частицы Шварцшильда	
на уровне матрицы Вейля как катастрофа.....	85
5.8. Светоподобный предел массивной НУТ частицы	
на уровне матрицы Вейля как катастрофа.....	88
5.9. Светоподобный предел массивной частицы Керра	
на уровне матрицы Вейля как катастрофа.....	90
5.10. Светоподобные источники не имеют «волос».....	92
Глава 6. СВЕТОПОДОБНАЯ НИТЬ В ОТО.....	94
6.1. Конструирование монохроматической светоподобной нити	
из точечных светоподобных источников.....	94
6.2. Обобщение монохроматической светоподобной нити.....	97
6.3. Формула Гаусса-Бонне и топология поля светоподобной нити.....	99
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	103
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	106

LIGHTLIKE SOURCES IN GENERAL RELATIVITY CONTENTS

INTRODUCTION.....	7
Chapter 1. THE BASIC INFORMATIONS FROM GENERAL RELATIVITY.....	11
1.1. Principle of equivalence of Galilei-Einstein.....	11
1.2. Arithmetization of space.....	14
1.3. Metric introduction.....	16
1.4. Tetrad formalism and differential forms.....	18
1.5. Einstein's equations.....	23
Chapter 2. PETROV'S ALGEBRAIC CLASSIFICATION OF GRAVITATIONAL FIELDS.....	27
2.1. Algebraic classification of space-time.....	27
2.2. Algebraic classification of gravitational fields and a frame of reference	34
Chapter 3. INTRODUCTION IN THE THEORY OF CATASTROPHES.....	36
3.1. The elementary theory of catastrophes.....	36
3.2. The theory of catastrophes, algebraic classification of spaces and phase transitions in a gravitational field.....	50
Chapter 4. THE FORMULA OF GAUSS-BONNET IN GENERAL RELATIVITY	56
4.1. Space-time and the formula of Gauss-Bonnet.....	56
4.2. The general plan of investigations by means of the formula of Gauss-Bonnet.....	63
Chapter 5. LIGHTLIKE SOURCES.....	65
5.1. On a problem lightlike sources in an electrodynamics and General Relativity.....	65
5.2. Lightlike limit of massive schwarzschildlike particle on Weyl's matrix level.....	66
5.3. Lightlike limit in an electrodynamics.....	71
5.4. Lightlike limit of Schwarzschild's metric.....	73
5.5. Lightlike limit of NUT's metric.....	77
5.6. Lightlike limit of Kerr's metric.....	80
5.7. Lightlike limit of massive Schwarzschild particle on Weyl's matrix level as catastrophe.....	85
5.8. Lightlike limit of massive NUT particle on Weyl's matrix level as catastrophe.....	88
5.9. Lightlike limit of massive Kerr particle on Weyl's matrix level as catastrophe.....	90
5.10. Lightlike sources «have no hair».....	92
Chapter 6. LIGHTLIKE PENCIL IN GENERAL RELATIVITY.....	94
6.1. Construction of monochromatic lightlike pencil from the lightlike point sources.....	94
6.2. Generalisation of monochromatic lightlike pencil.....	97
6.3. The formula of Gauss-Bonnet and field topology of the lightlike pencil	99
SUMMARY.....	103
LIST OF LITERATURE.....	106

ВВЕДЕНИЕ

Данная монография посвящена исследованию светоподобного предела (при исчезновении массы покоя) для известных точных решений уравнений Эйнштейна. Эта сторона исследований в рамках общей теории относительности (ОТО) связана с поиском и конструированием новых решений уравнений тяготения. Одним из подходов к решению этой проблемы оказывается использование готовых точных частицеподобных решений в ОТО с последующим их «разгоном» до световой скорости при одновременном исчезновении массы покоя. Данная процедура приводит к точным светоподобным решениям уравнений Эйнштейна со светоподобным источником.

Исследования на конкретных решениях указывают на то, что при таком предельном переходе к светоподобным источникам «сбрасываются» все параметры, кроме полной энергии и момента импульса, который приобретает на классическом уровне свойство спиральности (как у фотона), т. е. аналогично черным дырам светоподобные источники не имеют «волос». Получаемые при этом светоподобные частицы оказываются двух сортов: скалярные и векторные. Поэтому они и были названы как лайтоны и геликсоны.

Такое исследование тесно связано с алгебраической классификацией Петрова гравитационных полей (алгебраическая классификация пространств), применением теории катастроф (как обобщенной теории фазовых переходов) и теоремы Гаусса-Бонне к топологическому исследованию пространств и решений уравнений тяготения.

В последние десятилетия наряду с развитием новых направлений в ортодоксальной релятивистской теории тяготения Эйнштейна [1] наблюдается слияние ОТО с другими разделами теоретической физики: теорией элементарных частиц, теорией фазовых переходов, квантовой теорией поля и т. д.

В связи с этим классификация пространств по Петрову [2–5] остается мощным методом изучения гравитационных полей. В работах Пирани [6–7], Секереша [8] на основе анализа уравнения геодезических для пробных частиц предложена физическая интерпретация типов Петрова, что позволяет наполнить физическим содержанием, в частности, и алгебраические критерии гравитационного излучения (см., например, [9]).

Кроме того, классификация пространств оказывается полезной при конструировании и интерпретации новых решений уравнений Эйнштейна.

Так, например, Дебеве и Саксом [10–11] было показано, что каждому типу пространства-времени соответствуют определенные светоподобные

векторные поля. Эти результаты позволили получить новые решения с использованием известной метрики Керра-Шилда.

Реальное гравитационное поле с точки зрения алгебраической классификации Петрова представляет собой своеобразную «смесь» канонических типов гравитационных полей. На это, к примеру, указывает теорема Сакса [12], справедливая асимптотически для островных источников. Поэтому требуются дополнительные исследования как самой классификации Петрова (в частности, в связи с теорией катастроф [13]), так и рассмотрение наложения полей различных алгебраических типов, как с учетом приближения слабого поля, так и их взаимодействия, что проведено в работах [14–19]. При этом наложение пространств определяется как наложение на уровне тензоров Вейля с согласованными каноническими базисами.

В целом материал распределился по шести главам следующим образом.

В **главе 1** излагается математический формализм и инструментарий общей теории относительности, применяемый в дальнейшем. Здесь вводится тетрадный формализм и метод дифференциальных форм в ОТО.

Алгебраической классификации Петрова гравитационных полей и доказательству теоремы Петрова об основных типах гравитационных полей (включая физическую интерпретацию) посвящена **глава 2**.

Элементарное введение в теорию катастроф дается в **главе 3**. Сюда же включены исследования алгебраической классификации гравитационного поля с точки зрения теории катастроф как обобщенной теории фазовых переходов. В главе показывается, что переходы между алгебраическими типами пространств суть фазовые переходы гравитационного поля.

В **главе 4** выводится формула Гаусса-Бонне для двумерных сечений пространства-времени, связывающая топологические и дифференциальные свойства этих сечений. Приводится общая схема исследования в ОТО с помощью этой формулы.

Светоподобные источники, полученные в результате предельного перехода от массивных частиц, когда скорости последних устремляются к скорости света при одновременном стремлении собственной массы источника к нулю, рассматриваются в **главе 5**. Такой светоподобный предел применен к ряду известных частицеподобных решений: Шварцшильда, Керра, НУТ. Введены понятия о лайтонах и геликсонах как светоподобных частицах, полученных с помощью упомянутой выше процедуры [20–21]. Формулируется утверждение об отсутствии у светоподобных источников «волос».

В последней **главе 6** из сингулярных светоподобных источников конструируются светоподобная монохроматическая нить и ее обобщение. Исследуются свойства такой светоподобной нити, а также топология поля этой нити с помощью теоремы Гаусса-Бонне.

В завершение книги приводится небольшое **Заключение** и список литературы.

INTRODUCTION

The present monography is devoted to an investigation of a lightlike limit (at rest mass vanishing) for well-known exact particlelike solutions of the Einstein equations. This side of a research within the frame of General Relativity (GR) is connected with a search and a construction of new solutions of the gravitational equations.

The use of the ready exact particlelike solutions in GR and of the lightlike limit together with the simultaneous vanishing of the rest masses of these particles is one of approaches to the solution of this problem. This procedure leads to the exact lightlike solutions of the Einstein equations with the lightlike source.

The investigations on concrete solutions point out that at such cross-over to the lightlike limit all physical parameters «fall away» except for the total energy and the angular momentum which gets a property of a helicity on the classical level (as at a photon). Thus the lightlike sources have «no hairs» the same as at the black holes.

The lightlike particles are found of two kinds: the scalar particle and the vector particle. Therefore they have been termed as ***lightons*** and ***helixons*** accordingly.

Such research is closely connected with Petrov's algebraic classification of gravitational fields (the algebraic classification of spaces), with an application of the theory of catastrophes (as a generalized theory of phase transitions) and of the Gauss-Bonnet theorem to the topological investigation of spaces and solutions of the gravitational equations.

The integrating of GR with other sections of theoretical physics: the theory of fundamental particles, the theory of phase transitions, a quantum theory of field and etc., along with development of new research directions in the orthodox relativistic theory of the Einstein gravitation [1] has been observed in the last decades

Thereby the Petrov classification of spaces [2–5] remains a high-power method of the gravitational fields study. The physical interpretation of Petrov's types is offered in articles of Pirani [6–7] and Szekeres [8] on the base of an analysis of the geodesic equation for the test particles. It is allows to fill the algebraic criteria of the gravitational radiation by physical meaning (see, for example [9]).

Additionally the algebraic classification of spaces is useful at a construction and an interpretation of new solutions of the Einstein equations

So, for example, Debeyer and Sachs [10–11] demonstrated that the concrete lightlike vector fields correspond to each type of space-time. With helping of these results new solutions were found with using of the well known metric of Kerr-Schild.

The real gravitational field is a «commixture» of canonical types of gravitational fields with the point of view of Petrov's algebraic classification. The Sachs

theorem [12] points to it, for example. This theorem is asymptotically true for the solitary sources. Therefore the additional investigations of the itself Petrov's classification (particularly in connection with the catastrophe theory [13]) and the consideration of a field superposition of the different algebraic types must be done. Such consideration was carried out both in an approximation of weak field and their interaction in papers [14–19]. In this case the superposition of spaces is determined as the superposition on the level of Weyl's matrixes with co-ordinated canonic frame of basic vectors. In this case the superposition of spaces is determined as the superposition on the level of Weyl's matrixes with the coordinated canonic frame of basic vectors.

Generally all materials were distributed between the six chapters in the following way.

In **chapter 1** it is said about the mathematical formalism and the toolkit which are applied in general relativity further. A tetrad formalism and a method of the differential forms in GR are also introduced here.

Chapter 2 is devoted to Petrov's algebraic classification of gravitational fields and to the proof of the Petrov theorem about the basic types of gravitational fields (including their physical interpretation)

In **Chapter 2** Petrov's algebraic classification of gravitational fields and the proof of the Petrov theorem about the basic types of gravitational fields (including their physical interpretation) are considered.

An elementary introduction in the catastrophe theory is given in **Chapter 3**. The researches of the algebraic classification of gravitational field with the point of view of the catastrophe theory as a general theory of the phase transitions are included in this chapter. In this chapter it is shown that the transitions between algebraic types of spaces are the phase transition of gravitational field.

In **Chapter 4** the Gauss-Bonnet formula is derived. This formula is true for two-dimensional sections of space-time and connects the topological and differential properties of these sections. There is a general plan of research in General Relativity with help of this formula.

The definition of the lightlike limit is input in **Chapter 5**. Lightlike sources are found as a result of such limit when particlelike sources with a rest mass aim for lightlike sources with a zero rest mass and a velocity of light. Such lightlike limit is applied to the set of the well-known particlelike solutions of the Einstein equations: Schwarzschild, Kerr and NUT. A conception about the lightons and helixons as the lightlike particles is input with help of the lightlike limiting procedure [20–21]. A statement about an absence of «hairs» at lightlike sources is formulated.

In the last chapter, **Chapter 6**, the lightlike monochromatic pencil and its generalization are constructed from the singular lightlike sources. There are researched the properties of such lightlike pencil and the topology of the pencil gravitational field with a help of the Gauss-Bonnet theorem.

In close of the book there are small **Summary** and a list of **Literature**

Г л а в а 1

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1.1. Принцип эквивалентности Галилея-Эйнштейна

«... Мне еще не удалось вывести из явлений причину этих свойств тяготения, а я гипотез не изобретаю... Достаточно того, что тяготение существует...»

И. Ньютон

Аристотель (384–322 до н.э.) в своих трудах «Физика» и «О небе» [22] попытался впервые проклассифицировать движения тел, разделив их на «естественные» и «насильственные»¹, и ввести в физику понятие о силе как первопричине движения тел. Несмотря на то, что он поставил ряд интересных проблем о соотношении между движением, материей, пространством и временем, ему не удалось четко сформулировать, в частности, понятие инерциального движения. Кроме того, Аристотель заблуждался и по поводу соотношения между величиной действующей силы на тело и временем движения этого тела, считая, например, что оно под действием удвоенной силы проходит тот же путь за половинное время.²

Лишь Г. Галилею удалось экспериментально доказать, что все тела вблизи поверхности Земли падают одинаково быстро и скорость падения не зависит от веса тела.³ Он первым четко сформулировал понятие ускорения и инерциального движения, которому И. Ньютон придал форму 1-го

¹ Такое разделение связано с отсутствием знаний о существовании силовых полей: «Невозможно, однако, двигать что-либо или от себя к другому, или от другого к себе без соприкосновения; так что ясно, что между движимым с места на место и движущим нет ничего в промежутке» [22. С.209–210].

² Аристотелю была хорошо известна пропорция, но, не имея экспериментального материала, он применил ее не к тем величинам. Галилей решил эту проблему [23. С.75].

³ Г. Галилею приписывают опыты по сбрасыванию различных тел с наклонной Пизанской башни. На самом же деле он проводил эквивалентные эксперименты с катящимися по наклонной плоскости шарами [24].

закона механики, исключив из галилеевского определения прямое указание на то, что такое движение справедливо в плоском пространстве.⁴

С первым законом Ньютона связан принцип относительности, сформулированный Г. Галилеем (1564–1642), который предполагает существование так называемых инерциальных систем отсчета (ИСО), обладающих следующими свойствами: а) все механические законы природы во все моменты времени одинаковы во всех инерциальных системах отсчета; б) все системы отсчета, движущиеся относительно ИСО равномерно и прямолинейно, инерциальны. Понятие ИСО вместе с перечисленными свойствами а) и б) как раз и составляют суть принципа относительности Галилея.

Введем определение произвольной системы отсчета (СО): **система материальных тел, по отношению к которой рассматривается положение данного тела или материальной точки. Эта система тел снабжена пространственным масштабом (эталонной линейкой) и временным эталоном (идеальными часами).** Положение тела относительно СО задается четырьмя числами: тремя пространственными координатами и одной временной координатой, т. е. с СО связывается система координат (СК).

Остановимся на вопросе об опытном определении ИСО. Если использовать определение ИСО (ее еще называют галилеевой СО), данное Р. Ланге в конце XIX в. и П. Бриджменом в 60-х гг. прошлого столетия, то можно опытным путем определить инерциальность системы отсчета. Пусть нам дано некоторое тело отсчета. Введем в СО три ортогональных направления, задав их с помощью 3-х взаимно ортогональных жестких стержней (спиц как аналогов декартовых координатных осей). Теперь воспользуемся определением Ланге [25. С.154]: «Инерциальной системой называется такая система координат (следует понимать «система отсчета» – А.Б.), в которой сходящиеся в одной точке траектории трех массивных точек, выброшенных одновременно из одной и той же точки пространства и предоставленных потом самим себе, все прямолинейны (эти три точки не должны лежать на одной прямой)».

Такое определение ИСО может служить мысленным критерием инерциальности системы отсчета. Например, земные лаборатории, строго говоря, не образуют ИСО, и только при определенных приближениях их можно считать таковыми. Кроме того, приведенный выше «экспериментальный» критерий инерциальности системы отсчета – прямолинейное движение материальных частиц, может быть справедлив глобально лишь для евклидового пространства (плоского), в противном случае должны быть указаны ограничения применимости такого критерия.

⁴ До XIX века не существовало непротиворечивых неевклидовых геометрий с отличной от нуля кривизной. Приоритет построения одной из таких геометрий (1826) принадлежит русскому математику Н.В.Лобачевскому (1792–1856).

На рис. 1 изображен физический аналог декартовой системы координат, связанной с телом отсчета: в некоторое тело, считающееся телом отсчета, воткнуты ортогонально друг к другу три спицы, изображающие оси декартовых координат.

В связи с этим остановимся коротко на принципе эквивалентности Галилея-Эйнштейна. Открытый Г. Галилеем принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс⁵ проверялся неоднократно как самим И. Ньютоном⁶ (см., например, [6. С.21]), так и другими исследователями⁷. Из этого принципа следует, что силы тяготения пропорциональны инертной массе тела, так же как и силы инерции. Это обстоятельство навело А. Эйнштейна (1879–1955) на мысль, что существует тесная связь между силами тяготения и силами инерции, и в некоторых случаях невозможно их различить (принцип эквивалентности Эйнштейна (1907))⁸ [1]. Обычно этот принцип иллюстрируется на примере лифта, в который помещен наблюдатель с пружинным динамометром.

Рассмотрим две ситуации. Пусть сначала лифт покоятся в однородном статическом гравитационном поле напряженности g . Наблюдатель, подвесив к динамометру некоторое тело, фиксирует наличие в кабине силового поля по растяжению пружины. Если же лифт находится в области, свободной от внешних гравитационных сил, он равноускоренно движется⁹ с ускорением g под действием сил негравитационного происхождения.

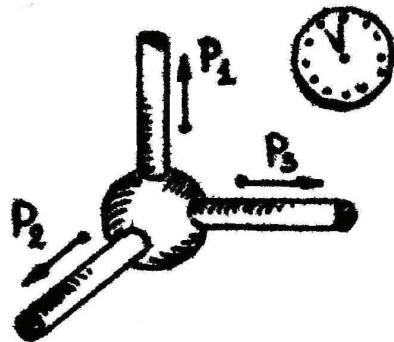


Рис. 1

⁵ Учет факта падения тела с одинаковым ускорением и открытый И. Ньютоном закон всемирного тяготения позволяют получить это утверждение из 2-го закона механики [23. С.75].

⁶ И. Ньютон провел очень изящный эксперимент, позволивший выяснить, что период маятника не зависит от природы груза (точность 10^{-2}).

⁷ Р. Этвеш (Венгрия, 1848–1919) в 1889–1908 гг. осуществил серию экспериментов по проверке равенства гравитационной и инертной масс, которые показали, что такое равенство выполняется с точностью до $5 \cdot 10^{-9}$ [26–27]. Аналогично серию экспериментов в 1959–1963 гг. в США выполнил Р. Дикке (1916) с сотрудниками (точность составила 10^{-11}) [26]. В СССР В.Б. Брагинскому с сотрудниками в 1969 г. удалось увеличить точность до 10^{-12} [28].

⁸ Этот принцип сыграл фундаментальную эвристическую роль при создании общей теории относительности (1915).

⁹ В релятивистской механике равноускоренным движением называют такое движение, при котором в сопутствующей ускоренному телу системе отсчета наблюдатель фиксирует постоянное во времени силовое поле [1. Т. 1, ст. 8].

В кабине возникает однородное поле сил инерции с напряженностью, по величине равной g , и наблюдатель обнаруживает то же самое растяжение пружины, что и в предыдущем случае. Это означает, что, находясь в замкнутой лаборатории, наблюдатель опытным путем не сможет отличить, находится ли он в статическом однородном гравитационном поле или движется равноускоренно. Таким образом, если теперь лифт будет свободно падать в однородном статическом гравитационном поле, то поле сил инерции скомпенсирует силовое воздействие гравитационного поля и наблюдатель отметит наличие невесомости, а проведенные им опыты в своей системе отсчета позволят считать ее инерциальной.

Однако из-за неоднородности реальных гравитационных полей свободно падающую систему отсчета нельзя неограниченно продолжить на все пространство и на все моменты времени. Описанная выше компенсация гравитационного поля полем ускорения возможна лишь в локальной области для ограниченных промежутков времени¹⁰, т. е. в локально падающей (локально инерциальной) системе отсчета¹¹. Следовательно, несмотря на то, что на протяжении всей истории физики пользовались преимущественно инерциальными системами отсчета, при учете реальных гравитационных полей необходимо отказаться от их прежней роли, заменив локально падающими системами отсчета¹².

В этой связи необходимо отметить и то, что 1-й закон механики при условии выбора локально инерциальной системы отсчета остается справедливым и при наличии неоднородных гравитационных полей.

1.2. Арифметизация пространства

Существует еще один вопрос, требующий пояснения. Это вопрос о системе координат, связанной с данной системой отсчета и позволяющей численно описать движения других тел. Введение системы координат определяется процессом арифметизации пространства, т. е. установлением правила отличия одних точек пространства от других (маркировка точек). Таким правилом является сопоставление каждой точке, например нашего

¹⁰ При больших размерах кабин рассмотренного выше лифта будут наблюдаться приливные эффекты, т. е. возникнет разность между силами, действующими на пол и на потолок кабины при свободном падении в неоднородном гравитационном поле, и, значит, возникнут растягивающее (вдоль) и сжимающее (поперек) кабину усилия и тем больше, чем больше неоднородность поля.

¹¹ Выбор локально падающей системы отсчета (физический подход) эквивалентен тому, что мы работаем в локальной области касательного пространства нашего искривленного мира (геометрический подход).

¹² Обсуждение этого вопроса можно найти, например, в [29–30].

(трехмерного) пространства, тройки действительных чисел. Однако сам процесс арифметизации произволен и существует бесчисленное количество способов маркировки точек пространства. Р. Декарт (1596–1650) ввел один из таких способов: декартову (прямоугольную) систему троек чисел, называемых координатами точки (декартова система координат). Другими словами, координаты не имеют физического смысла, так как они суть метки точек пространства. Переход от одного способа арифметизации пространства к другому есть преобразование координат. Важно здесь подчеркнуть полный произвол арифметизации пространства и не связывать его с построением системы координат (декартовой, полярной и т. д.), так как арифметизация пространства не требует знания свойств (в отличие от выбора системы координат) и всегда может быть произведена с помощью континуума вещественных чисел.

Будем считать известным понятие геометрического пространства (или просто пространства) из курса геометрии, включающего в себя совокупность точек, линий, поверхностей и т. п., удовлетворяющих определенной системе аксиом (например, аксиомам Евклида) и вытекающим из них теорем. Точное определение плоского многомерного пространства связано с введением тензора кривизны, поэтому воспользуемся интуитивным понятием плоского многомерного пространства по аналогии с евклидовой плоскостью. О совокупности точек, составляющих эту плоскость, говорят как о двумерном точечном многообразии. Строгое определение n -мерного многообразия основано на возможности гомеоморфного (взаимно-обратного и непрерывного) отображения хаусдорфова пространства¹³ (все метризуемые пространства хаусдорфовы) на n -мерное множество вещественных чисел, представляющих собой декартово (прямое) произведение n одномерных множеств вещественных чисел [31]¹⁴.

Фактически определение многообразия означает введение арифметизации пространства. Однако сам процесс арифметизации пространства произволен и существует бесконечное множество способов маркировки точек этого пространства (а значит и систем координат). Следовательно, координаты не имеют физического смысла, так как они суть метки точек пространства. Это означает, что в одной и той же системе отсчета может

¹³ Пространство X называется хаусдорфовым, если для любой пары различных точек x, y принадлежащих X , существуют открытые множества U_x и U_y такие, что пересечение U_x и U_y пусто [31. С.64].

Пространства, с которыми обычно имеют дело в физике, хаусдорфовы.

¹⁴ Понятие многообразия обобщает на n – мерный случай понятие поверхности без самопересечений и краев. Поверхность цилиндра – многообразие. Чтобы поверхность сферы удовлетворяла определению многообразия, необходимо разбить ее на куски, гомеоморфные евклидовой плоскости. Например, стереографическая проекция обеспечивает такой гомеоморфизм.

быть определено бесчисленное множество систем координат. Система координат приобретает физический смысл после того, как она жестко связана с системой отсчета, координатные оси откалиброваны с помощью масштаба длины (линейки), а временная ось калибруется с помощью эталонных часов.

1.3. Введение метрики

Не ограничивая общности дальнейшего изложения, положим раз мерность $n = 4$, а каждую точку этого пространства зададим четверкой чисел (x^μ) , где $\mu = 0, 1, 2, 3$, что само по себе еще не означает введения пространства-времени. Будем также считать, что наше многообразие непрерывно, т.е. в окрестности каждой точки (x^μ) имеются другие точки $(x^\mu + dx^\mu)$, координаты которых бесконечно мало отличаются от координат точек (x^μ) ; dx^μ – дифференциалы координат.

После того как введена арифметизация пространства и построена система координат, сопоставим произвольным точкам P и P' скалярную величину, называемую расстоянием между этими точками. Если (x^μ) и x^μ – координаты этих точек, то расстояние D можно рассматривать как функцию этих наборов чисел: $D = D(x^\mu, x^{\mu'})$. Далее предположим, что расстояние обладает следующими свойствами [32] :

1) D – инвариант относительно перестановки точек P и P' :

$$D(x^\mu, x^{\mu'}) = D(x^{\mu'}, x^\mu);$$

2) при $P \rightarrow P'$ $D \rightarrow 0$;

3) квадрат расстояния может быть разложен в ряд Тейлора для близких точек:

$$\begin{aligned} D^2(x^\mu, x^{\mu'}) &= g_0 + g_\mu(x^\mu - x^{\mu'}) + g_{\mu\nu}(x^\mu - x^{\mu'})(x^\nu - x^{\nu'}) + \\ &+ g_{\mu\nu\lambda}(x^\mu - x^{\mu'})(x^\nu - x^{\nu'})(x^\lambda - x^{\lambda'}) + \dots, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где по повторяющимся индексам идет суммирование, $g = \text{const}$, g_μ , $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu\lambda}$ и т. д. суть функции точки P .

Воспользовавшись свойством 2), получим $g_0 = 0$. Из свойства 1) вытекает, что все функции g_μ , $g_{\mu\nu\lambda}$ и т. д. с нечетным числом индексов тождественно равны нулю.

В общем случае у нас нет критериев, позволяющих выбрать среди оставшихся форм четных степеней ту, которая соответствует геометрии пространства в бесконечно малом. Б. Риман предложил ограничиться квадратичной формой, указав, например, что при выборе формы 4-й степени нельзя было бы результаты по исследованию многообразий представить геометрически [32]. Принимая это предложение¹⁵, мы тем самым считаем справедливой теорему Пифагора как в большом, так и в малом. При этом расстояние между двумя бесконечно близкими точками в произвольном пространстве принимается равным

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (1.3.2)$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор, в общем случае являющийся функцией точки, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\lambda)$, по повторяющимся индексам идет автоматическое суммирование.

При этом метрический тензор, входящий в выражение (1.3.2) дает вклад в наблюдаемую метрику (измеряемое наблюдателем расстояние между точками) только своей симметричной (по индексам μ, ν) частью, так как произведение дифференциалов координат образует симметричный тензор. Как известно, свертка такого тензора с любым другим «вырезает» антисимметричную часть последнего. Это означает, что из процедуры измерения расстояния между двумя точками нельзя определить истинные свойства симметрии метрического тензора. Однако в последующем изложении будем считать (как в большинстве подобных исследований), что имеем дело с симметричным метрическим тензором.

Так как в дальнейшем мы будем работать в рамках общей теории относительности, то координату x^0 естественно интерпретировать как временную, координаты x^k ($k = 1, 2, \dots, 3$) как пространственные, а определитель метрического тензора $g = \det(g_{\mu\nu})$ будет в этом случае отрицательным. В частности, для пространства Минковского метрический тензор будет записываться здесь как $\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

¹⁵ Этот вопрос будет обсуждаться позже с точки зрения теории катастроф.

1.4. Тетрадный формализм и дифференциальные формы

Э. Картаном в 1901 г. было создано внешнее дифференциальное исчисление, примененное в дальнейшем в различных областях математики и физики (см., например, [33–34]). Простейшим примером такого дифференцирования может служить взятие дифференциала от скалярной функции $f(x^\alpha)$

$$df = f_{,\alpha} dx^\alpha . \quad (1.4.1)$$

Обобщение таких конструкций на случай, когда нельзя ввести градиент (тогда дифференциал не является полным), приводит к понятию 1-формы, или дифференциальной формы первой степени $\alpha(dx)$:

$$A_\mu dx^\mu = \alpha(dx) . \quad (1.4.2)$$

Введение операции внешнего произведения дифференциальных форм позволяет получать из 1-форм дифференциальные формы второй степени (2-формы)

$$\alpha \wedge \beta = 2A_\mu B_\nu dx^{[\mu} dy^{\nu]} , \quad (1.4.3)$$

где бивектор $2dx^{[\mu} dy^{\nu]}$ – описывает бесконечно малую 2-мерную площадку, а квадратными скобками обозначена операция антисимметризации: $2dx^{[\mu} dy^{\nu]} = dx^\mu dy^\nu - dx^\nu dy^\mu$.

Антисимметризация дифференциалов координат индуцирует антисимметризацию тензора $A_\mu B_\nu$, т. е. для произвольной 2-формы имеем

$$\varphi(dx, dy) = 2F_{\mu\nu} dx^{[\mu} dy^{\nu]} , \quad (1.4.4)$$

где $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ – бивектор, который называется определяющим тензором для дифференциальной формы второй степени.

Вообще, дифференциальная форма произвольной степени n может быть записана как

$$\theta(dx_1, \dots, dx_n) = n! M_{\mu\nu\dots\lambda} dx_1^{[\mu\dots} dx_n^{\lambda]} . \quad (1.4.5)$$

Следует отметить, что не существует отличных от нуля форм со степенью большей, чем размерность данного пространства, т. к. только n дифференциалов являются независимыми, если размерность пространства есть n .

Обратимся теперь к свойствам дифференциальных форм и операциям над ними.

1. При сложении форм одинаковых степеней получаем форму той же степени, например,

$$\alpha + \beta = (A_\mu + B_\mu) dx^\mu = \gamma = C_\mu dx^\mu, \quad (1.4.6)$$

где α, β – формы первой степени.

2. Беря внешнее произведение форм, получаем новую форму, степень которой является суммой степеней исходных форм, например,

$$\varphi \wedge \alpha = 3! F_{\mu\nu} A_\lambda dx^{[\mu} dy^\nu dz^{\lambda]}, \quad (1.4.7)$$

где α – 1-форма, φ – 2-форма.

3. Знак внешнего произведения зависит от того, в каком порядке берутся формы

$$\chi \wedge \psi = (-1)^{\deg \chi \cdot \deg \psi} \psi \wedge \chi, \quad (1.4.8)$$

где χ, ψ – некоторые формы соответственно степени $\deg \chi$ и $\deg \psi$. В частности, для форм нечетной степени $\alpha \wedge \alpha = 0$.

4. Новые дифференциальные формы можно образовывать путем взятия внешнего дифференциала от исходной формы, в результате чего получается форма со степенью на единицу большую, чем степень исходной формы. Таким образом, если имеется форма степени k

$$\varphi(dx_1, \dots, dx_k) = k! F_{\mu\nu\dots\lambda} dx_1^{[\mu\dots} dx_k^{\lambda]}, \quad (1.4.9)$$

то новая форма ψ степени $(k+1)$ определяется как

$$\psi = d\varphi = (k+1)! F_{\mu\nu\dots\lambda, \xi} du^{[\xi} dx_1^{\mu\dots} dx_k^{\lambda]}. \quad (1.4.10)$$

Такая внешняя форма ψ называется точной. Подчеркнем, что определение дифференциала формы не зависит от выбора системы координат.

5. Используя определение внешнего дифференциала и то, что свертка симметричного тензора с антисимметричным равна нулю, получаем при повторном дифференцировании формы $d\varphi$

$$dd\varphi = 0 . \quad (1.4.11)$$

Любая форма σ , для которой $d\sigma = 0$, называется замкнутой дифференциальной формой.

6. Произведение форм дифференцируется по правилу

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta . \quad (1.4.12)$$

7. Внешняя форма σ степени k называется простой, если она может быть записана в виде произведения некоторых 1-форм α_i

$$\sigma = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k . \quad (1.4.13)$$

8. Для точной формы первой степени определяющим тензором является градиент (см. (1.4.1)), а определяющим тензором точной 2-формы оказывается ротор

$$d\alpha = (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) dx^{[\nu} dy^{\mu]}, \quad (1.4.14)$$

обобщение которого получается при взятии внешнего дифференциала от форм более высокой степени.

9. Формализм дифференциальных форм позволяет обобщить теоремы Гаусса и Стокса на любое число измерений. Если ω есть дифференциальная форма, то справедлива *обобщенная теорема Стокса*

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega , \quad (1.4.15)$$

где ∂V – граница данного объема V . Например, правило Ньютона–Лейбница запишется как $\int_V df = \int_{\partial V} f = f|_1^2$, где f – скалярная функция, или форма нулевой степени, а «классическая» теорема Стокса выполняется для точной 2-формы, $\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha$ (S – двумерная поверхность, ограниченная контуром ∂S).

10. Введем понятие дуальной формы, используя операцию дуального сопряжения (операция Ходжа),

$$*\sigma = B_{\mu\nu\dots\lambda} * dx^\mu \wedge \dots \wedge dz^\lambda = B_a * dx^a = (1/L!) B_a E^{al} dx_l, \quad (1.4.16)$$

где a, l – собирательные индексы; $L = (m - n)$ – число, дополнительное к размерности пространства относительно степени формы (n – степень формы, m – размерность пространства); E^{al} – аксиальный тензор, который, например, в 4-мерном пространстве записывается в виде $E_{\mu\nu\lambda\rho} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ ($\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ – символ Леви-Чивиты, антисимметричный по любой паре индексов, $g = \det(g_{\mu\nu})$). Если $\det \sigma = A$, то $**\sigma = (-1)^{AL+1} \sigma$.

Рассмотрим примеры образования дуальных форм.

1-форма: $\alpha = A_\mu dx^\mu$, тогда $*\alpha = A_\mu * dx^\mu = (1/3) A_\mu E^{\mu\nu\lambda\rho} dx_{\lambda\rho\eta} = -B^{\lambda\rho\eta} dx_{\lambda\rho\eta} = 3$ -форма. 2-форма: $\beta = A_{\mu\nu} dx^{\mu\nu}$, тогда $*\beta = A_{\lambda\rho} * dx^{\lambda\rho}$ 2-форма. 3-форма: $\gamma = A_{\mu\nu\lambda} dx^{\mu\nu\lambda}$, $*\gamma = A_{\mu\nu\lambda} E^{\mu\nu\lambda\rho} dx_\rho = B^\rho dx_\rho$ – 1-форма. 4-форма: $*\varphi = A_{\mu\nu\lambda\rho} * dx^{\mu\nu\lambda\rho} = A_{\mu\nu\lambda\rho} E^{\mu\nu\lambda\rho}$ – 0-форма.

При этом элемент 4-объема имеет вид $(dx) = (1/4!) (-g)^{-1/2} E_{\alpha\beta\gamma\delta}$. $dx^{\alpha\beta\gamma\delta} = (1/4!) \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^{\alpha\beta\gamma\delta}$, а дуальный к нему записывается как $*(dx) = -1/\sqrt{-g}$, т. е. $dx^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (dx)$; $*dx^{\mu\nu\lambda\rho} = E^{\mu\nu\lambda\rho}$.

Кроме того, операции $*$ и d позволяют определить оператор Д'Аламбера в плоском пространстве следующим образом: $*d * d = \square$.

Важным приложением метода дифференциальных форм является использование их в дифференциальной геометрии, и, в частности, в общей теории относительности (ОТО), где этот метод позволяет значительно облегчить процедуру вычислений компонент тензора кривизны. При этом удобнее работать в касательном плоском пространстве, на которое все тензорные величины могут быть спроектированы с помощью **тетрад** – четверок взаимно ортогональных базисных векторов.

Введем в каждой точке нашего многообразия тетраду $g_{(\alpha)}^\mu$, составляющую базис в касательном в данной точке пространстве (индекс в круглых скобках нумерует векторы, а индекс без скобок – компоненты вектора). Проекция любого вектора A_μ (или тензора) на касательное пространство осуществляется с помощью тетрады, например, $A_\mu g_{(\alpha)}^\mu = A_{(\alpha)}$. Поднятие и опускание тетрадных индексов производится тетрадной метрикой, которая строится из тетрад следующим образом:

$$g_{(\alpha)(\beta)} = g_{(\alpha)\mu} g_{(\beta)}^\mu. \quad (1.4.17)$$

Связь этой метрики с тензорной записывается как

$$g_{(\alpha)(\beta)} = g_{(\alpha)}^{\mu} g_{(\beta)}^{\nu} g_{\mu\nu}. \quad (1.4.18)$$

Имея тетрады, можно построить базисные 1-формы по правилу

$$\theta^{(\alpha)} = g_{\mu}^{(\alpha)} dx^{\mu}. \quad (1.4.19)$$

С помощью этих форм квадрат 4-интервала представляется в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{(\alpha)(\beta)} \theta^{(\alpha)} \theta^{(\beta)}. \quad (1.4.20)$$

Если взять внешний дифференциал от формы $\theta^{(\alpha)}$ и ввести формы связности $\omega_{(\beta)}^{(\alpha)}$ (1-формы), то получим первые уравнения структуры Картиана

$$d\theta^{(\alpha)} = -\omega_{(\beta)}^{(\alpha)} \wedge \theta^{(\beta)}. \quad (1.4.21)$$

Формы связности определяются однозначно как решения уравнений (1.4.21) и

$$dg_{(\alpha)(\beta)} = \omega_{(\alpha)(\beta)} + \omega_{(\beta)(\alpha)}. \quad (1.4.22)$$

В частности, если тетрада – ортонормированная, то тетрадная метрика $g_{(\alpha)(\beta)}$ – набор постоянных и $dg_{(\alpha)(\beta)} = 0$, т. е. формы связности антисимметричны

$$\omega_{(\alpha)(\beta)} = -\omega_{(\beta)(\alpha)}. \quad (1.4.23)$$

Так как выбор тетрадной метрики (метрики касательного пространства) произволен, а физически нахождение в касательном пространстве означает переход в локально инерциальную (свободно падающую) систему отсчета, удобней для расчетов выбирать метрику $g_{(\alpha)(\beta)}$, совпадающую с метрикой Минковского $g_{(\alpha)(\beta)} \equiv \delta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Тогда, как следует из (1.4.23), число независимых компонент форм связности будет равно шести.

Дифференцируя уравнения (1.4.22) и используя (1.4.11), получим тождества Риччи

$$\mathfrak{R}_{\cdot(\beta)}^{(\alpha)} \wedge \theta^{(\beta)} = 0, \quad (1.4.24)$$

где вторыми уравнениями структуры Картана

$$\mathfrak{R}_{\cdot(\beta)}^{(\alpha)} = d\omega_{\cdot(\beta)}^{(\alpha)} + \omega_{\cdot(\beta)}^{(\alpha)} \wedge \omega_{\cdot(\beta)}^{(\sigma)} \quad (1.4.25)$$

определяется 2-форма кривизны

$$\mathfrak{R}_{\cdot(\beta)}^{(\alpha)} = (1/2) R_{\cdot(\beta)(\gamma)(\delta)}^{(\alpha)} \theta^{(\gamma)} \wedge \theta^{(\delta)} \quad (1.4.26)$$

с тензором кривизны $R_{\cdot(\beta)(\gamma)(\delta)}^{(\alpha)}$ в тетрадных компонентах. Уравнения (1.4.25) позволяют наиболее эффективно находить компоненты тензора кривизны.

Дифференцируя 2-форму кривизны (1.4.26), получим тождества Бианки

$$d\mathfrak{R}_{\cdot(\beta)}^{(\alpha)} = \mathfrak{R}_{\cdot(\gamma)}^{(\alpha)} \wedge \omega_{\cdot(\beta)}^{(\gamma)} - \omega_{\cdot(\gamma)}^{(\alpha)} \wedge \mathfrak{R}_{\cdot(\beta)}^{(\gamma)} = 0, \quad (1.4.27)$$

что легко проверяется в голономных координатных тетрадах.

1.5. Уравнения Эйнштейна

Тождества Бианки в тензорной записи выглядят как

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} + R_{\alpha\beta\delta\lambda;\gamma} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma;\delta} = 0, \quad (1.5.1)$$

где тензор Римана-Кристоффеля (тензор кривизны)

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \quad (1.5.2)$$

с объектами связности (символами Кристоффеля для симметричного метрического тензора)

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = (1/2) g^{\alpha\delta} (g_{\beta\delta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}). \quad (1.5.3)$$

Тензор кривизны обладает следующими алгебраическими свойствами

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}; \quad (1.5.4)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}; \quad (1.5.5)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0. \quad (1.5.6)$$

Последнее соотношение, называемое тождеством Риччи, может быть ещё переписано как

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\lambda\beta\gamma\delta} = 0. \quad (1.5.7)$$

Благодаря этим алгебраическим соотношениям, характеризующим свойства симметрии тензора Римана-Кристоффеля, число независимых и ненулевых компонент этого тензора в пространстве-времени равно 20. Свёртки тензора кривизны дают две величины: тензор Риччи¹⁶

$$R_{\beta\gamma} \equiv R_{\beta\gamma\alpha}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha,\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\alpha}^{\delta} - \Gamma_{\delta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} \quad (1.5.8)$$

и скалярную кривизну $R \equiv R_{\alpha}^{\alpha}$.

Тождества Бианки могут быть переписаны в виде

$$R_{\alpha\beta\gamma\lambda;\sigma}\epsilon_{\gamma\lambda\sigma} = 0 \quad (1.5.9)$$

Свёртывая тождества Бианки один раз, получим

$$R_{\beta\gamma\delta;\alpha}^{\alpha} + R_{\beta\delta;\gamma} - R_{\beta\gamma;\delta} = 0. \quad (1.5.10)$$

Повторное свёртывание приводит к закону сохранения

$$G_{\beta;\alpha}^{\alpha} = 0, \quad (1.5.11)$$

где

$$G_{\beta}^{\alpha} \equiv R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\beta}^{\alpha}R \quad (1.5.12)$$

– тензор Эйнштейна; $G_{\alpha}^{\alpha} = -R$.

¹⁶ В [35-36] тензор Риччи определяется с противоположным знаком. Если метрический тензор симметричен, то тензор Риччи также симметричен, а тензор кручения отсутствует, т. е. $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$.

Можно иначе найти этот тензор, если определить дважды дуальную 2-форму кривизны

$$*\mathfrak{R}_{\cdot(\beta)}^{(\alpha)} = (1/2) R^{(\alpha)} *_{(\gamma)}^{(\beta)} *_{(\delta)} \theta^{(\gamma)} \wedge \theta^{(\delta)}, \quad (1.5.13)$$

то след дважды дуального тензора кривизны $R^{(\alpha)} *_{(\gamma)}^{(\beta)} *_{(\delta)}$ даст как раз тензор Эйнштейна

$$G_{\cdot(\gamma)}^{(\alpha)} = R^{(\alpha)} *_{(\gamma)}^{(\beta)} *_{(\delta)} = -(1/4) \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\gamma\alpha\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\cdot(\gamma)}^{(\alpha)} - (1/2) \delta_{\gamma}^{\alpha} R, \quad (1.5.14)$$

где $R_{\cdot(\gamma)}^{(\alpha)} = R^{(\alpha)(\beta)}_{\cdot(\gamma)(\beta)}$ – тензор Риччи в тетрадных обозначениях; $R = R_{\cdot(\alpha)}^{(\alpha)}$ – скалярная кривизна.

Закон сохранения (1.5.11) отражает геометрические свойства пространства-времени. В физике аналогичному закону сохранения удовлетворяет тензор энергии-импульса T_{β}^{α} , описывающий вещество и физические поля (кроме гравитационного). Считая, что геометрия пространства-времени определяется существованием и распределением материальных объектов, Эйнштейн приравнял со знаком минус тензоры G_{β}^{α} и T_{β}^{α} (в одних и тех же единицах)

$$G_{\beta}^{\alpha} \equiv R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} R = -\kappa T_{\beta}^{\alpha}, \quad (1.5.15)$$

где знак минус и $\kappa = 8\pi G/c^4$ (эйнштейновская гравитационная постоянная) введены, чтобы для слабых полей и малых скоростей удовлетворить ньютоновскому закону тяготения

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho(\vec{r}), \quad (1.5.16)$$

где φ – ньютоновский гравитационный потенциал, $\rho(\vec{r})$ – плотность негравитационной материи, Δ – оператор Лапласа.

Когда $T_{\beta}^{\alpha} \equiv 0$, уравнения $G_{\beta}^{\alpha} = 0$ описывают чисто гравитационное поле.

Уравнения (1.5.15) известны как уравнения Эйнштейна. Если в электродинамике уравнения поля (уравнения Максвелла) и уравнения движения являются независимыми, то, как показали А. Эйнштейн, Л. Инфельд и

Б. Гоффман [1. Т.2, ст. 117], гравитационных уравнений (1.5.15) «достаточно для определения движения материи, представленной в виде точечных сингулярностей поля». Таким образом, теория Эйнштейна – пример физической теории, описывающей одними и теми же уравнениями как поля, так и движения частиц, а значит – близкой к реальности.

Определить искривленность пространства можно различными способами, производя измерения внутри него. Ещё Н. Лобачевский показал [37], что в неевклидовой геометрии сумма углов треугольника отлична от двух прямых. На местности это определяется путём триангуляции. Ф. Гаусс в своё время пытался таким образом доказать реальность неевклидовой геометрии, производя измерения на вершинах гор, но малая точность приборов не позволила этого сделать. Лобачевский, опираясь на параллаксы космических тел, вычислил сумму углов треугольника, в вершинах которого помещались Земля, Солнце и Сириус. Принципиальное отличие от евклидовой геометрии он получил, хотя оно и оказалось малым [38].

Другим путём является обнаружение кривизны пространства с помощью параллельного переноса вектора по малому замкнутому контуру. В этом случае гауссова кривизна равна $K = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} (\Delta\psi / \Delta\sigma)$, где $\Delta\psi$ – приращение угла между начальным и конечным положением конца вектора (после переноса); $\Delta\sigma$ – площадь, охватываемая контуром. Так, например, в свободно падающей близи поверхности Земли системе отсчёта (ускорение $\approx 10 \text{ м/с}^2$) перенос по контуру, охватываемому площадь $1 \text{ м} \cdot \text{с}$, приводит к повороту единичного вектора на $1,6 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}$, или $K \approx 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}$; или $K \approx 1,5 \cdot 10^{-23} \text{ м}^{-2}$. Такая кривизна соответствует примерно кривизне поверхности сферы с радиусом ≈ 1300 свет. с ≈ 20 свет. мин, т. е. 2,5 радиуса орбиты Земли вокруг Солнца [39].

Г л а в а 2

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕТРОВА ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

2.1. Алгебраическая классификация пространства-времени

В работах А.З. Петрова впервые была предложена естественная инвариантная классификация пространств на основе исследования алгебраической структуры тензора Римана-Кристоффеля или в более общем случае – тензора конформной кривизны (тензора Вейля) (см. монографию [5], где собраны основные результаты). Схема подхода Петрова заключается в следующем. Тензор кривизны (тензор Вейля) проектируется в заданной 4-точке с помощью тетрад на касательное плоское пространство-время, а затем отображается на бивекторное метризованное пространство (каждой антисимметричной паре индексов ставится в соответствие один собирательный индекс в 6-мерном пространстве по правилу: $10 \rightarrow 1, 20 \rightarrow 2, 30 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 31 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$ с последующим исследованием λ -матрицы ($R_{AB} - \lambda g_{AB}$) ($A, B, C = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $R_{AB} = R_{BA}$; $g_{AB} = g_{BA}$). Тип пространства в этом случае определяется характеристикой этой λ -матрицы, при этом λ_C суть корни характеристического уравнения

$$\det(R_{AB} - \lambda g_{AB}) = 0. \quad (2.1.1)$$

Такая классификация оказывается инвариантной относительно любых координатных преобразований, так как ни собственные значения λ_C , ни элементарные делители λ -матрицы не зависят от подобных преобразований.

Рассмотрим координатные преобразования $x^\alpha = x^{\alpha'}$ тензора кривизны

$$R'_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\rho} \right) \left(\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\lambda} \right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\gamma'}} \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\delta'}} \right) R_{\mu\nu}^{\rho\lambda}, \quad (2.1.2)$$

где $\alpha, \beta, \dots, \delta = 0, 1, 2, 3$.

Это выражение можно переписать в матричном виде

$$R'_C^A = T^A_L \bar{T}_C^M R^L_M, \quad (2.1.3)$$

где $T^A_L = (\partial x^{\alpha'} / \partial x^\rho)(\partial x^{\beta'} / \partial x^\lambda)$; $\bar{T}_C^M = (\partial x^\mu / \partial x^{\gamma'})(\partial x^\nu / \partial x^{\delta'})$.

Не трудно видеть, что $T\bar{T} = T^A_L T^L_C = \delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta$, т. е. $\bar{T} = T^{-1}$, и соотношение (2.1.3) есть преобразование подобия матриц, а у подобных матриц, как известно, характеристические числа и элементарные делители совпадают.

Изложение результатов по классификации будет проводиться здесь в духе работы Синга [40], так как такая классификация особенно просто осуществляется с привлечением комплексного трехмерного евклидова пространства, самодуальных бивекторов и битензоров с самого начала.

В дальнейшем все 4-мерные величины будут браться в касательном 4-пространстве, т.е. будут считаться спроектированными на него с помощью тетрад, поэтому здесь в целях упрощения записи будут опущены обозначения тетрадных индексов (круглые скобки). Предварительно введем понятия бивектора и самодуального бивектора.

Определение 1.

Бивектором называется любой антисимметричный двувалентный тензор, например, $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$. Другими словами бивектор – это определяющий тензор 2-формы $dF = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$; в частности, бивектором является тензор электромагнитного поля.

Бивектор называется простым, или приводимым, если его можно представить в виде $F_{\alpha\beta} = f_\alpha g_\beta - f_\beta g_\alpha$, где f_α и g_β – некоторые векторы.

Определение 2.

Самодуальным бивектором называется антисимметричный комплексный двувалентный тензор, для которого $F_{\mu\nu}^* = i F_{\mu\nu}^{(+)}$, где операция $*$ – дуальное сопряжение: $F_{\mu\nu}^* = (1/2) \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}$; $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ – 4-мерный символ Леви-Чивиты в касательном пространстве.

Самодуальный бивектор строится из вещественного бивектора по следующему правилу: $F_{\mu\nu}^{(+)} := F_{\mu\nu} - i F_{\mu\nu}^*$. Комплексное сопряжение переводит его в антисамодуальный бивектор $F_{\mu\nu}^{(-)} = \bar{F}_{\mu\nu}^{(+)}$ со свойством $F_{\mu\nu}^* = -i F_{\mu\nu}^{(-)}$.

В отличие от бивекторов, которые имеют 6 независимых вещественных компонент¹⁷, самодуальные бивекторы имеют лишь 3 комплексные компоненты¹⁸ и могут рассматриваться как 3-векторы в 3-мерном комплексном евклидовом пространстве. Другими словами, существует изоморфизм между самодуальными бивекторами и комплексными 3-векторами:

$F_{\mu\nu} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} F_K \quad (k, m, n = 1, 2, 3)$. Если ввести следующее отображение

$$\Omega_k^{\alpha\beta} = \delta_{[k}^{\alpha} \delta_{0]}^{\beta} + (i/2) \epsilon_{kmn} \delta_m^{\alpha} \delta_n^{\beta} \quad (2.1.4)$$

(δ_{β}^{α} – символ Кронекера, $\alpha_{[\mu} b_{\nu]} := (1/2)(a_{\mu} b_{\nu} - b_{\mu} a_{\nu})$, то тогда можно сразу переводить бивектор в 3-вектор, $F_k = \Omega^{\alpha\beta}{}_k F_{\alpha\beta} \stackrel{(+)}{\equiv} F_{k\alpha}$.

Это отображение позволяет связать преобразование Лоренца $L_{\alpha\beta}$ в 4-мерном касательном пространстве с ортогональной комплексной матрицей преобразования в 3-мерном комплексном пространстве

$$T_{ik} = 2\Omega^{\alpha\beta}{}_k L_{i\alpha} L_{o\beta}, \quad (2.1.5)$$

где $\tilde{T} = T^{-1}$; $T\tilde{T} = \tilde{T}T = E$ (знаком \sim обозначена операция транспонирования матриц, E – единичная матрица).

Вводя метрику $\delta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ в касательном 4-пространстве, нетрудно установить, что в комплексном 3-пространстве ей соответствует величина $2\Omega^{\alpha\beta}{}_k \delta_{i\alpha} \delta_{o\beta}$, которая есть (с точностью до знака) метрика плоского 3-пространства. Поэтому для удобства определим в комплексном 3-пространстве метрику как¹⁹

$$e_{ik} := -2\Omega^{\alpha\beta}{}_k \delta_{i\alpha} \delta_{o\beta} = \text{diag}(1, 1, 1). \quad (2.1.6)$$

Далее, вводя тензор конформной кривизны (тензор Вейля)

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\lambda[\alpha} g_{\beta]\delta} - R_{\delta[\alpha} g_{\beta]\gamma} - (1/3) R g_{\gamma[\alpha} g_{\beta]\delta} \quad (2.1.7)$$

¹⁷ В электродинамике это суть 3 компоненты напряженности электрического поля \vec{E} и 3 компоненты индукции магнитного поля \vec{B} .

¹⁸ В электродинамике это есть $(\vec{E} + i\vec{B})$.

¹⁹ В целом, эта метрика может быть и недиагональной, что будет продемонстрировано в дальнейшем.

и производя отображение его на евклидово комплексное 3-пространство, получаем комплексную бесследовую симметричную 3x3 матрицу Вейля

$$W_{kj} = \overset{(+)}{W}_{kojo} = (1/2) \Omega^{\alpha\beta}{}_k \Omega^{\gamma\delta}{}_j W_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.1.8)$$

где $\overset{(+)}{W}_{\alpha\beta\gamma\delta} = W_{\alpha\beta\gamma\delta} - i W_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$ – самодуальный тензор Вейля.

Рассмотрим задачу на собственные значения для матрицы Вейля

$$WF = \lambda F, \quad (2.1.9)$$

где $W \equiv (W_{ij})$; $F \equiv (F_k)$ – вектор-столбец.

Преобразование подобия не меняет собственных значений, следа и элементарных делителей λ -матрицы $(W - \lambda E)$, поэтому, умножив уравнение (2.1.9) слева на ортогональную матрицу T , перепишем его в виде

$$W'F' = \lambda F', \quad (2.1.10)$$

где $W' = TW\tilde{T}$; $F' = TF$.

Такое ортогональное преобразование позволяет упростить нахождение канонического вида матрицы W . Кроме того, любая ортогональная матрица T может рассматриваться как ортогональная триада т. е. $\tilde{T} = (A, B, C)$, где A, B, C – ортонормированные векторы: $\tilde{A}\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{B} = \tilde{C}\tilde{C} = 1$, $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A} = 0$, $\tilde{B}\tilde{C} = \tilde{C}\tilde{B} = 0$, $\tilde{C}\tilde{A} = \tilde{A}\tilde{C} = 0$. Тогда матрица W' записывается как

$$W' = TW\tilde{T} = \begin{pmatrix} \tilde{A}WA & \tilde{A}WB & \tilde{A}WC \\ \tilde{B}WA & \tilde{B}WB & \tilde{B}WC \\ \tilde{C}WA & \tilde{C}WB & \tilde{C}WC \end{pmatrix}. \quad (2.1.11)$$

Характеристическое уравнение

$$\det(W - \lambda E) = \det(W' - \lambda E) = -(\lambda^3 + p\lambda + q) = 0 \quad (2.1.12)$$

имеет три комплексных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, причем $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 0$, т. е. след матрицы W' равен нулю, $SpW = SpW' = 0$. В зависимости от того, все ли корни различны либо имеются кратные, будем получать различные канониче-

ские типы матриц и различные собственные векторы. Согласно методу Фаддеева [41. С. 96], для бесследовых матриц справедливы соотношения

$$p = -(1/2) Sp(W^2); \quad q = -(1/3) Sp(W^3), \quad (2.1.13)$$

порядок матрицы W равен трем, поэтому

$$p = \sum_{k=1}^3 W_k; \quad q = -\det W, \quad (2.1.14)$$

где W_k – главные миноры второго порядка матрицы W . Корни уравнения (2.1.12) могут быть записаны как (решение Кардано)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (a + b); \quad \lambda_{2,3} = -(1/2)(a + b) \pm \left(i\sqrt{3}/2\right)(a - b); \\ a &= \left(-q/2 + \sqrt{Q}\right)^{1/3}; \quad b = \left(-q/2 - \sqrt{Q}\right)^{1/3}; \\ Q &= (p/3)^3 + (q/2)^2. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Перейдем к изложению результатов по алгебраической классификации Петрова пространства-времени и сформулируем теорему:

Теорема о типах гравитационных полей.

Существуют три и только три основных типа гравитационных полей с сигнатурой (+ - -); в зависимости от собственных значений векторов эти типы пространств распадаются на семь подтипов.

Доказательство теоремы сводится к последовательному рассмотрению канонических видов матриц для трех возможных наборов собственных значений, обладающих свойством $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 0$,

- I. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$;
- II. $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$;
- III. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Приведем результаты разбиения на классы в зависимости от собственных векторов и собственных значений матрицы (2.1.11).

Класс 1: общий случай (все λ_k разные).

Каноническая матрица этого класса имеет вид $W' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Собственные векторы образуют ортонормированную триаду.

Если ввести понятие о ранге как наибольшем из порядков миноров, не равных тождественно нулю (или как число линейно независимых строк (столбцов) матрицы), то можно выделить по рангам два подкласса рассмотренного типа матриц. Будем называть пространством типа I пространство, соответствующая матрица Вейля которого имеет различные и не равные нулю собственные значения: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$. Ранг матрицы в этом случае равен трем. Если имеется равное нулю собственное значение (например, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda$), то соответствующий тип пространства будем называть $Ia: W_{Ia} = \text{diag}(0, \lambda, -\lambda); \det W = 0$, ранг $r = 2$. Это суть подтипы пространства типа T_1 по Петрову.

Класс 2: случай двойного корня.

Пусть теперь $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$. Здесь уже имеются два типа канонических матриц Вейля. Матрица вида $W' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ с $\lambda_1 = -2\lambda_2$, рангом, равным трем, и тремя собственными несветоподобными векторами.

Соответствующие гравитационные поля относятся к типу D . Когда имеется один светоподобный вектор, то матрица Вейля может быть приведена к виду

$$W' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & i \\ 0 & i & \lambda_2 - 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.16)$$

с $\lambda_1 = -2\lambda_2$ и рангом $r = 3$. Этот подтип пространства типа T_2 по Петрову.

Класс 3 : тройной корень ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$).

В этот класс входят три типа матриц Вейля. Матрица

$$W' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.17)$$

является канонической матрицей вырожденного второго типа по Петрову (тип N) и имеет ранг $r = 1$. Множество собственных векторов задается в виде $\tilde{F} = (\alpha, \beta, i\beta)$. Второй вид матриц – это матрицы типа T_3 с рангом $r = 2$

$$W' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.18)$$

с единственным собственным светоподобным вектором $\tilde{L} = \alpha(1, 0, -i); \alpha \neq 0$.

И последний тип матрицы – это нулевые матрицы с рангом $r = 0$, для которых любой вектор оказывается собственным (пространства типа 0, соответствующие конформно-плоским гравитационным полям).

Из теоремы Петрова следует неоднозначность разбиения на классы (типы) матриц Вейля. В табл. 1 приведены результаты такого разбиения различными авторами. Необходимо подчеркнуть, что ни один из указанных в табл. 1 авторов не выделяет подтип Ia в качестве самостоятельного.

Такое выделение диктуется как классификацией матриц по рангам, так и чисто физическими соображениями, например, связанными с образованием стоячей гравитационной волны [42].

Стрелки на диаграмме Пенроуза (табл. 1) указывают направление возрастания кратности главных светоподобных направлений при переходах между типами пространств (в том числе вырождение по рангу матрицы Вейля) [43].

Что касается физической интерпретации алгебраической классификации, то она становится ясной при использовании уравнения девиации геодезических для анализа поведения облака пробных частиц в гравитационном поле [8]. Оказывается, что гравитационное поле типа N аналогично полю плоской электромагнитной волны (поперечно-поперечная плоская гравитационная волна). Поля типа III – также волновые поля, но с продольной составляющей. Аналогом кулоновского поля (поля уединенного точечного заряда) является поле типа D . Тип II – комбинация полей типов D и N (в слабом приближении такое поле можно рассматривать как суперпозицию полей кулоновского типа и гравитационной волны). Поля типа Ia аналогичны стоячим электромагнитным волнам. Стоячая гравитационная волна, образованная из двух волн типа N , в приближении слабого поля относится как раз к такому типу. Обобщение пространства Минковского с метрикой $\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ – это гравитационные поля типа 0 с конформно-плоской метрикой $g_{\mu\nu} = (\exp(2\sigma)) \delta_{\mu\nu}$. Примером такого про-

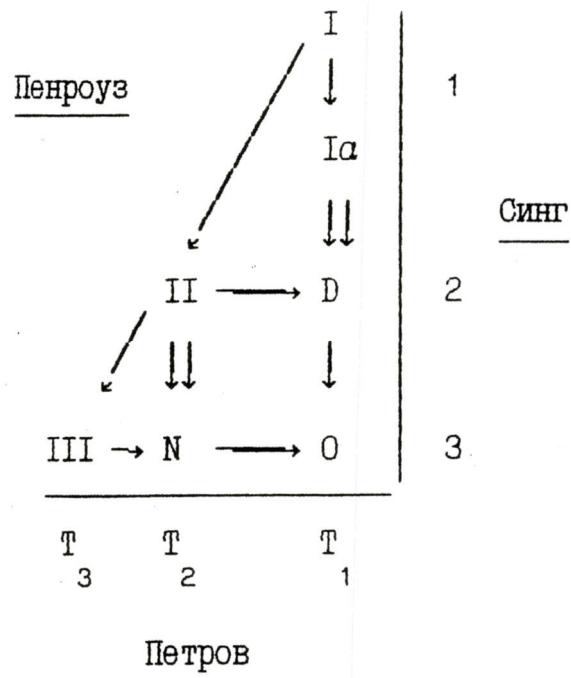


Таблица 1

странства является вселенная Фридмана. Гравитационные поля, не обладающие какими-либо симметриями, относятся к наиболее общему типу *I*.

В заключение этого параграфа необходимо отметить, что матричный подход к алгебраической классификации зачастую более удобен, чем другие подходы, так как сразу позволяет обобщать изложенное здесь на пространства любой размерности и сигнатуры. Поэтому в данной книге приоритет отдается именно этому подходу.

2.2. Алгебраическая классификация гравитационных полей и системы отсчета

В классической электродинамике выделение из тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ векторов напряженности электрического поля \vec{E} и индукции магнитного поля \vec{B} можно легко получить путем проектирования бивектора $F_{\mu\nu}$ и ему дуально сопряженного бивектора $F_{\mu\nu}^*$ на временно-подобное направление с помощью монады τ^μ , конгруэнция которой задает систему отсчета [44] :

$$E_\mu = F_{\nu\mu} \tau^\nu; \quad B_\mu = F_{\mu\nu}^* \tau^\nu, \quad (2.2.1)$$

где $\tau^\mu \equiv u^\mu = dx^\mu / ds$ – 4-скорость системы отсчета. При этом оба вектора E_μ и B_μ пространственноподобны, так как $E_\mu \tau^\mu = B_\mu \tau^\mu = 0$.

В частности, в локально лоренцевой системе отсчета $\tau^\mu = \delta_0^\mu$ и $E_i = F_{0i}$, $B_i = F_{\mu\nu}^*$. Ясно, что можно подобрать так тетрады, чтобы в касательном пространстве-времени выполнялось $\tau^\mu = \delta_0^\mu$ (здесь, как и выше, тетрадные обозначения опущены).

Следовательно, конструируя комплексный самодуальный бивектор $\overset{(+)}{F}_{\mu\nu} = (F_{\mu\nu} + iF_{\mu\nu}^*)$ и проектируя затем его на временнеподобное направление, получим комплексный 3-вектор, как и в случае применения отображения $\Omega_k^{\alpha\beta}$ (см. (2.1.4)). Другими словами, оба эти подхода эквивалентны, а представленный в данном параграфе позволяет связать использованный выше математический формализм с явным введением системы отсчета.

Такого рода процедура по расщеплению тензора кривизны на «электрическую» и «магнитную» части для случая пустого пространства-

времени (тензор Риччи $R_{\mu\nu} = 0$) была применена в работе [45] с последующей алгебраической классификацией 3×3 матриц, получающихся при этом.

Аналогичным образом проделаем ту же самую процедуру с тензором Вейля, обладающим свойствами $W_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = W_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $W_{\alpha\beta\gamma\delta}^{**} = W_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$ [43]. Для

этого введем тензоры «электрического» типа $W_{\alpha\beta}^{(E)} = W_{\alpha\beta\gamma\delta} \tau^\beta \tau^\delta$ и «магнитного» типа $W_{\alpha\beta}^{(B)} = W_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \tau^\beta \tau^\delta$, удовлетворяющих условиям: $W_{\alpha\gamma}^{(E)} \tau^\gamma = 0$; $W_{\alpha\gamma}^{(B)} \tau^\gamma = 0$, т. е. эти тензоры имеют лишь пространственные компоненты. Следовательно, такое расщепление эквивалентно проектированию с помощью $\Omega^{\alpha\beta}_k$, а проекция самодуального битензора оказывается матрицей Вейля из (2.1.8)

$$\left(W_{\alpha\beta\gamma\delta} + i W_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \right) \tau^\beta \tau^\delta = W_{\alpha\gamma}^{(E)} + i W_{\alpha\gamma}^{(B)} \Leftrightarrow W_{kj} = W_{kj}^{(E)} + i W_{kj}^{(B)}. \quad (2.2.2)$$

Таким образом, задача на собственные значения для матрицы $W_{\alpha\gamma}^{(+)} = W_{\alpha\gamma}^{(E)} + i W_{\alpha\gamma}^{(B)}$ совпадает с задачей на собственные значения, рассмотренной выше в п. 2.1.

Следует подчеркнуть, что хотя в 4-мерном пространстве-времени такой подход не дает ничего нового для алгебраической классификации гравитационных полей, по сравнению с другими, но в пространствах более высокой размерности и произвольной сигнатуры позволяет существенно облегчить классификацию пространств.

С другой стороны, проведенное расщепление тензора Вейля на «электрическую» и «магнитные» части позволяет по иному рассматривать поведение гравитационных полей, например, при движении источников гравитационного поля, в частности, светоподобных источников.

Г л а в а 3

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КАТАСТРОФ

3.1. Элементарная теория катастроф

История развития математики и физики задолго подготовила появление теории катастроф, основоположником которой считается Р. Том. Дело в том, что существует такое понятие, как структурная устойчивость системы, связанное с бифуркациями и катастрофами. Исследования по асимптотически устойчивым системам восходят к И. Ньютону. Хотя основоположником теории бифуркаций является А. Пуанкаре, но кое-что в этой области было уже сделано Л. Эйлером, а в XX веке продолжено А. Адроновым. Теория фазовых переходов конденсированного состояния материи (частный случай теории катастроф) была создана Л.Д. Ландау. Большой вклад в теорию особенностей, обобщающую исследования функций на экстремум, внесен Х. Уитни, Р. Томом, Дж. Мазером, В. Арнольдом (см., например, [46–60]).

Сама теория катастроф затрагивает один из аспектов проблем, изучаемых общей теорией структурной устойчивости и теорией бифуркаций. В основных чертах теорию катастроф можно представить как метод, позволяющий получить ответ на следующий математический вопрос: *каковы обычно встречающиеся типы в k-параметрическом семействе функций?* Аналогичный метод используется также и при изучении вопроса противоположного характера: *если дана функция, то как будет выглядеть семейство, содержащее близкие к ней функции?* [51].

Вкратце проблема формулируется следующим образом. Имеется некоторая система, описываемая k параметрами управления $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. При этом переменные x_1, x_2, \dots, x_n , зависящие от этих параметров, принимают такие значения в состоянии равновесия системы, что реализуется минимум некоторой функции $U(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, называемой по аналогии с механикой *потенциальной функцией* системы.

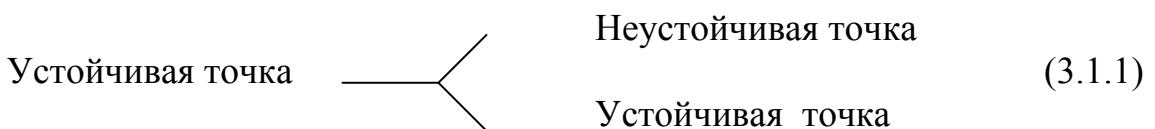
Рассматривая скачкообразные изменения значений переменных, обеспечивающих равновесие системы, в результате непрерывного изменения параметров системы, приходим к понятию *катастрофы*. Такого sorta описание в большей степени отвечает реально протекающим процессам в окружающем нас мире, чем классический математический анализ, обычно уклоняющийся от исследования особенностей.

Прежде всего, начнем с рассмотрения передемпированного ангармонического осциллятора как примера бифуркации равновесия системы.

Если в уравнении движения гармонического осциллятора с трением $\ddot{m}x + \alpha \dot{x} = -kx$ (m – масса частицы; α – коэффициент трения; k – жесткость «пружинки»; x – смещение от положения равновесия) принять, что m очень мало, а α очень велико, то приходим к уравнению $\dot{x} = -(k/\alpha)x$, которое легко обобщается на случай произвольной силы $F(x)$: $\dot{x} = F(x)$. Такого рода движения, описываемые двумя последними уравнениями, называются *передемпированными*. В частности, для ангармонического осциллятора ($F(x) = -kx - k_1x^3$; $k_1 > 0$, $k > 0$ или $k < 0$) такое уравнение движения принимает вид $\dot{x} = -kx - k_1x^3$, а положение равновесия определяется условием $x = 0$. Соответствующий потенциал записывается как $U(x) = kx^2/2 + k_1x^4/4 + U_0$, где $U_0 = \text{const}$.

Поведение этого потенциала в зависимости от знака k при $k_1 > 0$ и $U_0 = 0$ показано на рис. 2 и рис. 3. Когда $k > 0$, существует единственная точка равновесия ($x = 0$), что отвечает устойчивому равновесию. Если же $k < 0$, то для реализации условия равновесия имеются три точки: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm(|k|/k)^{1/2}$. Первая соответствует неустойчивому равновесию, а две другие – устойчивому (см. рис. 3). Эти устойчивые состояния инвариантны по отношению к отражению (инверсии) $x \rightarrow -x$, но в реальных системах такая симметрия нарушается из-за того, что шарик, помещенный в точку $x = 0$ (исходное состояние) под действием случайных (бесконечно малых) воздействий обязательно упадет в одну из двух «ямок». Тем самым симметрия исходного состояния будет нарушена.

В рассматриваемом примере такого нарушения можно добиться переходом от состояния, изображенного на рис. 2, к состоянию на рис. 3 путем непрерывного изменения параметра k от положительных значений к отрицательным, когда, проходя точку $k = 0$, устойчивое состояние $x = 0$ сменяется на неустойчивое. При этом происходит обмен состояниями. Описанный процесс может быть представлен как графически (рис. 4), так и в виде следующей схемы:



На рис. 4 изображено поведение равновесной координаты x_e как функции параметра k . При $k > 0$ имеем $x_e = 0$, но при $k < 0$ точка $x_e = 0$ становится неустойчивой (показано штриховой линией) и заменяется двумя устойчивыми положениями (сплошные, в виде вилки, кривые). В связи с тем, что диаграмма (3.1.1) имеет форму вилки (fork), само явление называется *бифуркацией*. Переход же от одного вида устойчивости к другому совершается скачком при непрерывном изменении k . Это и есть пример *катастрофического* поведения системы, аналогичного фазовому переходу второго рода, тем более, что здесь и там вид потенциала одинаков.

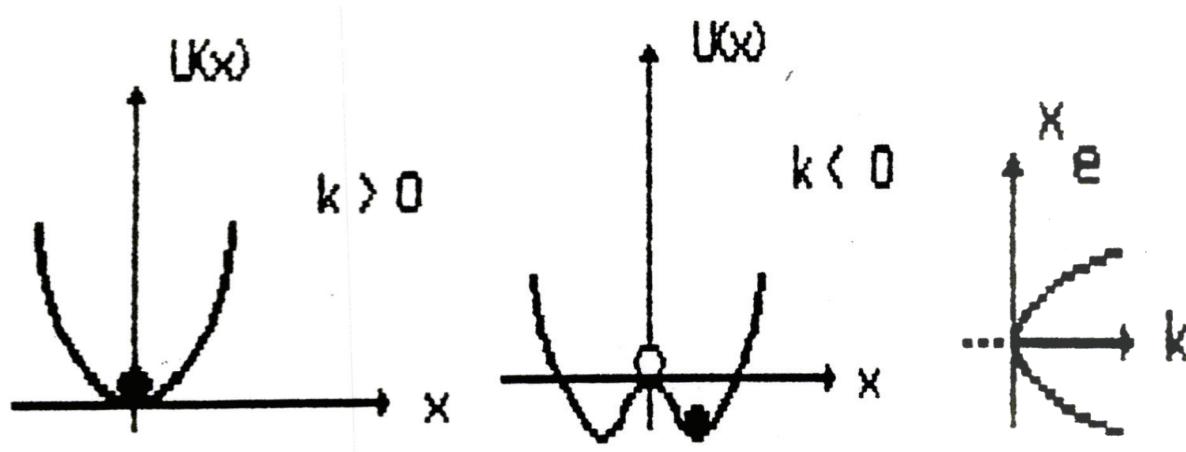


Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Перейдем к изложению элементарного подхода к теории катастроф Тома, обобщив предыдущую задачу на случай произвольного потенциала, зависящего, например, от одной переменной x .

Предположим, что система имеет точку равновесия при $x = 0$, и разложим вблизи этой точки наш потенциал

$$U(x) = a^{(0)} + a^{(1)}x + a^{(2)}x^2 + \dots + a^{(n)}x^n + \dots, \quad (3.1.2)$$

где, как обычно, $a^{(k)} = (1/k!)(d^k U / dx^k)_{x=0}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Без ограничения общности формы кривой $U(x)$ можно положить $a^{(0)} = 0$.

Так как по условию $x = 0$ – точка равновесия (критическая точка), то $(dU/dx)_{x=0} \equiv (U')_{x=0} = 0$ и, значит, $a^{(1)} = 0$. Типы равновесия (устойчивое, неустойчивое, метастабильное) определяются второй производной в точке $x = 0$: $a^{(2)} > 0$ или $a^{(2)} < 0$, $a^{(2)} = 0$.

Если $a^{(2)} \neq 0$, то соответствующая критическая точка является изолированной, невырожденной или морсовской критической точкой. Другими словами, для описания равновесного поведения системы при $a^{(2)} \neq 0$ достаточно ограничиться в (3.1.2) членами порядка не выше x^2 , хотя на самом деле это справедливо в полной мере для случая $a^{(2)} > 0$. Дело в том, что при $a^{(2)} < 0$ критическая точка неустойчива, и чтобы подробней изучить поведение системы в окрестности этой точки, следует привлечь следующие неисчезающие члены разложения. Естественно, это замечание относится и к случаю $a^{(2)} = 0$.

Допустим, что $a^{(2)} \neq 0$, тогда

$$U(x) \equiv a^{(2)}x^2 + a^{(3)}x^3. \quad (3.1.3)$$

Линейным сдвигом $x = (y + \tilde{b})$ с параметром $\tilde{b} = -a^{(2)} / (3a^{(3)})$ можно избавиться от квадратичного члена, и тогда потенциальная функция примет канонический вид (с точностью до аддитивной постоянной и выбора коэффициента при старшей степени переменной)

$$U(y, b) = y^3 + by, \quad (3.1.4)$$

называемой по Тому *катастрофой складки*, или просто *складкой* (b – некоторая постоянная, играющая роль управляющего параметра).

Если же $a^{(2)} = 0$, то функция (3.1.3) становится структурно неустойчивой относительно малых сдвигов переменной x из-за вырожденности критической точки [56. С. 91]. Малейшее шевеление этой переменной приводит к появлению всех низших членов разложения по степеням

$$U = \tilde{a}^{(3)}y^3 + ay^2 + by + c \quad (3.1.5)$$

Такого рода добавления, изменяющие нетривиальным образом первоначальную сингулярность (3.1.3) при $a^{(2)} = 0$, называются по Тому *развертками* (unfoldings), или возмущениями [57], хотя и не в общепринятом физическом смысле. Выбором масштаба можно добиться обращения коэффициента при y^3 в единицу. С помощью линейного сдвига и выбора начала для функции U легко затем получить «нормальный» вид (3.1.4).

Пусть теперь $a^{(2)} = a^{(3)} = 0$, а $a^{(4)} \neq 0$, т. е. разложение в ряд начинается с члена $\propto x^4$. Каноническая развертка потенциала задается следующим выражением:

$$U = (1/4)y^4 + (p/2)y^2 + qy. \quad (3.1.6)$$

Этот потенциал, отвечающий *катастрофе сборки* (см. рис. 5), играет большую роль в физике, в частности в теории фазовых переходов, космологии [61], классификации гравитационных полей [62, 63]. Поэтому остановимся на его исследовании подробней.

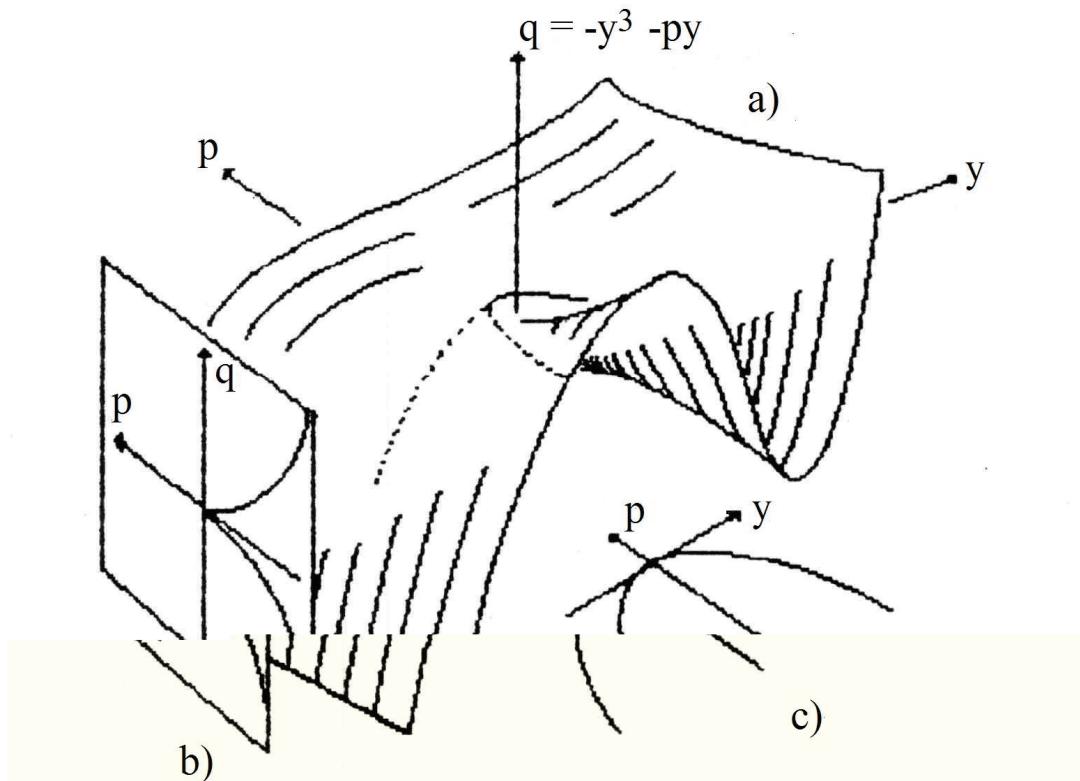


Рис. 5

Условие экстремума (3.1.6) представляет собой приведенное кубическое уравнение

$$y^3 + py + q = 0, \quad (3.1.7)$$

решения которого суть критические точки потенциала (3.1.6). Приравнивая нулю вторую и третью производные функции U по y , получим тем са-

мым условия для нахождения дважды и трижды вырожденных критических точек

$$3y^2 + p = 0, \quad (3.1.8)$$

$$6y = 0. \quad (3.1.9)$$

Исключая из пары уравнений (3.1.8) и (3.1.9) переменную y , приходим к дискриминанту уравнения (3.1.7), равного нулю

$$Q = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 0 \quad (3.1.10)$$

и задающего в плоскости управляемых параметров p и q полукубическую параболу (сепаратрису или параболу Нейля), являющуюся проекцией поверхности катастрофы сборки в пространстве y, p, q (см. рис. 5 и рис. 6).

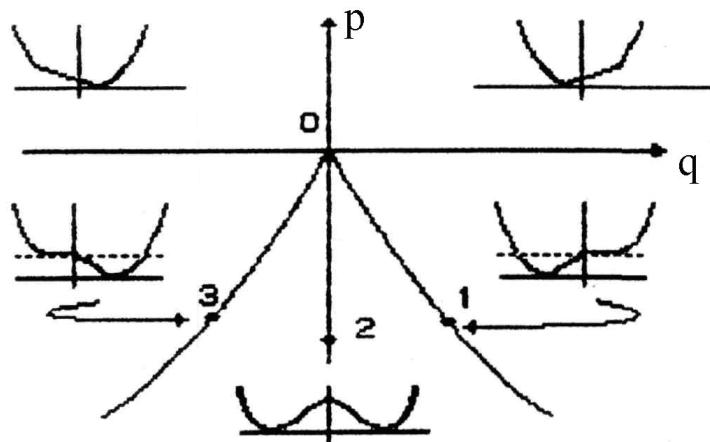


Рис. 6

Точка $p = q = 0$ отвечает трижды вырожденной критической точке функции U (точке сборки).

Полукубическая парабола (3.1.10) представляет собой своеобразную границу, разделяющую плоскость (p, q) на области с различным поведением U , как это показано на рис. 6.

Отметим, что на оси $q = 0$ для $p < 0$ реализуется множество *Максвелла* M , отвечающее структурно неустойчивой функции

$$U = (1/4)y^4 - (|p|/2)y^2 \quad (3.1.11)$$

и характеризуемое тем, что критические значения функции совпадают в двух и более точках. В случае катастрофы сборки при $q = 0$ и $p < 0$ множество M состоит из точек типа 2 (рис. 6). На этой линии, являющейся проекцией двух парабол $y = \pm\sqrt{-p}$ (рис. 5, с; рис. 6), функция U имеет двойной нуль. Необходимо отметить, что рис. 5, с во многом повторяет рис. 4, а в точке $p = q = 0$ (ось q перпендикулярна к плоскости (p, y)) имеет место бифуркация.

Определим, что функция *структурно устойчива*, если для всех малых гладких функций f критические точки возмущенной функции $U + f$ и невозмущенной U имеют один и тот же тип [56. С. 90]. Тип же критической точки определяется второй производной функции в этой точке: если эта производная обращается в нуль, то критическая точка *вырожденная*, а если не обращается, то – *невырожденная (морсовская)*. Следовательно, вблизи морсовой критической точки функция всегда устойчива.

Однако структурно неустойчивому потенциалу (3.1.11) и соответствующему множеству M может быть придан физический смысл [57]. Если двигаться ортогонально линии $q = 0$ (рис. 6) слева направо, то производная по направлению $\partial U / \partial l$ (в плоскости листа) испытывает конечный скачок при пересечении максвелловского множества M

$$\Delta(\partial U / \partial l) = -2\sqrt{-p}, \quad (3.1.12)$$

где $dl^2 = dp^2 + dq^2$.

Такой скачок означает наличие фазового перехода первого рода, когда переменная состояния системы y перескакивает с правого минимума $y = +\sqrt{-p}$ на левый минимум $y = -\sqrt{-p}$ (при выбранном пути следования). Подчеркнем, что при неортогональном к линии $q = 0$ перемещении соотношение (3.1.12) следует умножить на $\sin\theta$, где $\tan\theta = dq / dp$, т. е. первая производная функции U зависит не только от положения точки фазового перехода, но и от направления кривой равновесия при ее пересечении с множеством M .

Таким образом, ликвидируя структурную неустойчивость потенциала (3.1.11), мы лишаемся фазового перехода первого рода. Однако у нас есть возможность иметь дело с фазовым переходом нулевого рода: сама функция в некоторой точке испытывает скачок.

Рассмотрим, к примеру, правую ветвь сепаратрисы на рис. 6 (множество точек типа 1). На этой кривой происходит скачок переменной состояния y с правого минимума $y = 2\sqrt{-p/3}$ на абсолютный минимум $y = -\sqrt{-p/3}$.

При этом

$$\Delta U = U\left(2\sqrt{-p/3}\right) - U\left(-\sqrt{-p/3}\right) = (7/12)p^2 \quad (3.1.13)$$

и не зависит от направления пути к данной точке фазового перехода.

Необходимо еще добавить, что рассмотренные фазовые переходы нелокальны, в то время как фазовый переход второго рода, характерный для точки сборки $p = q = 0$, — локален. Функция U вблизи этой точки, если перемещаться по прямой с точками типа 2 (рис. 6), имеет следующие значения:

$$U = 0, \quad l \geq 0; \quad U = -(1/4)l^2, \quad l \leq 0 \quad (3.1.14)$$

где учтено, что $l^2 = p^2 + q^2$ и $l^2 \equiv p^2$ при $q = 0$, а также принято во внимание условие $U'_y = 0$, дающее связь $p = -y^2 = -l$.

В точке $l = 0$ как функция U , так и ее первая производная (dU/dl) непрерывны, а вторая производная терпит конечный разрыв $\Delta(d^2U/dl^2) = -1/2$.

Совершенно ясно, что существует много систем, описываемых потенциальной функцией $U(x, c)$, где под x и c подразумеваются наборы переменных и управляемых параметров. Кроме того, многие из систем оказываются идентичными, если ввести преобразование координат в пространстве входных и выходных данных c и x .

Для того чтобы отсеять несущественные изменения системы, следует выделить лишь такие свойства функции U , которые имеют чисто топологический характер (при этом допускаются бесконечное число раз дифференцируемые функции U и гладкие изменения координат). Как раз основной результат теории катастроф, *теорема Тома*, и позволяет топологически классифицировать все гладкие потенциальные функции, и такая классификация зависит лишь от числа k управляемых параметров.

Особая важность теоремы Тома заключается в том, что зачастую в приложениях кроме существования функции U ничего больше не известно. Тогда теорема позволяет оправдать выбор небольшого конечного числа

канонических потенциалов в качестве моделей исследуемого процесса, так как какой бы ни была функция U , она будет отличаться от канонической лишь преобразованием координат. Более того, теорема гарантирует структурную устойчивость канонической модели, т. е. истинная модель должна проявлять те же свойства топологического характера, что и каноническая модель [51].

Когда физическая модель находится в положении равновесия, то $\nabla_j U = 0$, где $\nabla_j = \{\partial / \partial x_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$. При этом тип равновесия определяется собственными значениями матрицы устойчивости (матрицы Гессе), $U_{ij} = \partial^2 U / \partial x_i \partial x_j$. Если $\det U_{ij} \neq 0$, то лемма Морса [56, 57] утверждает, что существует *такая гладкая замена переменных, при которой потенциальная функция локально может быть представлена квадратичной формой*

$$U = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2. \quad (3.1.15)$$

Здесь λ_i – собственные значения матрицы устойчивости U_{ij} , взятой в точке равновесия.

С помощью замены $\tilde{y}_i \equiv |\lambda_i|^{1/2} y_i$ (для каждого i) квадратичная форма (3.1.15) записывается в *морсовской канонической форме*

$$U = -\tilde{y}_1^2 - \dots - \tilde{y}_j^2 + \tilde{y}_{j+1}^2 \dots + \tilde{y}_n^2 \equiv M_{(j)}^{(n)}(\tilde{y}), \quad (3.1.16)$$

называемой *морсовским j -седлом*. Следует отметить, что только морсовые 0-седла имеют локальный минимум в точке равновесия, т. е. такие седла локально устойчивы.

Уместно теперь вернуться к вопросу о форме метрики в бесконечно малом (см. п. 1.3). Дело в том, что все первые производные $(D^2)_{,\lambda}$ в точке $P = P'$ равны нулю, а вторые производные в этой же точке $(D^2)_{,\lambda,\rho}$, образуют матрицу, определитель которой с точностью до численного множителя совпадает с определителем метрического тензора $g_{\lambda\rho} : (\det(D^2)_{,\lambda,\rho})_{P=P'} \propto (\det(g_{\lambda\rho}))_{P=P'}$. Если этот определитель отличен от нуля, то выполнены условия леммы Морса существования изолированных, невырожденных критических точек. Так как точки P и P' суть произвольные точки нашего многообразия, то справедливость теоремы Пифагора в малом оказывается эквивалентной **утверждению**:

наше многообразие обладает критическими точками лишь типа локальных минимумов, максимумов или седел. Складки (нарушения однозначности) и точки, где происходят скачки (нарушения непрерывности), локально отсутствуют.

Следовательно, теорема Пифагора приобретает фундаментальное значение, как в малом, так и в большом [23. С.18; 64]. Это означает, в частности, что квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками в произвольном пространстве оказывается равным (1.3.2).

Б. Риман [32] (а вслед за ним и другие) постулировал квадратичность метрической формы в малом как простейшую конструкцию, позволяющую построить наглядную геометрию, но, как показано выше, эта простейшая конструкция одновременно является и единственной.

В макромире у нас нет опытного подтверждения отсутствия непрерывности или неоднозначности у одного и того же тела при его перемещении в каких-либо областях пространства-времени. Кроме того, в локально падающей (локально инерциальной) системе отсчета (в первом приближении) имеем плоское пространство, где справедлива теорема Пифагора.

Определение [57].

Точки, в которых $\nabla_j U = 0$, являются точками равновесия, или критическими точками гладкой функции $U(x_j)$. Критические точки, в которых $\det U_{ij} \neq 0$, называются изолированными, невырожденными или морсовскими.

Определение [57]. Критические точки функции $U(x_j)$, в которых $\det U_{ij} = 0$, являются неизолированными, вырожденными или неморсовскими критическими точками.

Так как тип равновесия зависит не только от критической точки, но и от значений управляющих параметров, то вполне допустима ситуация, когда $\det U_{ij} = 0$, и тогда лемма Морса несправедлива и функция U не может быть представлена в виде (3.1.15) или (3.1.16). Поэтому возникает проблема нахождения канонической формы потенциальной функции в неморсовской критической точке. Эта трудность снимается **леммой расщепления Тома** [57]:

Пусть только l собственных значений обращаются в нуль при значениях управляющих параметров $\{c\} = \{c^0\}$, тогда

$$U(x, c) = f_{NM}(y_1(x, c), \dots, y_l(x, c); c) + \sum_{j=l+1}^n \lambda_j(c) y_j^2(x), \quad (3.1.17)$$

где «плохие» координаты $y_1(x, c), \dots, y_l(x, c)$, отвечающие нулевым $\lambda_i(c)$ ($i = 1, \dots, l$), суть гладкие функции n переменных $\{x\}$ и k параметров $\{c\}$.

«Хорошие» координаты $y_{l+1}(x, c), \dots, y_n(x, c)$, соответствующие ненулевым собственным значениям, являются гладкими функциями только исходных переменных x . В точке (x^0, c^0) матрица устойчивости $\partial^2 f_{NM} / \partial y_i \partial y_j$ ($1 \leq i, j \leq l$) равна нулю.

Однако лемма ничего не говорит о виде f_{NM} , кроме того, что ее разложение в ряд начинается по крайней мере с кубических членов смещения от критической точки.

При соответствующих условиях ($k \leq 5$) отсутствуют особые или симметричные ограничения на семейство потенциальных функций $U(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_k)$, имеет место *классификационная теорема Тома* [56, 57], гарантирующая наличие гладкой замены переменных, при которой функция U может быть записана в канонической форме

$$U = \text{Cat}(l, k) + \sum_{j=l+1}^n \lambda_j(c) y_j^2, \quad (3.1.18)$$

где $\text{Cat}(l, k)$ – *функция катастрофы*, или просто *катастрофа*, определяемая как

$$\text{Cat}(l, k) = \text{CG}(l) + \text{Pert}(l, k). \quad (3.1.19)$$

Функция $\text{CG}(l)$ называется *ростком катастрофы*, или *элементарной катастрофой*, а $\text{Pert}(l, k)$ – ее возмущением. Следовательно, росток катастрофы $\text{CG}(l)$ является неморсовской функцией l переменных, присутствующей в канонической форме потенциальной функции в окрестности неморсовской критической точки x^0 при фиксированных значениях $\{c\} = \{c^0\}$, что означает $\text{Pert}(l, k) = 0$. Функция катастрофы $\text{Cat}(l, k)$ есть функция l переменных и k управляющих параметров, появляющаяся в канонической форме (3.1.19) в окрестности неморсовской критической точки x^0 и «вокруг» значений $\{c^0\}$. В табл. 2 приведены ростки катастроф и их возмущения, а также соответствие с классификацией Арнольда [53] для случаев $k \leq 5$ и $l = 1; 2$.

Полное доказательство классификационной теоремы Тома приведено в [49], где, в частности, указана связь между числом k управляющих параметров и числом типов катастроф:

Таблица 2

k	1	2	3	4	5	\geq	6
число элементарных катастроф	1	2	5	7	11	∞	

В табл. 3 приведено соответствие типов катастрофы по Арнольду и по Тому, а также указаны соответствующие виды ростков и формы возмущений, отвечающие этим катастрофам.

Таблица 3

k	Тип катастрофы по Арнольду	Росток	Возмущение	Название катастрофы по Тому
1	A_2	x^3	a_1x	Складка
2	$A_{\pm 3}$	$\pm x^3$	$a_1x + a_2x^2$	Сборка
3	A_4	x^5	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$	«Ласточкин хвост»
4	$A_{\pm 5}$	$\pm x^6$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$	«Бабочка»
5	A_6	x^7	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$	«Вигвам»
3	D_{-4}	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$	Эллиптическая омбилика
3	D_{+4}	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$	Гиперболическая омбилика
4	D_5	$x^2y + y^4$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$	Параболическая омбилика
5	D_{-6}	$x^2y - y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$	Вторая эллиптическая омбилика
5	D_{+6}	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$	Вторая гиперболическая омбилика
5	$E_{\pm 6}$	$x^3 \pm y^4$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy^3$	Символическая омбилика

В качестве примера реальной физической системы рассмотрим поведение упругого стержня, взятого в виде гибкого прута, сжимая его с помощью нагружающего устройства (см., например, [56–58]). При некоторой нагрузке прут прогнется. Возьмем упрощенный вариант прогиба, заменив изгибом в одной точке, т. е. аппроксимируем стержень системой из двух жестких стержней (шатунов), шарнирными соединениями в точках A, B, C

и пружинкой в точке B с жесткостью γ , стремящейся выпрямить шатуны в одну линию. Примем, что для пружинки справедлив закон Гука, т.е. ее усилие пропорционально углу β : $\gamma\beta$, и она обладает энергией $(\gamma\beta^2/2)$. Для простоты каждый шатун имеет единичную длину, поэтому $\beta = 2\alpha$ (см. рис. 7).

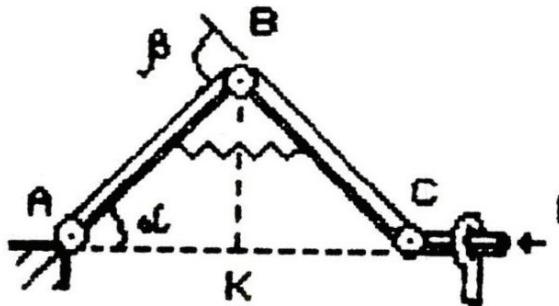


Рис. 7

Общая потенциальная энергия для такой системы запишется как $U = (1/2)\gamma(2\alpha)^2 + 2F\cos\alpha$. Считая α малым и ограничиваясь в разложении членами вплоть до четвертого порядка малости, получим $U \approx (F/12)\alpha^4 + (2\gamma - F)\alpha^2 + 2F$, или $U = a\alpha^4 + b\alpha^2 + \text{const}$, где $a > 0$, а параметр b может изменить знак в зависимости от соотношения между γ и F . Например, когда $F < 2\gamma$, потенциальная функция U имеет морсовский минимум при $a = 0$, т.е. $(\partial^2 U / \partial \alpha^2)_{\alpha=0} = 0$. При $F = 2\gamma$ ($b = 0$), реализуется стандартная точка сборки.

Если же к точке B приложить вертикально вниз постоянную силу G , то функция U перепишется в виде $U = (1/2)\gamma(2\alpha)^2 + 2F\cos\alpha + G\sin\alpha$. В приближении малых α имеем ($\alpha^5 \approx 0$) и $U \approx (F/12)\alpha^4 + (2\gamma - F)\alpha^2 + G(\alpha - \alpha^3/6) + 2F$. Однако член с α^3 может быть убран заменой переменных. Поэтому эта функция эквивалентна потенциалу стандартной сборки $U = a\alpha^4 + b\alpha^2 + c\alpha + \text{const}$. Эта запись структурно устойчива и учитывает несовершенства прута, имеющиеся в действительности.

Вернемся к случаю $G = 0$ и выразим F через α :

$$F = a\alpha^2 - \varphi_0/\alpha^2 + 2\gamma, \quad (3.1.20)$$

где $\varphi_0 = (U - \text{const})$.

Экспериментально же увеличивая нагрузку F , можно измерить отклонение BK (рис. 8) центральной точки B и получить графическую зависимость F от $BK \propto \sin\alpha \propto \alpha$, что и изображено на рис. 8, а, а затем сравнить с теоретическим выводом (рис. 8, б).

При нагружении стержня экспериментально можно наблюдать (согласно [58]), что очень малые боковые отклонения BK будут иметь место вдали от критического значения нагрузки F_C . Вблизи же F_C отклонения BK быстро увеличиваются с ростом F , что и отражено поведением кривой LM (рис. 8, а). В закритическом состоянии (положение M , где прут очень сильно изогнут) жесткость системы увеличивается, замедляя рост BK , связанный с потерей устойчивости. Естественная траектория LM везде устойчива, и движение вдоль нее гладко и обратимо, что отмечено стрелками на рис. 8. Другими словами, разрушения материала не происходит и необратимых деформаций не возникает (поведение материала оказывается упругим), и стержень всегда восстанавливает исходную прямую форму при снятии нагрузки.

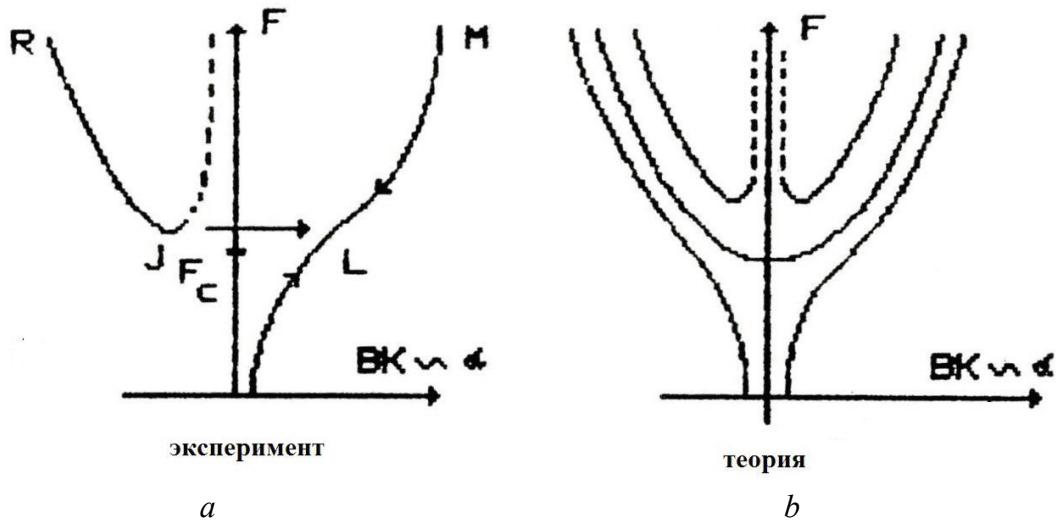


Рис. 8

При высокой сжимающей нагрузке стержень можно привести во второе устойчивое состояние R , «подталкивая» его в случае необходимости. Если затем разгружать стержень, то окажется, что в точке минимума J он перепрыгнет обратно в состояние L на естественной траектории нагрузки и во время такого быстрого динамического хлопка не возникнет изменения мертвовой нагрузки. Дальнейшее нагружение и разгрузка будут отвечать перемещению по LM . Описанный здесь скачок в *предельной точке* J есть пример *катастрофы складки* (рис. 5, с). Необходимо добавить, что на рис. 8 сплошными линиями обозначены устойчивые траектории деформации, а штриховыми – неустойчивые. Кроме того, чтобы в большей степени добиться согласия с экспериментом, следует вводить в математические модели начальные несовершенства, которые всегда присутствуют в реальном стержне.

3.2. Теория катастроф, алгебраическая классификация пространства-времени и фазовые переходы в гравитационном поле

Рассмотренная в п. 2.1 алгебраическая классификация Петрова гравитационных полей связана с решениями кубического характеристического уравнения (2.1.12)

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0, \quad (3.2.1)$$

которое может рассматриваться как условие на критические точки для «потенциальной» функции

$$U = (1/4)\lambda^4 + (1/2)p\lambda^2 + q\lambda, \quad (3.2.2)$$

описывающей катастрофу сборки [63].

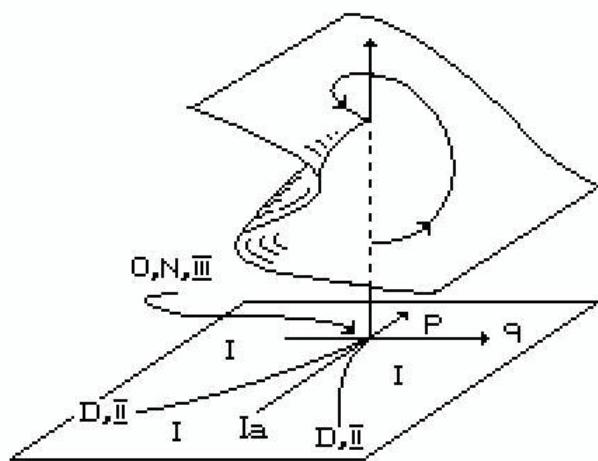


Рис. 9

Задание сепаратрисы (параболы Нейля) уравнением (3.1.10) означает равенство двух корней из трех для уравнения (3.2.1). По алгебраической классификации это соответствует наличию типов D и II . Исключение переменной $y \equiv \lambda$ из уравнений (3.1.9) и (3.1.7) приводит к требованию $q = 0$ (вырожденность матрицы Вейля), что в свою очередь означает $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -\lambda_3 = \sqrt{-p}$, т. е. на множестве Максвелла реализуется тип Ia (см. п. 2.1). Совместное решение уравнений (3.1.7)–(3.1.9)

как алгебраической системы дает точку сборки $p = q = 0$ (трижды вырожденную точку), которой соответствуют типы пространств $0, N, III$. Вся оставшаяся плоскость параметров (p, q) отвечает типу I (см. рис. 9) [13].

С другой стороны, точка сборки является аналогом точки фазового перехода 2-го рода [13, 63], а переход в тип 0 отвечает переходу в наиболее «симметричную» фазу.

Здесь необходимо немного остановиться на теории фазовых переходов в конденсированных состояниях вещества [65. С. 487–496]. При фазо-

вых переходах второго рода состояние тела меняется непрерывным образом, но в точке перехода происходит скачок симметрии фазового состояния тела. В этом случае «...изменение симметрии тела при фазовом переходе второго рода обладает следующим весьма существенным общим свойством: симметрия одной из фаз является более высокой, симметрия другой фазы – более низкой по отношению друг к другу» [65. С. 489]. В теории фазовых переходов конденсированных состояний вещества вводится *параметр порядка* η для количественной характеристики изменения структуры тела. Этот параметр определяется таким образом, чтобы он пробегал отличные от нуля (положительные или отрицательные) значения в несимметричной фазе и был равен нулю в симметричной фазе [65. С. 489]. Кроме того, «...непрерывность изменения состояния при фазовом переходе второго рода математически выражается в том, что вблизи от точки перехода величина η принимает сколь угодно малые значения».

В нашем случае таким параметром порядка выступает величина λ^{20} , удовлетворяющая кубическому характеристическому уравнению (3.2.1) и аналогами «фаз вещества» здесь оказываются алгебраические типы Петрова [13, 63], которые являются «фазовыми состояниями» гравитационного поля [13]. При этом параметр p играет роль температуры; первая производная функции (3.2.2) по p -энтропии, а вторая производная – теплоемкости. Однако у матриц имеется еще собственная характеристика (ранг матрицы), которая ведет себя как теплоемкость твердого тела при фазовых переходах 2-го рода, что и отмечено в [13, 17]. Так, ранги матриц типов O, N, III соответственно равны $r = 0, 1, 2$.

В точке сборки присутствует вырождение по собственным значениям λ (все $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$), поэтому этой точке соответствуют сразу три типа матриц: O, N, III . Кроме того, скачки вторых производных по p от функции U (аналоги теплоемкости) в точке сборки отвечают скачкам рангов матриц Вейля.

Необходимо еще учитывать и то, что матрицы Вейля упомянутых трех типов обладают следующими свойствами: $W_O = 0$ (нильпотент индекса 1), $W_N^2 = 0$ (нильпотент индекса 2), $W_{III}^3 = 0$ (нильпотент индекса 3, при этом $W_{III}^2 = C_N$).

Описанная ситуация с типами пространств наглядно изображена на рис. 10 [13]. Фактически плоскость (p, q) (рис. 10, а) есть проекция трех

²⁰ С другой стороны, величины λ суть инварианты тензора кривизны (тензора Вейля), аналогичные инвариантам электромагнитного поля.

листов, отвечающих классам сопряженности матриц Вейля²¹: нильпотентные классы сопряженности и полупростые классы сопряженности, т. е. содержащие диагональные матрицы (рис. 10, b). Над точкой сборки лежат три класса сопряженности нильпотентных матриц индексов 1, 2, 3 . Над кривой Нейля расположены два полупростых класса сопряженности матриц D и II типов, а над остальными точками – по одному полупростому классу (типы I и Ia ; см. рис. 10). Приведенная на рис. 10, a диаграмма совпадает с классификацией пространств по Сингу (см. табл. 1).

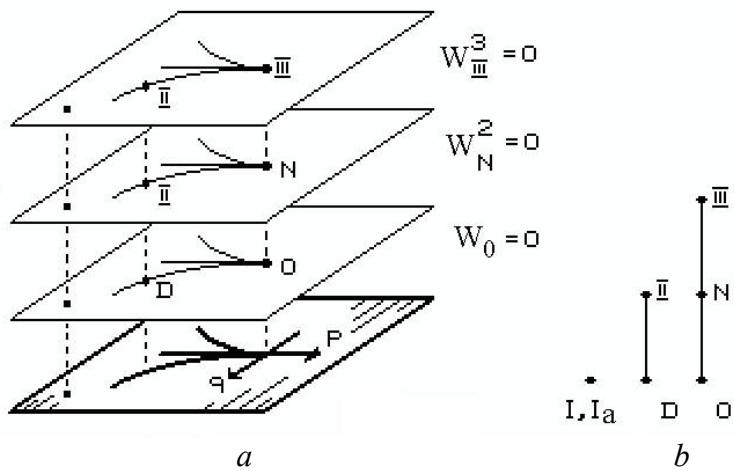


Рис. 10

Следует отметить, что наличие классов сопряженности матриц Вейля снимает вырождение, присущее решению задачи на собственные значения в данном случае. Кроме того, *введение матриц типа Ia* имеет здесь обоснование в виде существования множества Максвелла, при пересечении которого происходит «фазовый» переход 1-го рода, и где потенциальная функция структурно неустойчива (как отмечено в п. 3.1). В этом смысле структурно неустойчив и тип Ia .

Забегая вперед, к этому следует добавить, что все алгебраические типы гравитационных полей (кроме типа I) крайне неустойчивы к малым возмущениям другими типами гравитационных полей, как и показано в работах [15, 16], где получены возможные результирующие типы при конкретных возмущениях. Это и понятно, так как такая смена типа поля связана с фазовыми переходами определенного рода.

²¹ Подобие матриц ($A = TBT^{-1}$, $\det T \neq 0$) является отношением эквивалентности на множестве матриц. Определенные этим отношением классы эквивалентности называются *классами сопряженности*.

Остановимся еще кратко на соответствии между дифференциальными геометрическими характеристиками поверхности катастрофы сборки (см. рис. 9) и алгебраической классификацией Петрова.

Прежде всего, рассмотрим задачу о погружении двумерного многообразия сборки в трехмерное евклидово пространство (как это сделано в [59]). Уравнение поверхности (критическое множество функции (3.2.2), задаваемой кубическим характеристическим уравнением (3.2.1) и изображенной на рис. 9, представим в параметрическом виде

$$\lambda(u, v) \equiv u; \quad p(u, v) \equiv -v; \quad q(u, v) = -u^3 + vu \quad (3.2.3)$$

(исследование имеет смысл проводить только для $p < 0$, т. е. $v > 0$).

Радиус-вектор \vec{r} произвольной точки поверхности и бесконечно малое смещение в окрестности этой точки могут быть записаны как

$$\vec{r} = (u, v, -u^3 + vu); \quad d\vec{r} = \vec{r}_u du^2 + \vec{r}_v dv^2, \quad (3.2.4)$$

где $\vec{r}_u = \partial \vec{r} / \partial u = (1, 0, -3u^2 + v)$; $\vec{r}_v = \partial \vec{r} / \partial v = (0, -1, u)$.

Нормаль к поверхности определяется как векторное произведение $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = (3u^2 - v, -u, 1)$, а ее модуль оказывается равным

$$N = \left(1 + u^2 + (3u^2 - v)^2\right)^{1/2}. \quad (3.2.5)$$

Так как объемлющее 3-пространство – евклидово, то квадрат $d\vec{r}$ задает первую квадратичную форму поверхности в переменных (u, v) :

$$ds_1^2 = |\vec{r}_u|^2 du^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) dudv + |\vec{r}_v|^2 dv^2 \quad (3.2.6)$$

или

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= \left(1 + (3u^2 - v)^2\right) du^2 - 2u(3u^2 - v) dudv + (1 + u^2) dv^2 = \\ &= E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2 = g_{ab} dx^a dx^b, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

где $a, b = 1, 2$; $g_{11} \equiv E(u, v)$; $g_{12} \equiv F(u, v)$; $g_{22} \equiv G(u, v)$; $x^1 \equiv u$; $x^2 \equiv v$.

Многообразие катастрофы сборки представляет собой двумерную поверхность, поэтому соответствующий тензор кривизны будет иметь

лишь одну существенную компоненту R_{1212} , связанную с гауссовой кривизной K как $R_{1212} = K \cdot \det(g_{ab}) = -1/N^2$, где

$$K = -1/N^4 = -\left(1 + u^2 + (3u^2 - v)^2\right)^{-2}, \quad (3.2.8)$$

т. е. поверхность катастрофы сборки имеет отрицательную кривизну.

Следовательно, теперь можно применить процедуру отображения поверхности катастрофы сборки на поверхность 2-тора, как это сделано, например, в работах [72–74].

Критическое множество состоит из точек:

- 1) $u = v = 0$ (трижды вырожденная точка, что отвечает точке $p = q = 0$ или O, N, III типам пространств (см. рис. 9));
- 2) $3u^2 - v = 0$ (дважды вырожденные точки, что соответствует кривой Нейля или D, II типам пространств (см. рис. 9));
- 3) $v = u^2$ (множество Максвелла, т. е. $\lambda = \mp\sqrt{-p}$ или тип пространства Ia (см. рис. 9)).

Отсюда на этих критических множествах получаем следующие значения гауссовой кривизны:

- 1) $K = -1 \Leftrightarrow O, N, III$;
- 2) $K = -(1 + v/3)^{-2} \Leftrightarrow D, II$;
- 3) $K = -(1 + v + 4v^2)^{-2} \Leftrightarrow Ia$.

Во втором и третьем случаях $K \rightarrow -1$ при $v \rightarrow 0$ (т. е. и $u \rightarrow 0$) и $K \rightarrow -0$ при $v \rightarrow \infty$. Следовательно величина гауссовой кривизны ограничена для полупространства $v \geq 0$, как это имеет место, например, для 2-тора, метрика поверхности которого может быть записана как

$$d\tilde{s}^2 = b_0^2 d\xi^2 + (a_0 - b_0 \cos \xi)^2 d\varphi^2, \quad (3.2.9)$$

где $(a_0 - b_0)$ – радиус отверстия «бублика»; b_0 – радиус цилиндра, свернутого и склеенного так, чтобы получился «бублик»; ξ и φ – угловые переменные, изменяющиеся от 0 до 2π .

Гауссова кривизна тора равна

$$K_t = -b_0^{-1} \cos \xi / (a_0 - b_0 \cos \xi), \quad (3.2.10)$$

так что $K_t < 0$ при $-\pi/2 < \xi < \pi/2$; $K_t > 0$ при $3\pi/2 > \xi > \pi/2$ и имеются линии нулевой гауссовой кривизны $K_t = 0$ при $\xi = \pi/2$ и $\xi = 3\pi/2$.

Если рассматривать тор как поверхность, погруженную в трехмерное плоское пространство, то метрику (3.2.9) можно представить в виде

$$d\hat{s}^2 = dZ^2 + dR^2 + R^2 d\varphi^2, \quad (3.2.11)$$

введя $Z(R) = b_0 \sin \xi$; $R = a_0 - b_0 \cos \xi$; $\varphi \equiv \varphi$.

Если теперь приравнять выражения для гауссовых кривизн K и K_t , то можно получить отображение полупространства катастрофы сборки ($-p \geq 0$) на конечный кусок поверхности 2-тора, записываемое как соотношения между переменными R и Z (в пространстве, куда погружен тор) и переменной v :

$$R = a_0 / \left(1 + b_0^2 |K_{(i)}(v)| \right);$$

$$Z = b_0 \left(1 - b_0^2 a_0^2 |K_{(i)}(v)|^2 / \left(1 + b_0^2 |K_{(i)}(v)| \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (3.2.12)$$

где индекс i ($i = 2, 3$) нумерует два варианта записи гауссовой кривизны в зависимости от выбора критического множества (2-го или 3-го вида; см. выше). При этом $R(K_{(i)} = 0) = a_0$; $Z(K_{(i)} = 0) = b_0$; $R(K_{(i)} = -1) \equiv R_0 = a_0 - b_0$, $Z(K_{(i)} = -1) = 0$, а параметры a_0, b_0, R_0 связаны соотношениями: $b_0 = 1/R_0$; $a_0 = R_0 + 1/R_0$.

На рис. 11 показана часть поверхности 2-тора с отрицательной кривизной (внутренняя часть «бублика»), на которую отображено полупространство катастрофы сборки, тесно связанной с алгебраической классификацией: показаны точки и линии на 2-торе, соответствующие алгебраическим типам по Петрову.

Таким образом, мы получили еще одно геометрическое представление катастрофы сборки и ее связи с алгебраической классификацией гравитационных полей кроме ранее приведенного на рис. 9.

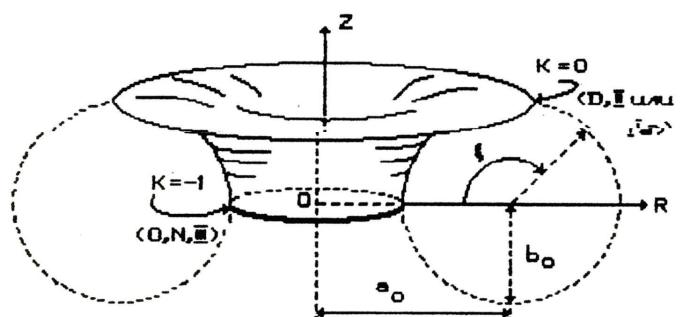


Рис. 11

Г л а в а 4

ФОРМУЛА ГАУССА-БОННЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

4.1. Пространство-время и введение формулы Гаусса-Бонне

Теорема Гаусса-Бонне и связанная с ней формула Гаусса-Бонне обычно используются для четномерных локально евклидовых пространств. Поэтому в 4-мерном пространстве-времени следует рассмотреть двумерные сечения пространственноподобной области.

Пусть в пространстве-времени задана метрика

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.1.1)$$

где $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ – метрический тензор; dx^α – дифференциалы координат; греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

В сопутствующей системе отсчета, задаваемой конгруэнцией $\tau^\mu = dx^\mu / ds = \delta_0^\mu / \sqrt{g_{00}}$, рассмотрим 3-мерное сечение и введем 3-проектор (3-метрику) $b_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - g_{\mu\nu}$. Будем считать его равным $b_{ij} = -g_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$). Тогда метрика 3-пространства, ортогонального линиям времени, может быть записана в виде

$$\Re s^2 = b_{ij} dx^i dx^j = g_{(m)(n)} \theta^{(m)} \theta^{(n)}, \quad (4.1.2)$$

где $g_{(m)(n)} = g_{(m)}^i g_{(n)}^j \delta_{ij} = \delta_{mn} = \delta_n^m = \text{diag}(1, 1, 1)$ – триадная метрика касательного плоского евклидового 3-пространства; $g_{(m)}^i$ – триадные ортонормированные базисные векторы (3-репер или триада): $\{g_{(m)}\} = \vec{e}_{(m)}$; $\theta^{(m)} = g_{(m)i} dx^i$ – базисные 1-формы; $g_{(m)i} g_{(m)j} \delta_{ij} = \delta_j^i$.

Если воспользоваться ковариантным постоянством 3-метрики $b_{ij} = g_{(n)i} g_{(n)j}$ в 3-мерном пространстве, то нетрудно получить

$$Dg_{(m)}^i = \omega_{(m)}^{(n)} g_{(n)}^i \quad \text{или} \quad D\vec{e}_{(m)} = \omega_{(m)}^{(n)} \vec{e}_{(n)}, \quad (4.1.3)$$

где $\omega_{(m)}^{(n)} = -g_{(p);k}^{(n)} g_{(m)}^p dx^k$ – 1-формы связности, которые вместе с формами $\theta^{(m)}$ определяют бесконечно малый сдвиг подвижного репера при его движении; D – оператор ковариантного дифференциала; ковариантная производная обозначена точкой с запятой.

В трехмерном пространстве можно построить три двумерных среза. Рассмотрим один из них: двумерную ориентированную поверхность Σ , т. е. поверхность с определенным направлением нормали. Пусть в каждой точке P этой поверхности взят ортонормированный 3-репер так, что два вектора $\vec{e}_{(1)}$ и $\vec{e}_{(2)}$ будут касательными к поверхности, а единичный вектор, определяющий ориентацию поверхности Σ , связан с ними векторным произведением $\vec{e}_{(3)} = \vec{e}_{(2)} \times \vec{e}_{(1)}$. Это означает, что на 2-поверхности Σ координатный дифференциал dx^i может быть записан как $dx^i = \theta^{(1)} g_{(1)}^i + \theta^{(2)} g_{(2)}^i$ или в векторной форме $d\vec{x} = \theta^{(1)} \vec{e}_{(1)} + \theta^{(2)} \vec{e}_{(2)}$ (здесь $i, j = 1, 2$).

Тогда первые уравнения Картана записутся как

$$d\theta^{(1)} = -\omega_{(2)}^{(1)} \wedge \theta^{(2)}, \quad d\theta^{(2)} = -\omega_{(1)}^{(2)} \wedge \theta^{(1)} \quad (4.1.4)$$

и 2-форма кривизны примет вид

$$\mathfrak{R}^{(1)}_{(2)} = d\omega_{(2)}^{(1)} = (1/2) R^{(1)}_{(2)(1)(2)} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)}. \quad (4.1.5)$$

Для двумерного случая тензор кривизны имеет одну отличную от нуля компоненту, которая с точностью до знака совпадает с гауссовой кривизной $K = -R^{(1)}_{(2)(1)(2)}$, а единственная форма связности представляет собой 1-форму геодезической кривой $\omega_{(1)(2)} = k_g dl$, где l – параметр вдоль этой кривой.

Если взять замкнутую кусочно-гладкую кривую L (цикл), являющуюся границей некоторой области M ($L = \partial M$), и переносить вдоль нее параллельно наш репер, то в общем случае при возвращении в исходную точку векторы репера не совпадут с начальными положениями, даже если цикл гомотопен нулю (т. е. может быть непрерывной деформацией стянут

в точку). Другими словами, начальное и конечное положения векторов репера будут отличаться на некоторый угол φ (после параллельного переноса по циклу L) и в касательной плоскости это можно представить как поворот

$$\begin{pmatrix} \hat{\vec{e}}_{(1)} \\ \hat{\vec{e}}_{(2)} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \hat{\vec{e}}_{(1)} \\ \hat{\vec{e}}_{(2)} \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (4.1.6)$$

или $\hat{g}_{(k)}^i = L_{(k)}^{(p)} g_{(p)}^i$, где $\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}$ – векторы репера в начальный момент в точке P , а $\hat{\vec{e}}_{(1)}, \hat{\vec{e}}_{(2)}$ – векторы репера после параллельного обноса L и возвращения в точку P . Кроме того, $\omega_{(1)}^{(2)} = \vec{e}_{(2)} D\vec{e}_{(1)}$, $\hat{\omega}_{(1)}^{(2)} = \hat{\vec{e}}_{(2)} D\hat{\vec{e}}_{(1)}$. Окончательно, с помощью операции поворота (4.1.6) находим $\hat{\omega}_{(1)(2)} = \omega_{(1)(2)} + d\varphi$, т. е. $d\hat{\omega}_{(1)(2)} = d\omega_{(1)(2)}$.

С учетом этих соотношений проинтегрируем вторые уравнения Картиана (1.4.25) с помощью теоремы Стокса:

$$\int_M \mathfrak{R}_{(1)(2)} = \int_M d\omega_{(1)(2)} = \int_M d\hat{\omega}_{(1)(2)} = \iint_{\partial M} \hat{\omega}_{(1)(2)} - \iint_{\partial M} d\varphi = \varphi - \varphi_0, \quad (4.1.7)$$

где $(\varphi - \varphi_0)$ – угловой избыток (φ_0 – начальное значение угла между кривой и переносимым вектором; φ – конечное значение угла).

На примере сферического треугольника (см. рис. 12) рассмотрим понятие углового избытка ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – внутренние углы). Пусть вектор \vec{A} , имеющий в точке P_1 с кривой P_1P_2 угол θ и с репером \vec{e} угол φ_0 , переносится параллельно в точку P_2 . Как известно, это означает неизменность угла θ при таком переносе. В точке P_2 угол с кривой P_2P_3 составит $\beta = \pi - (\alpha_2 + \theta)$. При параллельном переносе вдоль P_2P_3 в точке P_3 угол с кривой P_3P_1 будет равен $\gamma = \alpha_3 - \beta = \alpha_2 + \alpha_3 + \theta - \pi$. Заканчивая параллельный перенос вектора \vec{A} в точке P_1 (положение вектора \vec{A}), получим угол φ между \vec{A} и \vec{e} , равный $\varphi = \gamma + \alpha_1 + \varphi_0 - \theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi + \varphi_0$.

Отсюда находим угловой избыток треугольника

$$\varphi - \varphi_0 \equiv \Delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi, \quad (4.1.8)$$

т. е. разность между суммой внутренних углов сферического треугольника и суммой внутренних углов плоского треугольника.

Соотношение (4.1.8) можно переписать через внешние углы треугольника $\theta_i = (\pi - \alpha_i)$ как $(\varphi - \varphi_0) \equiv \Delta = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \theta_i$. В частности, при параллельном переносе вектора \vec{A} вдоль n -стороннего многоугольника угловой избыток будет равен

$$\varphi - \varphi_0 \equiv \Delta = 2\pi - \sum_{i=0}^n \theta_i. \quad (4.1.9)$$

В тех случаях, когда граница 2-области представляет собой кусочно-гладкий контур, а сама область не имеет «дырок» (т. е. имеется лишь одна компонента края или границы)²², на основе вышеизложенного выражение (4.1.7) переписывается как

$$\oint_{\partial M} \hat{\omega}_{(1)(2)} - \int_M \mathfrak{R}_{(1)(2)} + \sum_{i=0}^n \theta_i = 2\pi. \quad (4.1.10)$$

Если теперь учесть, что $\mathfrak{R}_{(1)(2)} = (1/2) R_{(1)(2)(1)(2)} \theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)} = -K d\sigma$ ($d\sigma$ – элемент 2-площади), $\hat{\omega}_{(1)(2)} = k_g dl$, то выражение (4.1.10) принимает вид

$$\int_M K d\sigma + \oint_{\partial M} k_g dl + \sum_{i=0}^n \theta_i. \quad (4.1.11)$$

Соотношения (4.1.10) и (4.1.11) суть частные случаи *теоремы Гаусса-Бонне* [66, 67]. Однако можно установить связь углового избытка с одним из топологических инвариантов, т. е. *связать дифференциально-геометрические свойства 2-поверхности с топологическими*.

²² Пусть нам задано хаусдорфово пространство M (см. п. 1.2). Определим, например, через R_+^n замкнутое полупространство пространства R^n (n – мерное евклидово пространство). *Многообразием с краем* [69. С. 110] размерности n называется хаусдорфово пространство M , каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную R_+^n или R^n (внутренние точки M). Те точки, у которых нет такой окрестности, называются *точками края* многообразия с краем M , а множество таких точек называется *краем многообразия с краем* M . Таким образом, *краем* R_+^n , как многообразия с краем, является граничная гиперплоскость. Множество \tilde{M} внутренних точек многообразия с краем M открыто и представляет собой n – мерное многообразие. Край многообразия с краем M будет *границей* множества \tilde{M} и, следовательно, есть замкнутое множество. Поэтому край многообразия с краем M естественно обозначать через ∂M . Короче, если на компактной поверхности выбрать конечное число попарно непересекающихся замкнутых дисков и удалить их внутренности, то получится поверхность с краем. Количество компонент края равно числу выбранных дисков.

Если рассмотреть компактную область M на 2-поверхности с границей ∂M , представляющей собой многоугольник, и подвергнуть ее триангуляции²³ (с числом вершин B , ребер (сторон) P , граней (самых треугольников) Γ), то можно показать [68. С. 355], что полный угловой избыток для области M удовлетворяет соотношению

$$\sum_{k=1}^{\Gamma} \Delta_k = 2\pi(B - P + \Gamma) - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = 2\pi\chi - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i). \quad (4.1.12)$$

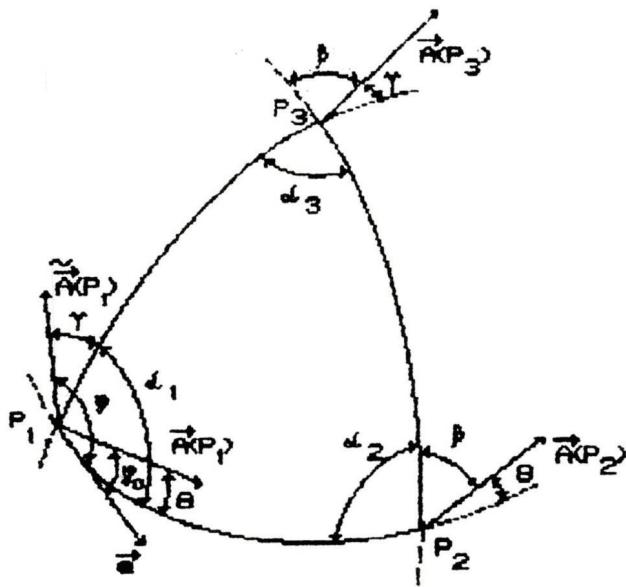


Рис. 12

Следовательно, в полном угловом избытке для области M появляется эйлерова характеристика

$$\chi(M) = B - P + \Gamma. \quad (4.1.13)$$

Окончательно *теорема Гаусса-Бонне* может быть записана в виде

$$\oint_{\partial M} \hat{\omega}_{(1)(2)} - \int_M \mathfrak{R}_{(1)(2)} + \sum_{i=0}^n \theta_i = 2\pi\chi(M) \quad (4.1.14)$$

или в «координатном» представлении,

²³ Триангуляция – разбиение компактной поверхности на треугольники (не обязательно плоские), которое подчинено условиям: любые два треугольника либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют единственную общую вершину, либо пересекаются по одному ребру.

$$\int_M K d\sigma + \oint_{\partial M} k_g dl + \sum_{i=0}^n \theta_i = 2\pi\chi(M). \quad (4.1.15)$$

Для гладкого контура ∂M соотношение (4.1.15) переписывается как

$$\int_M K d\sigma + \oint_{\partial M} k_g dl = 2\pi\chi(M). \quad (4.1.16)$$

Если же 2-поверхность является компактом или граница ∂M есть геодезическая линия (т. е. геодезическая кривизна равна нулю), то получаем

$$\int_M K d\sigma = 2\pi\chi(M) \quad (4.1.17)$$

Полученное выше определение эйлеровой характеристики через триангуляцию компактной 2-области указывает на *топологическую инвариантность* этой характеристики, так как целое число $(B - P + \Gamma)$ зависит только от *топологических* свойств области. Если эта область гомеоморфна сфере, то $(B - P + \Gamma) = 2$ является максимальным положительным числом для 2-поверхностей.

В итоге, можно записать общий результат для эйлеровой характеристики для ориентируемых и неориентируемых пространств как

$$\chi(M) = \begin{cases} 2(1-g), & \text{если } M \text{ ориентируемо}^{24}; \\ 2-n, & \text{если } M \text{ неориентируемо} \end{cases} \quad (4.1.18)$$

где g – род поверхности²⁵. В случае ориентируемого пространства $g = 0$ характеризует сферу, а $g = 1$ – тор. Когда пространство неориентируемо,

²⁴ Двумерное пространство будет ориентируемым, если локальное определение ориентации (например, выбранное направление обхода вокруг некоторой точки) сохранится при перемещении по замкнутой кривой, охватывающей нелокальную область, и возвращении в исходную точку. В противном случае, многообразие – неориентируемо. Евклидова плоскость – ориентируемое многообразие, а лист Мебиуса – неориентируемое многообразие.

²⁵ Максимальное число непересекающихся окружностей, по которым можно разрезать поверхность, не нарушая ее связности. Другими словами, род поверхности – число торов, на которые может быть «разбита» данная ориентируемая поверхность (с последующей заклейкой дисками краев разрезов). Неориентируемая поверхность рода g может быть соответственно «разрезана» на g проективных плоскостей.

то $g=1$ отвечает проективной плоскости, а $g=2$ – бутылке Клейна (односторонний тор).

Эйлерова характеристика триангулированной поверхности с краем определяется так же, как и поверхности без края [70]. Если \tilde{M} есть M после выбрасывания k попарно непересекающихся треугольников (после триангуляции M), то получаем увеличение числа компонент края на k и уменьшение эйлеровой характеристики на это же число:

$$\chi(\tilde{M}) = \chi(M) - k. \quad (4.1.19)$$

Существует топологическая теорема [70. С. 47], сводящая проблему классификации компактных поверхностей к определению их ориентации и эйлеровой характеристики.

Теорема:

Компактные поверхности M_1 и M_2 гомеоморфны тогда и только тогда, когда они обе либо ориентируемые, либо неориентируемые и их эйлеровы характеристики равны.

Что касается некомпактных поверхностей, то здесь положение с определением эйлеровой характеристики сложнее. В частности, под триангуляцией некомпактной поверхности подразумевается то же, что и под триангуляцией компактной поверхности, при этом число треугольников бесконечно и требуется, чтобы каждая точка имела окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом треугольников. Основные результаты, относящиеся к геометрии открытых (некомпактных) двумерных многообразий, были получены С. Э. Кон-Фоссеном, а их изложение можно найти, например, в [68, 69].

Если M не компактно, то любая компактная область пространства M имеет границу. Тогда о члене $\left(-\sum_{i=1}^n(\pi - \alpha_i)\right)$, входящем в (4.1.12), мало что можно сказать. Основная идея Кон-Фоссена и состоит в том, чтобы установить существование компактных областей, для которых этот член принимает пригодную для расчетов форму.

Введем (согласно [69. С. 153–154]) эйлерову характеристику $\chi(M)$ для открытого двумерного ориентируемого многообразия M . Полагаем, что M связно. Если это не так, то $\chi(M) = \sum_{i=1}^n \chi(M_i)$, где M_i – компоненты многообразия M такие, что $M_i \cap M_j = \emptyset$. Пусть $g(M)$ есть род M , а $n(M)$ – конечное число бесконечно удаленных точек, тогда

$$\chi(M) = 2(1 - g(M)) - n(M). \quad (4.1.20)$$

Аналогичным образом определяется $\chi(M)$ для неориентируемых открытых многообразий с краем.

Следует подчеркнуть, что если выколоть эти n бесконечно удаленных точек, то получим n компонент края, и соотношение (4.1.20) совпадет с (4.1.19).

Необходимо сделать еще одно замечание, касающееся использования, например, формулы (4.1.16) для открытых многообразий при стягивании внешней границы к бесконечно удаленной точке. Значение эйлеровой характеристики (правая часть соотношения (4.1.16)) при такой операции может измениться скачком на единицу, в то время как левая часть асимптотически не «почувствует» такого стягивания – и равенство нарушится.

4.2. Общая схема исследований с помощью формулы Гаусса-Бонне

В заключение данной главы остановимся кратко на *схеме применения формулы Гаусса-Бонне к исследованию точных решений уравнений тяготения* [72–74].

1. Прежде всего, необходимо записать метрику пространственного сечения, ортогонального линиям времени (см. (4.1.2)).

2. С помощью уравнений структуры Картана находятся формы связности, триадные компоненты тензора кривизны и определяются с их помощью *секционные кривизны* для каждой фиксированной пары (i, j) с учетом ортогональности базисных векторов (гауссова кривизны двумерных сечений трехмерного пространства):

$$K_p = R_{(i)(j)(i)(j)} / \left(g^k {}_{(l)} g^{(l)} {}_k \right) \left(g^n {}_{(m)} g^{(m)} {}_n \right), \quad (4.2.1)$$

где p нумерует каждую пару (i, j) .

3. В каждом из двумерных сечений берется 2-метрика (если возможно, то в ортогональном базисе)

$$ds^2 = a_{11} (dx^1)^2 + 2a_{12} dx^1 dx^2 + a_{22} (dx^2)^2. \quad (4.2.2)$$

4. В двумерных сечениях рассматривается исследуемая область, границу которой удобней выбрать в виде координатных линий.

5. Опираясь на 2-метрику (4.2.2), вычисляются геодезические кривизны линий $x^1 = \text{const}$, $x^2 = \text{const}$:

$$\begin{aligned}
k \Big|_{g|_{x^1=const}} &= -\left(1/\sqrt{a}\right) \left\{ \partial/\partial x^2 \left(a_{12}/\sqrt{a_{22}} \right) + \partial/\partial x^1 \left(\sqrt{a_{22}} \right) \right\} \\
k \Big|_{g|_{x^2=const}} &= -\left(1/\sqrt{a}\right) \left\{ \partial/\partial x^1 \left(a_{12}/\sqrt{a_{11}} \right) + \partial/\partial x^2 \left(\sqrt{a_{11}} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

6. Полученные результаты подставляются в одно из соотношений (4.1.15)–(4.1.17), а затем по величине и знаку эйлеровой характеристики интерпретируется топологическое поведение исследуемой области данного решения уравнений тяготения.

В этой связи полезно привести формулировку классификационной теоремы для 2-поверхностей [69. С. 242; 71. С. 99]:

Каждое двумерное связное полное риманово многообразие всюду неотрицательной (но не равной тождественно нулю) гауссовой кривизны гомеоморфно либо сфере S^2 , либо проективной плоскости P^2 , либо евклидовой плоскости E^2 .

Конкретный пример применения такого подхода в общей теории относительности для поля светоподобной нити будет приведен в гл. 6.

Г л а в а 5

СВЕТОПОДОБНЫЕ ИСТОЧНИКИ

5.1. О проблеме светоподобных источников в электродинамике и общей теории относительности

Введем понятие светоподобного источника как материального объекта, не имеющего массы покоя m_0 и движущегося со скоростью света c . Такой источник может быть получен в результате соответствующего предельного процесса (светоподобного предела). При этом светоподобный источник может иметь и другие параметры, допускаемые светоподобным предельным переходом.

Задача классической электродинамики о нахождении предельного поля равномерно движущегося электрического заряда хорошо известна (см., например, [35]). Содержание ее заключается в том, что если устремить скорость заряда к скорости света с точки зрения покоящегося инерциального наблюдателя, то электромагнитное поле заряда в пределе приобретает свойства плоской монохроматической электромагнитной волны (т. е. все собственные значения тензора электромагнитного поля вырождаются в нулевые), продольные компоненты напряженностей электромагнитного поля исчезают, а значения поперечных компонент напряженностей возрастают до бесконечности.

Подобная задача в общей теории относительности рассматривалась Пирани [75] для гравитационного поля быстровдвижущейся частицы на уровне симметричной 6×6 матрицы Петрова [5] (6×6 матрицы кривизны), отвечающей внешнему полю Шварцшильда в собственной (сопутствующей) системе отсчета.

В обоих случаях собственные значения как тензора электромагнитного поля, так и матрицы Петрова стремятся к бесконечности в поперечном (перпендикулярном) направлении к направлению движения, когда скорость частицы V приближается к скорости света, принятой здесь наряду с гравитационной ньютоновской постоянной G_N за единицу, $V \rightarrow c = 1$.

Однако корректное решение двух упомянутых выше проблем связано с использованием обобщенных функций (δ -функций Дирака) [76] в предельном переходе, суть которого состоит в том, что величина скорости V частицы устремляется к скорости света c , а масса покоя частицы устремляется к нулю ($m_0 \rightarrow 0$) так, чтобы полная релятивистская энергия частицы оставалась постоянной, $E = \text{const}$. В дальнейшем будем называть процедуру такого предельного перехода *светоподобным пределом*.

Распространяя такую предельную процедуру на ряд частицеподобных источников в общей теории относительности (ОТО), можно получить решения уравнений тяготения, описывающие классические *светоподобные* сингулярные безмассовые источники как скалярного, так и векторного типов: *лайтоны* (*lightons*) и *геликсоны* (*helixons*). При этом в результате применения вышеупомянутой процедуры к частицеподобным источникам не все физические параметры, присущие этим частицам, сохраняются в предельном случае.

Далее будем использовать понятие матрицы Вейля как симметричной бесследовой 3×3 комплексной матрицы Петрова в евклидовом 3D пространстве [5].

Аналогичную предельную процедуру на уровне собственных значений матрицы Вейля будем называть далее как *светоподобный предел на уровне матрицы Вейля*. Такой светоподобный предел может быть описан как катастрофа сборки.

Цель данной главы – суммировать результаты светоподобных пределов частицеподобных источников Шварцшильда, Керра и НУТ как на уровне предельных метрик, так и на уровне матриц Вейля, а также исследовать связь с теорией катастроф (фазовые переходы между алгебраическими типами гравитационных полей). В связи с этим следует только отметить, что светоподобные пределы для внешней метрики Шварцшильда были исследованы в разных координатных системах в работах [76–79].

В итоге можно выделить следующие проблемы, на которые здесь будет обращено внимание.

- Светоподобные пределы метрик, соответствующих решениям Шварцшильда, Керра (решение для частицы с собственным моментом импульса), НУТ (решение с дуальным к массе параметром).
- Светоподобные пределы матриц Вейля, соответствующих решениям Шварцшильда, Керра, НУТ.
- Светоподобные пределы матриц Вейля как катастрофы для массивной шварцшильдовской частицы, керровской частицы и частицы с параметром НУТ.
- Светоподобные источники не имеют «волос» (все параметры при светоподобном переходе сбрасываются, кроме энергии и спиральности).

5.2. Светоподобный предел массивной шварцшильдоподобной частицы на уровне матрицы Вейля

Прежде всего, возьмем частицу, внешнее гравитационное поле которой будем считать полем Шварцшильда, которое является статическим в

системе отсчета сопутствующего наблюдателя. Другими словами, выбираем частицеподобное решение уравнений Эйнштейна, известное как статическое решение Шварцшильда (см., например, [80]). При этом статические поля относятся к полям «электрического» типа (см. п. 2.2), так как все собственные значения такой матрицы вещественны [5. С. 418]. Соответствующая каноническая матрица Вейля относится к типу D согласно алгебраической классификации четырехмерного пространства-времени по Петрову-Пенроузу (табл. 1) с собственными значениями $\lambda_1 = 2m_0/r_0^3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -m_0/r_0^3$:

$$W_{Sch} = W_D = \frac{m_0}{r_0^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.2.1)$$

где \hat{W}_D – каноническая бесследовая матрица Вейля типа D по алгебраической классификации, m_0 – масса покоя частицы, r_0 – радиальная переменная: $r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$, переменные x, y, z суть декартовы координаты в 3-пространстве.

Далее выберем систему отсчета покоящегося наблюдателя (лабораторную систему отсчета) вместе со специальной системой координат, в которой реализуется канонический вид матрицы Вейля.

Заставим теперь эту частицу двигаться с некоторой скоростью V вдоль оси z . Для этого применим к матрице Вейля (5.2.1) преобразования Лоренца, которые в данном случае описываются ортогональной 3×3 комплексной матрицей

$$T = \begin{pmatrix} ch\psi & i sh\psi & 0 \\ -i sh\psi & ch\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

отвечающей преобразованию Лоренца в пространстве-времени и удовлетворяющей условиям: $T^{-1}T = \tilde{T}T = TT^{-1} = T\tilde{T} = 1$, $\det T = +1$, транспонированная матрица $\tilde{T} = T^{-1}$ (значком «волна» обозначена операция транспонирования матрицы), $i^2 = -1$; $ch\psi = (1 - V^2)^{-1/2}$; $sh\psi = V(1 - V^2)^{-1/2}$. Переход $V \rightarrow 1$ соответствует пределу $\psi \rightarrow \infty$. Пренебрегая при больших значениях ψ величинами $\exp(-\psi)$, получим $sh\psi \approx (1/2)\exp(\psi)$, $ch\psi \approx (1/2)\exp(\psi)$, т. е. при $\psi \rightarrow \infty$ матрица T вырождается в матрицу с рангом, меньшим исходного.

Тогда в покоящейся системе отсчета для гравитационного поля массивной частицы на уровне матрицы Вейля можно записать

$$W = T W_{Sch} \tilde{T} = \frac{E \varepsilon^2}{R^3} W(\varepsilon), \quad (5.2.3)$$

где $\varepsilon = (1 - V^2)^{1/2}$; $E = \frac{m_0}{\varepsilon}$ – полная энергия частицы, $E = \text{const}$; $R^2 = \rho^2 \varepsilon^2 + (z + Vt)^2$; $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Перепишем матрицу W из (5.2.3) в виде

$$W = \frac{m_0}{(R^3(1 - V^2 \sin^2 \theta)^{3/2})} \begin{pmatrix} 2 + V^2 & -3iV & 0 \\ -3iV & -(1 + 2V^2) & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - V^2) \end{pmatrix}, \quad (5.2.4)$$

где $\vec{R} = (x, y, z + Vt)$, θ – угол между направлением движения и радиус-вектором \vec{R} .

Итак, еще до предельного перехода появляются «магнитные» компоненты матрицы Вейля, зависящие от скорости V . В пределе $V \rightarrow 1$, $(\theta \rightarrow \frac{\pi}{2})$ матрица W вырождается в матрицу типа N (чисто поперечное поле)

$$W \rightarrow \frac{3m_0}{R_0^3} (1/\cos^3 \theta) W_N, \quad (5.2.5)$$

где

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.6)$$

есть матрица типа N (волновой тип пространства-времени), описзывающая присутствие поперечно-поперечной гравитационной волны; $\vec{R}_0 = (x, y, z + t)$, θ – угол между направлением движения и \vec{R}_0 . Когда $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, собственные значения матрицы (5.2.5) стремятся к бесконечности.

Фактически получили результат работы [75] для шварцшильдовской 3×3 комплексной бесследовой матрицы Вейля, отвечающей гравитационному полю частицеподобного источника. Однако в отличие от этой работы

можно получить конечные выражения в смысле обобщенных функций [76, 78, 79], если одновременно с предельным переходом $V \rightarrow 1$ устремить массу m_0 частицы к нулю, считая, что энергия $E = m_0(1 - V^2)^{-1/2}$ при этом остается постоянной.

Для этого снова вернемся к выражению (5.2.3). Представим матрицу Вейля $W(\varepsilon)$ как

$$W(\varepsilon) = \varepsilon^2 C_D + 3(W_N^{(E)} + iV \cdot W_N^{(B)}), \quad (5.2.7)$$

где C_D – матрица Вейля алгебраического типа D ,

$$C_D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (5.2.8)$$

матрица «электрического» типа $W_N^{(E)}$ и матрица «магнитного типа» $W_N^{(B)}$ – суть две части матрицы Вейля алгебраического типа N

$$W_N = W_N^{(E)} + i W_N^{(B)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.9)$$

которая отвечает поперечно-поперечной плоской гравитационной волне, распространяющейся вдоль оси z .

В электродинамике в подобной ситуации при переходе от лабораторной инерциальной системы отсчета, где присутствовало только электрическое поле, в произвольную инерциальную систему отсчета, движущуюся с некоторой постоянной скоростью относительно исходной, напряженность электромагнитного поля может быть представлена комплексным вектором $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{B}$ с вектором напряженности электрического поля \vec{E} и вектором индукции магнитного поля \vec{B} .

Здесь необходимо отметить, что матрица Вейля N типа (волнового типа) может быть еще записана в «скелетной» форме

$$\hat{W}_N = l\tilde{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} (1, \quad i, \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.10)$$

где $\tilde{l} = (1, \quad i, \quad 0)$ – собственный светоподобный вектор с нулевой длиной, $\tilde{l}\tilde{l} = 0$.

Перейдем к нахождению предельного вида матрицы Вейля (5.2.3), введя обозначения $\xi = z + Vt$ для «текущей переменной» и $\eta = z + t$ для опережающего времени, хотя это чисто условно, так как знак в $t \pm z$ связан с выбором направления движения частицы относительно покоящегося наблюдателя и смена знака « \rightarrow » с изменением знака у скорости V в матрице (5.2.2), т. е. со сменой направления движения.

Физическая суть рассматриваемого предельного перехода заключается в том, что скорость V в каждый момент времени остается постоянной, хотя и меняется как параметр. Другими словами, имеется бесконечная последовательность инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянными скоростями так, что каждая последующая система отсчета движется относительно предыдущей с большей по величине скоростью. Меняя параметр V , мы просто меняем систему отсчета, в которой находится частица.

Наша задача заключается в том, чтобы выяснить, что произойдет, когда скорость частицы совпадет со скоростью света. При этом следует иметь в виду, что увеличение скорости может приводить к изменению (в том числе и в сторону возрастания) физических характеристик частицы. Это означает, что наряду с пределом $V \rightarrow 1$ требуется ввести дополнительные предельные ограничения на эти физические характеристики. В частности, при рассмотрении предельного перехода в (5.2.3) наряду с пределом $\varepsilon \rightarrow 0$ ($V \rightarrow 1$) потребуем, чтобы масса покоя частицы стремилась к нулю, $m_0 \rightarrow 0$ так, чтобы полная энергия $E = m_0 / \varepsilon$ при таком светоподобном предельном переходе оставалась постоянной.

Другой особенностью такого предельного перехода является то, что необходимо исследовать не только наличие обычного предела при $V \rightarrow 1$, но и предела в смысле обобщенных функций, т. е. выяснить, существует ли отличный от нуля предел интеграла от исследуемой функции на всем бесконечном интервале изменения переменной ξ . Тогда можно говорить, что подынтегральная функция имеет своим пределом обобщенную функцию, частным случаем которой является известная δ -функция Дирака.

Прежде всего, рассмотрим предел интеграла при $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 (\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{-3/2} d\xi, \quad (5.2.11)$$

который оказывается равным $2/\rho^2$. Обычный предел подынтегральной функции равен нулю.

Так как предел интеграла (5.2.11) на бесконечных пределах оказывается равным конечной величине, то это означает, что под интегралом стоит

величина, пропорциональная δ -функции Дирака. Поэтому полный предел подынтегральной функции можно записать через δ -функцию Дирака

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^2 (\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{-3/2}] = \frac{2}{\rho^2} \delta(\eta) = \frac{2}{x^2 + y^2} \delta(z + t). \quad (5.2.12)$$

Учитывая этот результат и факт постоянства полной энергии при светоподобном пределе, получаем в (5.2.3)

$$\frac{E \varepsilon^2}{R^3} \rightarrow \frac{2E}{\rho^2} \delta(z + t). \quad (5.2.13)$$

Тогда светоподобный предел матрицы Вейля (5.2.7) будет равен

$$W(\varepsilon) \rightarrow 3W_N, \quad (5.2.14)$$

т. е. получаем в пределе матрицу Вейля плоской гравитационной волны алгебраического типа N .

В итоге светоподобный предел матрицы Вейля (5.2.3) быстро движущейся массивной частицы может быть представлен как [76, 81]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W = \frac{6E}{\rho^2} \delta(z + t) W_N, \quad (5.2.15)$$

а скалярную светоподобную безмассовую частицу, гравитационное поле которой описывается такой сингулярной матрицей Вейля, будем называть *лайтоном (lighton)*.

5.3. Светоподобный предел в электродинамике

Полезно сравнить полученное выражение (5.2.10) с предельным полем быстро движущегося электрического заряда со скоростью V . Как известно, электромагнитное поле движущегося электрического заряда имеет вид [35]

$$\vec{E} = e \frac{1 - V^2}{R^3} \vec{R}; \quad \vec{B} = [\vec{V} \vec{E}], \quad (5.3.1)$$

где e – электрический заряд частицы; \vec{E} , \vec{B} суть векторы напряженности электрического поля и индукции магнитного поля соответственно, $\vec{R} = (x, y, z + Vt)$.

Переход к светоподобному пределу (в данном случае масса покоя не входит в выражения (5.3.1)) осуществляется здесь путем устремления скорости заряда к скорости света. Как уже упоминалось, корректный предельный переход проводится с помощью обобщенных функций. Обычный предел $V \rightarrow 1$ соотношений (5.3.1) равен нулю. Поэтому следует рассмотреть предел в смысле обобщенных функций.

Воспользуемся результатом (5.2.12). В итоге получим, что продольные компоненты электромагнитного поля исчезают и остаются лишь поперечные [20, 76]

$$E_z = 0; \quad E_x = e \frac{2x}{x^2 + y^2} \delta(z + t); \quad E_y = e \frac{2y}{x^2 + y^2} \delta(z + t); \quad (5.3.2)$$

$$B_z = 0; \quad B_x = -E_y; \quad B_y = E_x. \quad (5.3.3)$$

При этом оба инварианта электромагнитного поля $(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$ и $(\vec{E} \cdot \vec{B})$ формально равны нулю как у плоской электромагнитной волны.

Другими словами, в результате проведенного предельного перехода на уровне обобщенных функций получили сингулярную плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью света.

Для того чтобы найти предел электрического потенциала такого поля, необходимо найти предел выражения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{-1/2}. \quad (5.3.4)$$

Обычный предел (5.3.4) оказывается равным $1/|\eta|$, а предел в смысле обобщенных функций находится следующим образом. Возьмем предел интеграла

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{1/2}} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 \rho d\xi}{(\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{3/2}} = -2 \ln \rho, \quad (5.3.5)$$

который равен конечной величине.

В итоге для подынтегральной функции запишем полный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi^2 + \varepsilon^2 \rho^2)^{-1/2} = \frac{1}{|\eta|} - 2 \ln \rho \delta(\eta). \quad (5.3.6)$$

Вычисляя дивергенцию от вектора напряженности электрического поля \vec{E} , приходим к волновому уравнению с сингулярным источником, движущимся со скоростью света,

$$\operatorname{div} \vec{E} \square = \square \Phi = 4\pi e \delta(x) \delta(y) \delta(z + t), \quad (5.3.7)$$

где \square – оператор Д'Аламбера в пространстве-времени Минковского, Φ – функция, равная выражению (5.3.6), умноженному на заряд e , т. е. это – потенциал электрического поля заряда, движущегося со скоростью света,

$$\Phi = e \left(\frac{1}{|z + t|} - 2 \ln \rho \delta(z + t) \right), \quad (5.3.8)$$

Присутствие в конечных выражениях электрического заряда указывает на нефизичность полученного волнового предела, так как электромагнитная волна не несет электрического заряда.

5.4. Светоподобный предел метрики Шварцшильда

Рассмотрим теперь метрику решения Шварцшильда, записанную в форме Керра-Шилда [76, 81]

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 2H l_\mu l_\nu, \quad (5.4.1)$$

где $\delta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$; $H = m_0/r$; $l_\mu = (t + r), \mu$.

Проведем для этой метрики процедуру рассмотренного выше предельного перехода.

Квадрат интервала (5.4.1) инвариантен относительно преобразований Лоренца, поэтому после их применения

$$z \rightarrow \frac{(z + Vt)}{(1 - V^2)^{1/2}}, \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad (5.4.2)$$

получим

$$ds^2 = ds_0^2 - 2\tilde{H}\tilde{l}_\mu\tilde{l}_\nu\tilde{dx}^\mu\tilde{dx}^\nu \quad (5.4.3)$$

где

$$\tilde{H} = E \left\{ (z + Vt)^2 + (1 - V^2)(x^2 + y^2) \right\}^{-1/2}, \quad (5.4.4)$$

\tilde{l}_μ , \tilde{dx}^μ являются преобразованными величинами; $m_0 = E(1 - V^2)^{1/2}$; $E = \text{const.}$

В классе обобщенных функций справедливы следующие пределы:

$$H_0 = \lim_{V \rightarrow 1} \tilde{H} = E \left(|z + t|^{-1} - 2\delta(z + t) \ln(x^2 + y^2)^{1/2} \right); \quad (5.4.5)$$

$$\lim_{V \rightarrow 1} (\tilde{H} \tilde{l}_3^2) = \lim_{V \rightarrow 1} (\tilde{H} \tilde{l}_3) = H_0; \quad \lim_{V \rightarrow 1} \tilde{l}_0 = 1; \quad (5.4.6)$$

$$\lim_{V \rightarrow 1} \left\{ \tilde{H} \tilde{l}_1^2 (1 - V^2) \right\} = \lim_{V \rightarrow 1} \left\{ \tilde{H} \tilde{l}_2 (1 - V^2)^{1/2} \right\} = 0; \quad (5.4.7)$$

$$\lim_{V \rightarrow 1} \left\{ \tilde{H} \tilde{l}_2^2 (1 - V^2) \right\} = \lim_{V \rightarrow 1} \left\{ \tilde{H} \tilde{l}_2 (1 - V^2)^{1/2} \right\} = 0; \quad (5.4.8)$$

$$\lim_{V \rightarrow 1} \left\{ \tilde{H} \tilde{l}_3 \tilde{l}_1 (1 - V^2)^{1/2} \right\} = \lim_{V \rightarrow 1} \left\{ \tilde{H} \tilde{l}_3 \tilde{l}_2 (1 - V^2)^{1/2} \right\} = 0; \quad (5.4.9)$$

$$\lim_{V \rightarrow 1} \left\{ \tilde{H} \tilde{l}_2 \tilde{l}_1 (1 - V^2) \right\} = 0, \quad (5.4.10)$$

которые находятся с помощью уже полученных пределов (5.2.12), (5.3.6), либо аналогично им.

Тогда предельная метрика, отвечающая (5.4.3.), снова приводится к виду Керра-Шилда, но с другим светоподобным вектором κ_μ [76, 81],

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 8H_0 \kappa_\mu \kappa_\nu, \quad (5.4.11)$$

где $\kappa_\mu = (t + z)_{,\mu}$; $\det g_{\mu\nu} = -1^{26}$.

²⁶ Справедлива теорема: если некоторый тензор представим в виде $(g_{\mu\nu} - A_{\mu\nu})$, где $A_{\mu\nu}$ – бесследовый нильпотент индекса два, то определитель этого тензора равен определителю тензора $g_{\mu\nu}$ ⁽⁰⁾ [84].

Здесь необходимо отметить, что в работе [77] метрика (5.4.11) была получена из решения Шварцшильда, записанного в однородных координатах.

Преимущество записи (5.4.11) очевидно при вычислении компонент тензоров кривизны и Вейля. Кроме того, можно всегда переопределить параметр E , выбрав его, например в (5.4.1.1) как $E \rightarrow E/2$, чтобы $8H_0 \rightarrow 2H_0$ с функцией H_0 , равной удвоенной функции (5.4.5). После такого переопределения приходим к стандартной записи метрики в форме Керра-Шилда

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 2H_0 \kappa_\mu \kappa_\nu. \quad (5.4.12)$$

Используя теперь тетрады

$$g_{(\alpha)}^\lambda = \delta_\alpha^\lambda + H_0 \kappa^\lambda \kappa_\alpha^{27}, \quad (5.4.13)$$

находим тензор кривизны

$$R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = 2(H_0)_{,\alpha,[\gamma} \kappa_{\delta]} \kappa_\beta - 2(H_0)_{,\beta,[\gamma} \kappa_{\delta]} \kappa_\alpha \quad (5.4.14)$$

и тензор Риччи

$$R_{(\beta)(\gamma)} = -(H_0)_{,\alpha}{}^{\alpha} \kappa_\beta \kappa_\gamma = (\square H_0) \kappa_\beta \kappa_\gamma. \quad (5.4.15)$$

Подставляя выражение для функции H_0 и учитывая, что действие оператора Лапласа на $\ln(x^2 y^2)^{1/2}$ дает $2\pi\delta(x)\delta(y)$, получаем линейные уравнения Эйнштейна для метрики (5.4.15), которые представляют собой волновое уравнение [76]

$$(\square H_0) \kappa_\beta \kappa_\gamma = -8\pi E \delta(z+t) \delta(x) \delta(y) \kappa_\beta \kappa_\gamma = -8\pi T_{\beta\gamma}, \quad (5.4.16)$$

или

$$\square g_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (5.4.17)$$

где $T_{\beta\gamma}$ – тензор энергии-импульса, отвечающий *точечному светоподобному источнику* [81], [85–86].

²⁷ Тетрадная метрика $g_{(\alpha)(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Воспользовавшись соотношениями

$$(\ln \rho)_{,x,x} = \left(y^2 - x^2 \right) / \rho^4 + \delta(x) \delta(y) \int_{\partial G} x dy / \rho^2; \quad (5.4.18)$$

$$(\ln \rho)_{,y,y} = \left(x^2 - y^2 \right) / \rho^4 - \delta(x) \delta(y) \int_{\partial G} x dy / \rho^2, \quad (5.4.19)$$

где ∂G – граница области изменения переменных x и y , находим 3×3 комплексную матрицу Вейля типа N

$$\hat{C}_N = 4E \delta(z+t) \left((x+iy)^2 / \rho^4 \right) C_N, \quad (5.4.20)$$

где матрица C_N совпадает с (5.2.6) и при поворотах (5.2.2) на «угол» $\psi \rightarrow -i\psi$ остается пропорциональной самой себе

$$W = T(-i\psi) C_N \tilde{T}(-i\psi) = \exp(-i\psi) W_N. \quad (5.4.21)$$

Если применить такую операцию к матрице (5.2.2) и выбрать $\psi = \operatorname{arctg}(y/x)$, то приходим к совпадающей (с точностью до численного множителя) с (5.2.15) матрице

$$W = \left(4E / p^2 \right) \delta(z+t) W_N. \quad (5.4.22)$$

В заключение необходимо отметить следующее. Интегральный предел (5.3.5) инвариантен относительно замены $\rho \rightarrow \alpha \cdot \rho$ с $\alpha = \text{const} > 0$ (при этом и $\xi \rightarrow \alpha \xi$). Полный интеграл (5.3.6) в этом случае оказывается равным $(1/\alpha)(1/|\eta| - 2\delta(\eta) \ln(\alpha\rho))$ с учетом $\delta(\alpha\eta) = (1/\alpha) \delta(\eta)$. Таким образом, если перейти в выражении (5.4.5) для функции H_0 к новому параметру $E \rightarrow \alpha E$, то получим новую функцию

$$H_0 = E \left(\frac{1}{|z+t|} - 2\delta(z+t) \ln \left(\alpha (x^2 + y^2)^{1/2} \right) \right), \quad (5.4.23)$$

для которой явное выделение безразмерного выражения под логарифмом $([\alpha] = \text{см}^{-1})$ не влияет на уравнения поля (5.4.17), так как действие оператора Лапласа на выражения $\ln(\alpha\rho)$ и $\ln \rho$ дает один и тот же результат.

Преобразованная запись функции H_0 позволяет выделить две области поведения ее в зависимости от значений $\alpha\rho > 1$ или $\alpha\rho < 1$, а условие $\alpha\rho = 1$ задает *горизонт* в виде окружности.

Если ввести переменные запаздывающего $u = t - z$ и опережающего времени $v = t + z$ соответственно, то, принимая во внимание (5.4.12), можно записать квадрат 4-интервала в виде

$$ds^2 = (\delta_{\mu\nu} - 2H_0\kappa_\mu\kappa_\nu)dx^\mu dx^\nu = dudv - dx^2 - dy^2 - 2H_0dv^2. \quad (5.4.24)$$

Сингулярность $1/v$ в функции H_0 из (5.4.23) исключается координатным преобразованием

$$u \rightarrow u + 2E \ln|v|; \quad v \rightarrow v. \quad (5.4.25)$$

Следовательно, можно ввести новую функцию

$$H_0 \rightarrow H_0 = -2E \delta(v) \ln(\alpha\rho), \quad (5.4.26)$$

которая обращается в нуль ($H_0 = 0$) на горизонте $\alpha\rho = 1$.

Таким образом, в результате светоподобного предельного перехода из внешнего решения Шварцшильда получено решение, описывающее сингулярный светоподобный скалярный источник: *лайтон* (*lighton*). Гравитационное поле, создаваемое *лайтоном*, описывается метрикой (5.4.24) с функцией H_0 из (5.4.26). При этом, как и для внешнего поля Шварцшильда, существует горизонт, на котором функция $H_0 = 0$.

5.5. Светоподобный предел метрики НУТ

Другое известное решение – решение Ньюмена, Унти и Тамбурино (НУТ) [86], являющееся обобщением внешнего решения Шварцшильда и описывающее внешнее статическое сферически симметричное гравитационное поле типа *D* островного источника, обладающего наряду с обычной *массой покоя* еще и *дуальной массой*, представляющей собой гравитационный аналог магнитного монополя.

Метрика НУТ может быть записана двумя путями: сначала как это сделано в работе [87]

$$ds^2 = F \left(dt + 4b \sin^2(\theta/2) d\phi \right)^2 - dr^2/F - \left(r^2 + b^2 \right) \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right); \quad (5.5.1)$$

а затем, как в [88]

$$ds^2 = F \left(d\tau - 2b \cos \theta d\varphi \right)^2 - dr^2 / F - \left(r^2 + b^2 \right) \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (5.5.2)$$

где $F = 1 - 2 \left(m_0 r + b^2 \right) \left(r^2 + b^2 \right)^{-1}$; m_0 – масса покоя источника, b параметр НУТ (дуальная масса); r – радиальная, θ, φ – угловые переменные; t и τ связаны координатным преобразованием

$$\tau = t + 2b\varphi. \quad (5.5.3)$$

При $b = 0$ решение НУТ переходит в известное решение Шварцшильда в координатах кривизн.

Прежде чем приступить к нахождению светоподобного предела выше приведенной метрики, перепишем ее в виде

$$ds^2 = F \left(dt + 2b \left(xdy - ydx \right) / \left(r(r+z) \right) \right)^2 - \left(\left(1/F \right) l_i l_j + \left(1 + b^2 / r^2 \right) h_{ij} \right) dx^i dx^j \quad (5.5.4)$$

и

$$ds^2 = F \left(d\tau - 2b \left(z/r \right) \left(xdy - ydx \right) / \left(r^2 - z^2 \right) \right)^2 - \left(\left(1/F \right) l_i l_j + \left(1 + b^2 / r^2 \right) h_{ij} \right) dx^i dx^j, \quad (5.5.5)$$

где $l_i = r_{,i}$; $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$; $h_{ij} = \delta_{ij} - l_i l_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Далее, используя инвариантность квадрата интервала относительно преобразований Лоренца, перейдем к новым переменным по правилу

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x; \quad y \rightarrow y; \quad z \rightarrow (z + Vt) / \left(1 - V^2 \right)^{1/2} \equiv (z + Vt) / \varepsilon, \\ t &\rightarrow (t + Vz) / \left(1 - V^2 \right)^{1/2} \equiv (t + Vz) / \varepsilon, \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

или

$$\tau \rightarrow (\tau + Vz) / \left(1 - V^2 \right)^{1/2} \equiv (\tau + Vz) / \varepsilon \quad (5.5.7)$$

и потребуем, чтобы при $V \rightarrow 1$ масса покоя m_0 и НУТ-параметр b стремились к нулю так, чтобы энергия $E = m_0 / \varepsilon$ и новый параметр $B = b / \varepsilon$ оставались постоянными.

Для НУТ-параметра выбрано такое преобразование по двум причинам. Во-первых, из-за интерпретации его как дуальной массы, и, во-вторых, чтобы полученная предельная метрика переходила при $B=0$ в метрику светоподобной частицы (*лайтона*), соответствующей предельному случаю шварцшильдовского источника.

Для определенности рассмотрим сначала метрику (5.5.5) и выделим из нее квадрат интервала пространства Минковского $ds_0^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, который инвариантен относительно преобразований (5.5.6)-(5.5.7) и предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$, $m_0 \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$. В выражении (5.5.5) после этого остается часть

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 = & (F-1)d\tau^2 - 4Fbl_3 \left((xdy - ydx)/(x^2 + y^2) \right) d\tau + \\ & + 4Fb^2 l_3^2 \left((xdy - ydx)^2 / (x^2 + y^2)^2 \right) - ((1/F)-1)l_i l_j + \\ & + (b/r)^2 h_{ij} \left(dx^i dx^j \right), \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

применение к которой преобразований Лоренца и указанных предельных переходов требует нахождения ряда пределов. В силу громоздкости вычислений приведем лишь отличные от нуля предельные выражения (стрелка обозначает не только предельный переход, но и применение преобразований (5.5.6)–(5.5.7) [85]

$$(F-1)d\tau^2 \rightarrow -2E \left(1/(\tau+z) - 2\delta(\tau+z) \ln(x^2 + y^2)^{1/2} \right) (d\tau + dz)^2; \quad (5.5.9)$$

$$\begin{aligned} & -4Fbl_3 \left((xdy - ydx)/(x^2 + y^2) \right) d\tau \rightarrow \\ & \rightarrow -4B \left((xdy - ydx)/(x^2 + y^2) \right) d(\tau + z); \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

$$\begin{aligned} & -((1/F)-1)l_i l_j + (b/r)^2 h_{ij} \left(dx^i dx^j \right) \rightarrow . \\ & \rightarrow -2E \left(1/(\tau+z) - 2\delta(\tau+z) \ln(x^2 + y^2)^{1/2} (d\tau + dz)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

При этом кроме пределов (5.2.12) и (5.3.5) было использовано предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \left(\xi + \varepsilon^2 \rho^2 \right)^{-1} d\xi = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int \varepsilon^2 \rho d\rho \int_0^\infty \left(\xi + \varepsilon^2 \rho^2 \right)^{-2} d\xi = 2 \ln \rho. \quad (5.5.12)$$

В итоге, предельное выражение для квадрата интервала принимает вид [85]

$$ds^2 = ds_0^2 - 2H(d\tau + dz)^2 - 4B\left(\left(xdy - ydx\right)/\left(x^2 + y^2\right)\right)d(\tau + z), \quad (5.5.13)$$

где $H = 2H_0$; H_0 берется из (5.4.23).

Введение запаздывающего $u = (\tau - z)$ и опережающего $v = (\tau + z)$ времен, также переход к полярной системе координат в плоскости, ортогональной оси z , которая совпадает с направлением движения светоподобного источника, позволяет переписать (5.5.13) в виде

$$ds^2 = dudv - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2 - 2H dv^2 - 4B dvd\varphi, \quad (5.5.14)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$, φ – полярный угол, $H = 2E(1/v) - \delta(v) \ln(a\rho)^2$.

Проводя аналогичную операцию с метрикой (5.5.4), получим

$$ds^2 = d\tilde{u}d\tilde{v} - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2 - 2\tilde{H} d\tilde{v}^2, \quad (5.5.15)$$

$$\tilde{u} = t - z, \quad \tilde{v} = t + z, \quad \tilde{H} = H(\tilde{v}, \rho) \quad [85, 89]$$

Нетрудно видеть, что координатным преобразованием

$$u \rightarrow u - 4B\varphi, \quad v \rightarrow v \quad (5.5.16)$$

метрика (5.5.14) приводится к виду (5.5.15), совпадающему с метрикой светоподобного источника (лайтона), полученного предельным переходом от шварцшильдовского решения.

Это означает, что *светоподобная частица не может иметь дуальную массу* [85, 89]. Поэтому в дальнейшем имеет смысл обсуждать лишь метрику (5.5.15), в которой сингулярность $1/v$ исключается так же, как и в п. 5.4. с помощью преобразования (5.4.25) и вводом новой функции (5.4.26). Однако в выражениях (5.5.14) и (5.5.15) следует произвести замену $E \rightarrow 2E$.

5.6. Светоподобный предел метрики Керра

Другой частицей, гравитационное поле которой описывается точным решением уравнений Эйнштейна, является массивная частица с собственным моментом импульса. Соответствующее решение известно как реше-

ние Керра [90]. В частности, гравитационные поля вращающихся астрофизических объектов описываются как раз этим решением.

Применим введенный выше светоподобный предел к решению Керра, относящемуся к типу D и описывающему внешнее гравитационное поле вращающегося тела. Метрику возьмем в форме Керра-Шилда (5.4.1) с функцией H в виде [91]

$$H = m_0 (1/\omega + 1/\bar{\omega}), \quad (5.6.1)$$

где m_0 – масса покоя частицы, функция

$$\omega = \left(x^2 + y^2 + (z - ta)^2 \right)^{1/2} \quad (5.6.2)$$

удовлетворяет уравнениям Лапласа

$$\Delta(1/\omega) = 0 \quad (5.6.3)$$

и эйконала

$$(\Delta\omega)^2 = 1; \quad (5.6.4)$$

светоподобный вектор $l_\mu = (1, l_\kappa)$;

$$l_\kappa = \left(\omega_{,\kappa} + \bar{\omega}_{,\kappa} - i \epsilon_{\kappa m p} \omega_{,m} \bar{\omega}_{,p} \right) \left(1 + \omega_{,n} \bar{\omega}_{,n} \right)^{-1}; \quad (5.6.5)$$

черта означает комплексное сопряжение; $a = M_z / m_0$ – относительный момент импульса; M_z – собственный момент импульса тела, направленный по оси z .

Если, как и прежде, считать энергию E постоянной, то $a(1 - V^2)^{1/2} = J = \text{const}$, так как вдоль движения момент импульса релятивистски не преобразуется, $M_z = \tilde{M}_z$, а $m_0 = E(1 - V^2)^{1/2}$.

Что касается пределов, то аналогичные выражениям (5.4.5) и (5.4.6) пределы легко находятся:

$$\begin{aligned} H_0 &= \lim_{V \rightarrow 1} \tilde{H} = \lim_{V \rightarrow 1} \left(\tilde{H} \tilde{l}_3 \right) = \lim_{V \rightarrow 1} \left(\tilde{H} \tilde{l}_3^2 \right) = \\ &= (E/2) \left\{ (z + t - iJ)^{-1} + (z + t + iJ)^{-1} - 2(\ln \rho) [\delta(z + t - iJ) + \delta(z + t + iJ)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

где $J = \lim_{V \rightarrow 1} \left(a(1 - V^2)^{1/2} \right)$, а $\delta(\eta - iJ)$ есть Фурье образ показательной функции [92. С. 145]

$$\delta(\eta - iJ) = (1/2\pi) F \left[\exp(J\eta) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(J^n / n! \right) (-id/d\eta)^n \delta(\eta). \quad (5.6.7)$$

Получение всех пределов в классе обобщенных функций для произвольного параметра J затруднено из-за неэлементарности возникающих интегралов, поэтому ограничимся случаем, когда $J/E \ll 1$, что соответствует медленному вращению источника Керра.

Оставляя лишь первый порядок по параметру J в разложениях всех величин и переходя к пределу $V \rightarrow 1$ в 4-интервале, находим отличные от нуля компоненты метрического тензора, позволяющие представить метрику в виде [76, 78, 79, 83]

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu}, \quad (5.6.8)$$

где

$$Q_{\mu\nu} = 8H_0\kappa_\mu\kappa_\nu - 8(\partial H_0 / \partial y) J n_{(\mu} \kappa_{\nu)} + 8(\partial H_0 / \partial x) J m_{(\mu} \kappa_{\nu)} \quad (5.6.9)$$

— нильпотент индекса 3; H_0 определено, как и в пределе решения Шварцшильда, выражением (5.4.5) или (в соответствии с размерностью) (5.4.23); $\kappa_\mu = \delta_\mu^0 + \delta_\mu^3$; $n_\mu = \delta_\mu^1$; $m_\mu = \delta_\mu^2$; $\det(g_{\mu\nu}) = -1$ ²⁸.

Уравнения Эйнштейна и в этом случае оказываются линейными с тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ для такого «вращающегося» светоподобного источника (после перехода к новой параметризации $E \rightarrow E/4$, $J \rightarrow 2J$)

$$T_{\mu\nu} = \rho \left\{ \kappa_\mu \kappa_\nu + (J/y) n_{(\mu} \kappa_{\nu)} - (J/x) m_{(\mu} \kappa_{\nu)} \right\}, \quad (5.6.10)$$

где использовано свойство $\partial\delta(\lambda)/\partial\lambda = -\delta(\lambda)/\lambda$ (для любой переменной λ) и введено обозначение для сингулярной плотности энергии $\rho = E \delta(x) \delta(y) \delta(z + t)$.

²⁸ Нильпотент Q обладает свойством $SpQ^2 = 0$, поэтому сформулированная в п. 5.2 теорема справедлива и для нильпотента индекса 3.

Нетрудно видеть, что структура тензора энергии-импульса совпадает со структурой тензора $Q_{\mu\nu}$, т. е. $T_{\mu\nu}$ есть нильпотент индекса три. При этом пространство-время относится к алгебраическому типу *III* по классификации Петрова и в пределе $J \rightarrow 0$ переходит в пространство-время алгебраического типа *N* [76, 78, 79, 83].

В рассматриваемом случае плотность энергии, найденная через соотношение Папапетру [93. С. 157], есть $\theta^{00} = T_{00}$, где $\theta^{\alpha\beta}$ – псевдотензор Папапетру.

Введем, как обычно, плотность орбитального момента импульса

$$M^{0ij} = x^i T^{0j} - x^j T^{0i}, \quad (5.6.11)$$

или в двуметрическом формализме по формуле [93. С. 96]

$$M^{\alpha\tau}_{\sigma} = (1/16\pi) \left(g_{\mu\sigma} g^{\lambda\rho} - \delta_{\mu\sigma} \delta^{\lambda\rho} \right) \left(\sqrt{-g} \left(g^{\tau\mu} g^{\alpha}_{\lambda} - g^{\alpha\mu} g^{\tau}_{\lambda} \right) \right), \rho, \quad (5.6.12)$$

здесь вторая метрика есть метрика Минковского $\delta_{\mu\nu}$.

Для поля с источником (5.6.10) получаем отличные от нуля компоненты M^{0ij} :

$$M_x = z T_{02} - y T_{03}; \quad M_y = x T_{03} - z T_{01}; \quad M_z = J T_{00}. \quad (5.6.13)$$

Вычисляя интегральный момент (интегрирование проводится по переменным x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$; $\sqrt{-g} = 1$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \partial \delta(\lambda) / \partial \lambda \, d\lambda = (\partial f / \partial \lambda)_{\lambda=0}$), получим, что он равен $M = M_z = JE$ [76, 81]. Это позволяет считать, что метрика (5.6.8) описывает гравитационное поле *безмассовой светоподобной частицы со спином*²⁹ [76, 83]

Рассмотренный предельный переход в решении Керра относится к ситуации, когда спин керровской частицы был с самого начала коллинеарен направлению движения. В результате мы имеем классический аналог фотона со спином (не квантованным), который, как и в квантовой теории, может иметь лишь две проекции: *по движению* ($+J$) и *против движения* ($-J$). Следовательно, наша светоподобная частица обладает *спирально-*

²⁹ Спин здесь понимается в классическом смысле как собственный момент импульса.

стью³⁰, а сама частица может быть названа *геликсоном* (*helixon*) [20, 21, 83].

Однако, если рассмотреть аналогичную процедуру предельного перехода для случая, когда в исходном состоянии спин был ортогонален направлению движения (оси z), то в пределе получаем метрику безмассового светоподобного источника без спина³¹ [20, 21, 83] (*скалярная светоподобная частица – лайтон*; см. (5.4.11)) с тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu} = \rho \kappa_\mu \kappa_\nu$, у которого плотность энергии

$$\rho(z+t, x, y) = E(1 + 3J/4x) \delta(x) \delta(y) \delta(z+t), \quad (5.6.14)$$

а параметр

$$a = M_x^{(0)} / m_0 = M_x (1 - V^2)^{1/2} / E (1 - V^2)^{1/2} = J. \quad (5.6.15)$$

После введения запаздывающего $u = (t - z)$ и опережающего $v = (t + z)$ времен, а также перехода к полярной системе координат в плоскости, ортогональной оси z , которая совпадает с направлением движения светоподобного источника, метрики (5.4.11) и (5.6.8) переписываются в виде (после масштабного преобразования $H_0 \rightarrow H_0/4$) [78-79]

$$ds^2 = du dv - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2 - 2H_0 dv^2; \quad (5.6.16)$$

$$ds^2 = du dv - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2 - 2H_0 dv^2 - 4JE \delta(v) dv d\varphi, \quad (5.6.17)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Координатными преобразованиями такие метрики уже не сводятся друг к другу, так как в (5.6.17) присутствует неисчезаемое слагаемое, связанное с $dvd\varphi$. Однако сингулярность $1/v$ в функции H_0 исключается преобразованием (5.4.25) и тогда можно ввести в запись 4-интервала новую функцию H_0 из (5.4.26).

³⁰ *Спиральность* – проекция момента импульса на направление вектора импульса частицы. При аксиальной симметрии сохраняется лишь *спиральность* частицы. Проекция момента импульса фотона на направление движения имеет два значения (± 1); значение 0 невозможно [94].

³¹ При таком предельном переходе происходит «сброс» собственного момента импульса.

В заключение параграфа подчеркнем, что приведенные результаты могут рассматриваться как своего рода *доказательство на классическом уровне существования у фотона лишь продольных составляющих спина (спиральности)*.

5.7. Светоподобный предел массивной частицы Шварцшильда на уровне матрицы Вейля как катастрофа

Перепишем для движущегося с постоянной скоростью шварцшильдоподобного источника в системе отсчета покоящегося наблюдателя матрицу Вейля (5.2.3), полученную в п. 5.2,

$$W = TW_D T^{-1} = \frac{E \varepsilon^2}{R^3} W(\varepsilon), \quad (5.7.1)$$

где W_D – матрица алгебраического типа D , отвечающая шварцшильдоподобному источнику, $E = m_0 / \varepsilon$ – полная энергия частицы; $R^2 = \rho^2 \varepsilon^2 + (z + Vt)^2$, а матрица $W(\varepsilon)$ может быть «расщеплена» на линейную комбинацию матрицы типа D ($C_D = \text{diag}(-1, 2, -1)$) и «электрической» $W_N^{(E)}$ и «магнитной» $W_N^{(B)}$ частей матрицы Вейля алгебраического типа N в «скелетном представлении», $W_N = l\tilde{l}$, отвечающей гравитационной плоской волне, идущей вдоль z направления; $\tilde{l} = (1, i, 0)$, как это показано в (5.2.7) и (5.2.9) [84].

Выше был получен предел матрицы (5.2.1) (см. предельное соотношение (5.2.15)), который может быть рассмотрен с точки зрения теории катастроф.

Алгебраическая классификация пространств связана с задачей на собственные значения матрицы Вейля

$$W(\varepsilon) X = \lambda X, \quad (5.7.2)$$

где X – собственные векторы, λ – собственные значения матрицы $W(\varepsilon)$.

Характеристическое уравнение $\det(W(\varepsilon) - \lambda \hat{E}) = 0$ с единичной матрицей $\hat{E} = \text{diag}(1, 1, 1)$ в этом случае сводится к

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0 \quad (5.7.3)$$

с коэффициентами $p = -3\epsilon^4$ и $q = -2\epsilon^6$. Это уравнение есть условие экстремума для «потенциальной» функции, описывающей катастрофу сборки (см. гл. 3). Дискриминант уравнения (5.7.3), приравненный нулю (см. (3.1.10)), задает полукубическую параболу (проекция складок на плоскость управляющих параметров). Рассматриваемый здесь случай, относящийся к алгебраическому типу D , помечен на рис. 13 крестиком. Предельный переход, введенный в п. 5.2 (светоподобный предел), означает перемещение крестика до точки $p = q = 0$, отвечающей пространству типа N . Уравнение (5.7.3) имеет три корня: $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2/2 = -\epsilon^2$. Подставим корни уравнения (5.7.3) $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2/2 = -\epsilon^2$ в «потенциальную» функцию $V = \lambda^4/4 + p\lambda^2/2 + q\lambda$. Для этих корней потенциальная функция $U = \lambda^4/4 + p\lambda^2/2 + q\lambda$ принимает следующие значения: $U(\lambda_1) = U(\lambda_3) = p^2/12$ и $U(\lambda_2) = -2p^2/3$. Вычисляя в точке сборки вторые производные по p от этой функции, получим скачки $\Delta(V, p, p) = 1/6$ и $\Delta(V, p, p) = -4/3$, что одновременно сопровождается скачком ранга матрицы Вейля в этой точке с $r = 3$ (тип D) до $r = 1$ (тип N) [86].

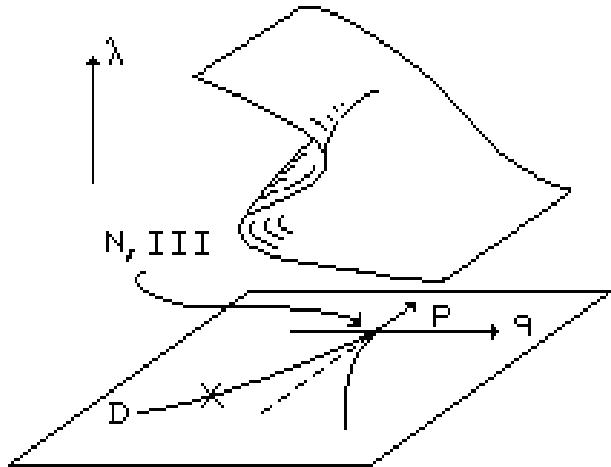


Рис. 13

При применении процедуры светоподобного предела ($\epsilon \rightarrow 0, V \rightarrow 1$) собственные значения стремятся к нулю: $\lambda_i \rightarrow 0, i = 1, 2, 3$. Сама матрица Вейля (5.7.1) имеет два собственных вектора X_1 и X_2 . При таком предельном переходе собственные векторы матрицы $W(\epsilon)$ ведут себя следующим образом. Собственному значению λ_2 соответствует собственный вектор $\tilde{X}_1 = (-i(1 - \epsilon^2)^{1/2}, 1, 0)$, который в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ становится светоподобным вектором

$\tilde{L} = (-i, 1, 0) = -i\tilde{l}$, являющимся собственным вектором матрицы типа N

$$W_N L = 0. \quad (5.7.4)$$

Второй собственный вектор $\tilde{X}_2 = (0, 0, 1)$ также является собственным вектором матрицы Вейля N типа [86]

$$W_N X_2 = 0. \quad (5.7.5)$$

Следовательно, в исследуемом светоподобном пределе получаем именно матрицу типа N , а не типа III или 0 , которые имеют нулевые собственные значения, но другие собственные векторы и ранги матриц.

Кроме того, при предельном переходе такого рода происходит смена симметрии поля. Существуют лишь два вектора Киллинга³² для метрики (5.4.11): светоподобный $\xi_L = (\partial/\partial t + \partial/\partial z)$ и пространственноподобный, задающий аксиальную симметрию, $\xi_z = (-y\partial/\partial x + x\partial/\partial y)$, и равный $\partial/\partial\phi$ в полярных координатах.

Для шварцшильдовского источника в сопутствующей системе отсчета имеются четыре вектора Киллинга: временноподобный $\xi_t = \partial/\partial t$ и три пространственноподобных $\xi_z = (-y\partial/\partial x + x\partial/\partial y)$; $\xi_y = (z\partial/\partial x - x\partial/\partial z)$; $\xi_x = (-z\partial/\partial y + y\partial/\partial z)$. При этом исходная 3-симметрия поля такого источника – сферическая.

Если теперь применить к шварцшильдовским векторам Киллинга четырехмерный лоренцевский буст \hat{L} (матрицу Лоренца) и устремить скорость V к скорости света, то в результате такого предельного перехода получим, что вектор ξ_z не меняется, а векторы $\hat{L}\xi_t$, $\hat{L}\xi_x$, $\hat{L}\xi_y$ оказываются пропорциональными ξ_L , т. е. вырождаются в светоподобный вектор Киллинга.

Следовательно, светоподобный предел шварцшильдоподобного источника может быть описан как катастрофа сборки на уровне собственных значений матрицы Вейля с соответствующей сменой симметрии поля [81, 86], т. е. такой предел оказывается аналогом фазового перехода второго рода в теории конденсированного состояния вещества (алгебраический тип пространства-времени – аналог фазы вещества). Другими словами, резкая смена алгебраического типа гравитационного поля представляет собой фазовый переход второго рода в гравитационном поле вместе с изменением пространственной симметрии поля такого светоподобного источника: от сферической к аксиальной.

С другой стороны, наличие δ -образной сингулярности матрицы Вейля N типа и анализ предельной метрики указывает на то, что гравитационное поле точечной шварцшильдоподобной частицы трансформируется в поле точечного безмассового источника, движущегося со скоростью света, а уравнения тяготения для такого поля преобразуются в волновое уравнение с сингулярным источником (тензором энергии-импульса) светоподобного излучения. Все это позволяет утверждать, что мы имеем дело со скалярной светоподобной безмассовой частицей – *лайтоном* (*lighton*).

³² Вектор Киллинга – вектор ξ_α , удовлетворяющий уравнению Киллинга, $\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$, где точка с запятой обозначает ковариантную производную. Каждой симметрии пространства отвечают свои векторы Киллинга.

5.8. Светоподобный предел массивной НУТ частицы на уровне матрицы Вейля как катастрофа

Пользуясь записью метрик (5.5.1) и (5.5.2) для произвольного НУТ параметра, несложно записать все отличные от нуля компоненты тензора кривизны $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, используя отображение Петрова на 6-мерное евклидово пространство с помощью описанного в гл. 2 правила для собирательных индексов. При этом считаем (по умолчанию), что работаем в касательном 4-пространстве-времени, а тензор кривизны взят в тетрадном базисе (обозначения тетрадных индексов опущены из соображений простоты записи). Тогда отличные от нуля компоненты матрицы Вейля, совпадающей с матрицей кривизны, так как решение НУТ удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна, могут быть записаны следующим образом:

$$R_{11} = -2R_{22} = -2R_{33} = -R_{44} = 2R_{55} = 2R_{66} = -2\alpha(r); \quad (5.8.1)$$

$$R_{14} = -2R_{25} = -2R_{36} = -2\beta(r), \quad (5.8.2)$$

где

$$\alpha(r) = \frac{b^4 + 3b^2m_0r - 3b^2r^2 - m_0r^3}{(b^2 + r^2)^3}; \quad (5.8.3)$$

$$\beta(r) = \frac{b(b^2m_0 - 3b^2r - 3m_0r^2 + r^3)}{(b^2 + r^2)^3}. \quad (5.8.4)$$

Матрица Вейля, как мы уже знаем (см. гл. 2), конструируется по правилу

$$W = W^{(E)} + iW^{(B)}, \quad (5.8.5)$$

где матрица $W^{(E)}$ (матрица «электрического» типа) строится из компонент тензора кривизны с индексами, состоящими из цифр от 1 до 3, а матрица $W^{(B)}$ (матрица «магнитного» типа) – из компонент тензора кривизны с индексами, состоящими из цифр от 4 до 6.

В нашем случае комплексная бесследовая матрица Вейля будет равна

$$W_{NUT} = (\alpha + i\beta) \hat{W}_D = -\frac{m_0 - ib}{(r - ib)^3} W_D \quad (5.8.6)$$

с канонической матрицей Вейля D типа

$$W_D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8.7)$$

В покоящейся системе отсчета наблюдателя для гравитационного поля НУТ частицы на уровне матрицы Вейля аналогично преобразованию (5.7.1) можно записать

$$W = TW_{NUT}T^{-1}. \quad (5.8.8)$$

Применение процедуры светоподобного предела к этой матрице приводит к сингулярной матрице волнового типа N [85, 89, 95, 96]

$$W \rightarrow \frac{6(E - iB)}{\rho^2} \delta(z + t) \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{6(E - iB)}{\rho^2} \delta(z + t) W_N, \quad (5.8.9)$$

где $(E - iB)$ играет здесь роль комплексной «энергии» (по аналогии с выражением (5.2.15)). При этом, как видно, лоренцевским преобразованием не затрагивается структура комплексного параметра $(m - ib)$, переходящего просто в $(E - iB)$. Однако в метрике (5.5.15), которая должна соответствовать матрице Вейля (5.8.9), отсутствуют комплексные параметры, поэтому наряду с лоренцевским поворотом необходимо либо ограничиться вещественной частью тензора Вейля (т. е. оставить в (5.8.9) матрицу (5.2.15)), либо можно исключить параметр НУТ путем поворота на угол $\varphi = -\arctan(B/E)$ в комплексной плоскости параметров E и B и перейти к новому вещественному параметру E путем введения масштабного преобразования согласно $\sqrt{E^2 + B^2} \rightarrow E$ [86].

Окончательно приходим к утверждению об отсутствии у *светоподобного источника параметра НУТ* [85, 89, 95, 96].

Как и в случае со шварцшильдовской частицей, здесь мы имеем светоподобный предел матрицы Вейля как катастрофу с точки зрения задачи на собственные значения. Точка сборки ($p = q = 0$) есть точка фазового перехода второго рода гравитационного поля решения НУТ от алгебраического типа D к вырожденному типу N (см. рис. 13). Во время процедуры

светового предела также наблюдается изменение симметрии гравитационного поля, а векторы Киллинга решения НУТ вырождаются в светоподобные векторы Киллинга [95–96].

Таким образом, светоподобный предел массивной НУТ частицы может быть описан как катастрофа сборки на уровне матрицы Вейля с изменением симметрии гравитационного поля такого источника и потерей НУТ параметра. Следовательно, и в этом случае мы получаем скалярную светоподобную безмассовую частицу – *лайтон* (*lighton*).

5.9. Светоподобный предел массивной частицы Керра на уровне матрицы Вейля как катастрофа

Внешнее гравитационное поле массивной частицы со спином (т.е. частицы, вращающейся вокруг собственной оси и имеющей собственный момент импульса) описывается известным решением Керра [90], принадлежащим к алгебраическому типу D , как было отмечено выше (см. п. 5.6).

В этом случае процедура светоподобного предела кроме требований на сохранение полной релятивистской энергии при исчезновении собственной массы покоя ($m_0 \rightarrow 0$), когда скорость частицы устремляется к скорости света вдоль оси z , дополняется требованием, чтобы z -компоненты керровского момента импульса M_Z в результате такого предельного перехода преобразовывалась по правилу (см. п. 5.6)

$$M_Z = a m_0 \rightarrow J \cdot E, \quad (5.9.1)$$

где $a = M_Z / m_0$ – керровский приведенный момент импульса (собственный момент импульса на единицу массы покоя); J – предел приведенного момента импульса в результате применения светоподобного предела, $J = \text{const.}$

Для метрики Керра, записанной в координатах Бойера-Линдквиста [36. Т. 3. С. 85]

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (5.9.2)$$

где $\Delta \equiv r^2 - 2m_0 + a^2$; $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, в приближении медленно вращающегося тела (т.е. параметр $a = M_Z / m_0$ мал) нетрудно записать компоненты тензора кривизны, используя отображение Петрова:

$$R_{11} = -2R_{22} = -2R_{33} = 2m_0/r^3; \quad R_{15} = R_{24} = 2R_{26} = 2R_{35} = (6am_0/r^4)\sin\theta; \\ R_{14} = -2R_{25} = -2R_{36} = (6am_0/r^4)\cos\theta.$$

Матрица Вейля в этом случае принимает вид

$$W_{Kerr} = \begin{pmatrix} R_{11} + iR_{14} & iR & 0 \\ iR_{15} & -\frac{1}{2}(R_{11} + iR_{14}) & \frac{1}{2}iR_{15} \\ 0 & \frac{1}{2}iR_{15} & -\frac{1}{2}(R_{11} + iR_{14}) \end{pmatrix}. \quad (5.9.3)$$

Применение лоренцевского буста, как и в (5.7.1), позволяет для гравитационного поля керровской быстро движущейся частицы в покоящейся системе отсчета записать матрицу Вейля:

$$W = T W_{Kerr} T^{-1}. \quad (5.9.4)$$

Процедура светоподобного предельного перехода, примененная к матрице Вейля решения Керра, приводит к предельному выражению

$$W \rightarrow \frac{3}{\rho^2} \delta(z+t) \left(2E \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\pi J}{2\rho} \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \right). \quad (5.9.5)$$

Получившаяся матрица элементарными преобразованиями может быть приведена к матрице Вейля алгебраического типа *III* по Петрову (волнового типа) [95–96]. С другой стороны, матрица (5.9.5) представляет собой суперпозицию двух матриц: *N* и *III* алгебраических типов, поэтому согласно утверждениям, доказанным в [15], результирующая матрица относится к *III* типу.

Как и для случаев со шварцшильдовской и НУТ частицами, светоподобный предел матрицы Вейля W_{Kerr} есть катастрофа с точки зрения проблемы на собственные значения. В рассматриваемом случае точка сборки ($p = q = 0$) представляет собой точку фазового перехода 2-го рода гравитационного поля из типа *D* в тип *III* (см. рис. 13).

Светоподобный предел метрики (5.6.17), которому отвечает предельная матрица (5.9.5), имеет только два вектора Киллинга: *светоподобный вектор* $\xi_L = (\partial/\partial t + \partial/\partial z)$ и пространноподобный аксиальный

вектор $\xi_z = \partial / \partial \varphi$ в полярных координатах. Решение же Керра имеет следующие два вектора Киллинга: временноподобный $\xi_t = \partial / \partial t$ и пространственноподобный аксиальный вектор $\xi_z = \partial / \partial \varphi$.

Применение лоренцевского буста к векторам Киллинга решения Керра вместе с процедурой светоподобного предела приводит к $\xi_z \rightarrow \xi_z; \xi_z \rightarrow \xi_L$. В итоге светоподобный предельный переход для керровской частицы может быть описан как катастрофа сборки с изменением симметрии гравитационного поля такого источника.

Что касается собственного момента импульса керровской частицы, движущейся вдоль оси z , то при упомянутом светоподобном предельном переходе остается только z -компоненты спина частицы (положительная или отрицательная компоненты относительно направления движения) или *спиральность* $M_z = \pm JE$ [78–79, 83]. Как уже упоминалось (п. 5.6), соответствующая векторная светоподобная безмассовая частица со спиральностью есть *геликсон* (*helixon*).

Если керровский приведенный момент импульса $a = M_z / m_0$ строго перпендикулярен направлению движения частицы (оси z), то при светоподобном предельном переходе предельный приведенный момент импульса J исчезает и получаем результат, совпадающий с предельным переходом для шварцшильдоподобной частицы (см. п. 5.7) [78–79, 83], т. е. в пределе имеем скалярную светоподобную безмассовую частицу – *лайтон* (*lighton*).

5.10. Светоподобные источники не имеют «волос»

Светоподобные источники – материальные объекты, движущиеся со скоростью света и обладающие нулевой собственной массой покоя, могут быть «получены» с помощью предельного перехода от точных решений уравнений Эйнштейна для островных источников путем «разгона» последних до скорости света при одновременном стремлении к нулю массы покоя. Такой светоподобный предел был определен выше и из внешних решений Шварцшильда, Керра, НУТ получены сингулярные на световом конусе источники.

Однако описанная предельная процедура получения точных решений уравнений тяготения сохраняет часть свойств, присущих исходным решениям. В первую очередь у всех светоподобных источников остается горизонт, который представляет собой в каждый момент времени окружность, полученную в результате деформации имеющего топологию сферы горизонта, например, гравитационной сферы Шварцшильда.

Светоподобные источники обладают аксиальной симметрией и описывающие их метрики удовлетворяют линейным уравнениям Эйнштейна с

источниками. Кроме того, внешние поля этих источников определяются лишь двумя свободными физическими параметрами: *энергией движения* E и *спиральностью* $M_z = \pm JE$. Другие независимые характеристики отсутствуют, так как остальные параметры «сбрасываются» в процессе предельного перехода.

Аналогичная ситуация имеет место с *черными дырами*, у которых характерными параметрами оказываются их *масса* и *собственный момент импульса* [36. Т. 3. С. 85]. Более того, рассмотренные выше светоподобные источники фактически получены из решений, описывающих *классические черные дыры*. Поэтому часть свойств они «унаследовали» от них.

Как будет показано далее, из таких сингулярных светоподобных источников могут быть сконструированы монохроматическая и немонохроматическая светоподобные («фотонные») нити и лучи путем суммирования источников вдоль оси их движения в силу линейности уравнений Эйнштейна. Монохроматическая светоподобная нить создает стационарное гравитационное поле, имеющее своим горизонтом цилиндрическую 2-поверхность, охватывающую эту нить, и не обладает спином. Монохроматический световой луч может иметь спин (краевой эффект).

Кроме того, допускается конструирование немонохроматических светоподобных нитей, лучей и нитей со спином, изменяющимся от точки к точке вдоль нити.

Во всех рассмотренных случаях светоподобные источники и «конструкции» из них не могут иметь других свободных физических параметров кроме *энергии движения* E и *спиральности* M_z . Этот результат можно сформулировать в виде утверждения, что *светоподобные источники не имеют «волос»*³³ [78–79, 97].

³³ Аналогичное утверждение для черных дыр гласит, что у черной дыры нет «волос» [36. Т. 3. С. 85-86].

Г л а в а 6

СВЕТОПОДОБНАЯ НИТЬ В ОТО

6.1. Конструирование монохроматической светоподобной нити из точечных светоподобных источников

В предыдущих параграфах было показано, что предельный переход, «превращающий» массивную частицу в светоподобную, приводит к линейным уравнениям Эйнштейна с бесследовым источником, обладающим свойством

$$T_{\mu\nu}\kappa^\mu\kappa^\nu = 0, \quad (6.1.1)$$

где κ_μ – светоподобный вектор, имеющий нулевую длину, $\kappa_\nu\kappa^\nu = 0$.

Соотношение (6.1.1) указывает на отсутствие у светоподобного источника энергии покоя (массы покоя). При этом у светоподобной частицы остаются две характеристики: *полная энергия* E и *стиральность* $M_z = \pm JE$.

Если рассмотреть геодезическую конгруэнцию светоподобных векторов l_μ , у которой отсутствует вращение и сдвиг, то справедливо следующее уравнение для параметра расширения $\theta = l^\alpha_{;\alpha}$, или объемного расхождения, [98. С. 101]:

$$d\theta/d\lambda = R_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta - (1/2)\theta^2, \quad (6.1.2)$$

где $R_{\alpha\beta}$ – тензор Риччи; λ – здесь аффинный параметр вдоль геодезической.

Это уравнение описывает эффект фокусировки конгруэнции светоподобных геодезических и является аналогом уравнения Райчаудхури для временноподобных геодезических.

В нашем случае $\kappa_\mu = \delta_\mu^0 + \delta_\mu^3$ и выполняются условия геодезичности $(\kappa^\alpha_{;\beta}\kappa^\beta = 0)$, отсутствуют вращение $\kappa_{[\alpha;\beta]} = 0$ (вектор κ_μ – градиентный вектор, т. е. $\kappa_\mu = (t + z)_{,\mu}$), сдвиг $(\kappa_{(\alpha;\beta)}\kappa^{\alpha;\beta} - (1/2)\kappa^\alpha_{;\alpha} = 0)$, расширение $(\theta = \kappa^\alpha_{;\alpha} = 0)$ относительно метрики вида $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 2H\kappa_\alpha\kappa_\beta$ и $R_{\alpha\beta}\kappa_\alpha\kappa_\beta \propto T_{\alpha\beta}\kappa_\alpha\kappa_\beta = 0$.

Следовательно, не существует эффекта фокусировки для светоподобных частиц, движущихся в одном и том же направлении, что означает возможность в этом случае суперпозиции уравнений Эйнштейна для отдельных источников вне зависимости от их энергии E и спиральности $M_z = \pm JE$.

Для движения же встречной светоподобной частицы в гравитационном поле другой светоподобной частицы нарушается геодезичность, т. е. $K_{\alpha;\beta} K^{\beta} \propto H_{,\alpha} \neq 0$; где $K_{\alpha} = \delta_{\alpha}^0 - \delta_{\alpha}^3$ – светоподобный вектор встречной светоподобной частицы.

Уравнения Эйнштейна для светоподобных частиц без спина суть

$$(\square H_0) \kappa_{\beta} \kappa_{\gamma} = -8\pi E \delta(z+t) \delta(x) \delta(y) \kappa_{\beta} \kappa_{\gamma} = -8\pi T_{\beta\gamma} \quad (6.1.3)$$

с функцией $H_0 = -4E \delta(z+t) \ln(\alpha\rho)$ и плотностью энергии $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ (см. п. 5.4), а для светоподобных частиц со спином справедливы уравнения

$$\square Q_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \quad (6.1.4)$$

где

$$Q_{\mu\nu} = 2H_0 \kappa_{\mu} \kappa_{\nu} - 2(\partial H_0 / \partial y) J n_{(\mu} \kappa_{\nu)} + 2(\partial H_0 / \partial x) J m_{(\mu} \kappa_{\nu)}; \quad (6.1.5)$$

$$T_{\mu\nu} = \rho \left\{ \kappa_{\mu} \kappa_{\nu} + (J/y) n_{(\mu} \kappa_{\nu)} - (J/x) m_{(\mu} \kappa_{\nu)} \right\}; \quad (6.1.6)$$

$n_{\mu} = \delta_{\mu}^1$ и $m_{\mu} = \delta_{\mu}^2$ – единичные векторы вдоль x и y осей.

Предположим для простоты, что все светоподобные частицы обладают одной и той же энергией E (свойство монохроматичности) и спиральностью M_z , движутся вдоль оси z и образуют континуум. Следовательно, суммирование уравнений (6.1.3) и (6.1.4) можно заменить на интегрирование функции H_0 , тензоров $Q_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ по запаздывающему времени $v = z + t$ от $-\infty$ до $+\infty$ [85, 89]. При этом гравитационные поля одних светоподобных источников принадлежат алгебраическому типу N , а другие типу III .

После интегрирования (с учетом свойств δ -функции) получаем вместо функции H_0 функцию $H = -4E \ln(\alpha\rho)$, для скалярных светоподобных частиц тензор энергии-импульса становится равным $T_{\mu\nu} = E \delta(x) \delta(y) \kappa_{\mu} \kappa_{\nu}$,

а для светоподобных частиц со спином, соответственно находим тензор $Q_{\mu\nu}$, внешне не отличающийся от приведенного выше, кроме функции H , совпадающей с приведенной выше. Тензор энергии-импульса структурно совпадает с (6.1.6) при учете плотности энергии $E\delta(x)\delta(y)$. В итоге получаем два типа светоподобной («фотонной») нити.

В цилиндрической системе координат 4-интервалы для обоих типов монохроматических светоподобных нитей

$$ds_1^2 = (\delta_{\mu\nu} - 2H\kappa_\mu\kappa_\nu)dx^\mu dx^\nu \quad (6.1.7)$$

и

$$ds_2^2 = (\delta_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu \quad (6.1.8)$$

могут быть записаны через запаздывающее и опережающее времена как

$$ds_1^2 = dudv - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2 - 2Hdv^2; \quad (6.1.9)$$

$$ds_2^2 = dudv - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2 - 2Hdv^2 - 8M_z dvd\varphi, \quad (6.1.10)$$

где $M_z = JE$.

Координатным преобразованием

$$u \rightarrow u - 8M_z\varphi; \quad v \rightarrow v \quad (6.1.11)$$

метрика (6.1.10) сводится к метрике (6.1.9).

Другими словами, бесконечная монохроматическая светоподобная нить не может обладать постоянным спином (спиральностью) [85, 89, 99].

С другой стороны, если проводить интегрирование от $-\infty$ до некоторого текущего значения $v = (z + t)$ и определить функцию Хевисайда как

$$\theta(v) = \theta(z + t) = \int_{-\infty}^{z+t} \delta(\xi) d\xi, \quad (6.1.12)$$

то в этом случае получим поле монохроматического светоподобного луча с метрикой [85, 89, 96, 99].

$$ds^2 = dudv - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2 - 2Hdv^2 - 8M_z\theta(v) dvd\varphi \quad (6.1.13)$$

с плотностью энергии источника $E\delta(x)\delta(y)\theta(z + t)$ и функцией $H = -4E\theta(v)\ln(\alpha\rho)$.

Координатным преобразованием здесь уже нельзя убрать член с $dvd\phi$, т. е. *монохроматический светоподобный луч может обладать постоянным моментом импульса (спиральностью) вдоль луча (краевой эффект)* [85, 89, 96, 99].

Приведем еще случаи распределений светоподобных источников. Для этого проинтегрируем плотность энергии точечного светоподобного источника по всей 2-плоскости, перпендикулярной к оси z . В итоге получим тензор энергии-импульса, отвечающий светоподобному плоскому фронту

$$T_{\mu\nu} = E \delta(z+t) \kappa_\mu \kappa_\nu, \quad (6.1.14)$$

и функцию $H = -2\pi E \delta(z+t) (x^2 + y^2)$, а само гравитационное поле относится к конформно-плоскому алгебраическому типу 0 [76, 89].

Проводя далее интегрирование выражения (6.1.14) по переменной $v = z + t$ от $-\infty$ до $+\infty$ (т. е. интегрируя исходные выражения по всему 3-пространству), получим поле конформно-плоского типа 0, отвечающее непрерывной светоподобной среде с постоянной плотностью энергии и состоящей из безмассовых частиц, двигающихся со скоростью света в одном направлении, при этом

$$T_{\mu\nu} = \kappa_\mu \kappa_\nu, \quad H = -2\pi E (x^2 + y^2). \quad (6.1.15)$$

Эта же метрика справедлива и для внутренней области светоподобного пучка, имеющего радиус ρ_0 ³⁴ [89].

6.2. Обобщение монохроматической светоподобной нити

Результаты предыдущего параграфа допускают обобщение, если отказаться от δ -образного распределения плотности энергии вдоль направления движения и ввести распределенную конечную плотность энергии $\mu(v)$. Другими словами, это означает использование немонохроматических светоподобных источников для конструирования протяженных светоподобных объектов, например, светоподобных нитей, лучей. При этом метрика (5.4.11) с функцией $H = -4\mu(v) \ln(\alpha\rho)$ будет по-прежнему удовлетво-

³⁴ Внешняя область описывается метрикой (6.1.9) с $H = -4E \ln(\alpha\rho)$.

рять уравнениям Эйнштейна, совпадающим с волновым уравнением (см. (6.1.3)) и имеющим тензор энергии-импульса с плотностью энергии $T_{00} = \mu(v)\delta(x)\delta(y)$.

При суммировании таких светоподобных источников вдоль оси z возникает интеграл $\int_{-\infty}^v \mu(\xi) d\xi$, который при стремлении верхнего предела к $+\infty$ оказывается равным полной энергии источника

$$E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \mu(\xi) \delta(x) \delta(y) d\xi dx dy. \quad (6.2.1)$$

Такая конструкция из немонохроматических светоподобных источников будет описываться метрикой (6.1.7) с функцией $H = -4E_0 \ln(\alpha\rho)$.

Кроме того, если каждый светоподобный источник с распределенной плотностью энергии вдоль оси z обладает еще и постоянной и одинаковой для всех источников проекцией плотности момента импульса $J = M_z/E_0$, то получающаяся при суммировании источников метрика типа (6.1.8) снова координатным преобразованием сводится к метрике светоподобной нити без спина (6.1.7).

При суммировании функции $\mu(v)$ до некоторого текущего значения v с учетом постоянства J получаем своеобразный *немонохроматический светоподобный луч со спиральностью* $S_z(v) = \pm JE(v) = \pm M_z E(v)/E_0$, распространяющийся со скоростью света вдоль оси z с

$$E(v) = \int_{-\infty}^v \mu(\xi) d\xi \quad (6.2.2)$$

и метрикой

$$ds^2 = dudv - \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2 - 2Hdv^2 - 8S_z(v)dv d\varphi, \quad (6.2.3)$$

где $H = -4E(v)\ln(\alpha\rho)$.

Найденная метрика (6.2.3) координатным преобразованием *не может быть сведена к бесспиновой светоподобной нити*.

Возможен и другой вариант рассмотрения. Пусть проекция момента импульса с самого начала является функцией переменной v : $M_z \equiv S_z(v)$ при постоянной энергии каждого источника ($E = \text{const}$). Это означает, что соответствующая метрика запишется в виде (6.2.3), но с одним отличием.

Теперь имеем, к примеру, метрику бесконечной светоподобной нити со спином, который распространяется вдоль нее со скоростью света, и переход к постоянной плотности проекции момента импульса J возвращает нас к нити без спина. Этот же вывод содержится и в работе [100], где вводится метрика вида (6.2.3), но другим путем и из других соображений.

Следовательно, *существование спина постоянной плотности у интегральных конструкций из светоподобных источников возможно лишь у светоподобных лучей* [83, 89, 96].

6.3. Формула Гаусса-Бонне и топология поля светоподобной нити

Путем суммирования одномерного континуума точечных монохроматических светоподобных источников в п. 6.1 была получена стационарная метрика светоподобной нити, записанная в цилиндрических координатах через запаздывающее и опережающее времена,

$$ds^2 = dudv - 2Hdv^2 - d\rho^2 - \rho^2d\varphi^2, \quad (6.3.1)$$

здесь $H = -E \ln(\alpha\rho)$; $\alpha = \text{const} > 0$; $E = \text{const} > 0$.

В выбранных координатах выделяются следующие области изменения ρ , в которых функция H определена как

I. $H > 0$, $\alpha\rho < 1$;

$$H = 0, \quad \alpha\rho = 1; \quad (6.3.2)$$

II. $H < 0$, $\alpha\rho > 1$.

Таким образом, существует цилиндрическая поверхность, аналогичная сфере Шварцшильда, с радиусом, удовлетворяющим условию $\alpha\rho = 1$. На этой поверхности функция H обращается в ноль ($H = 0$), т.е. рассматриваемая поверхность является горизонтом.

Хотя анализ стационарного гравитационного поля на основе поведения векторов Киллинга [100, 101] остается здесь в стороне, эти векторы все же необходимы для построения пространственного 3-мерного сечения. При этом, если в области I (внутренней по отношению к горизонту) переменная u (запаздывающее время) играет роль временноподобной координаты, а v -пространственноподобной (опережающее время), то в области II (внешней по отношению к горизонту) все наоборот.

Для дальнейшего исследования приведем метрику пространственного сечения (см. (4.1.2)) к виду, используя цилиндрические координаты,

$$d\hat{s}^2 = b_{ij}dx^i dx^j = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + G(\rho)d\zeta^2, \quad (6.3.3)$$

где

для области I: $G = 1/8H, \zeta = v;$

для области II: $G = 1/8H, \zeta \equiv u.$

Воспользоваться левыми частями соотношений Гаусса-Бонне (4.1.16) и (4.1.17) для локально евклидовых многомерных пространств можно, введя двумерные сечения и определив понятие *секционной кривизны* для каждой фиксированной пары (i, j) с учетом ортогональности базисных векторов

$$K_p = R_{(i)(j)(i)(j)} / \left(g_{(i)\kappa}^{\kappa} g_{(i)\kappa} \right) \left(g_{(j)}^n g_{(j)n} \right), \quad (6.3.4)$$

где p нумерует каждую пару $(i, j).$

Секционные кривизны в данном случае могут быть записаны как

$$K_1 = R_{(2)(3)(2)(3)} = -\left(1/\rho\right)\left(\ln G\right)'; \quad (6.3.5)$$

$$K_2 = R_{(1)(2)(1)(2)} = 0; \quad (6.3.6)$$

$$K_3 = R_{(1)(3)(1)(3)} = -\left(\sqrt{G}\right)''/\sqrt{G}, \quad (6.3.7)$$

где штрихом обозначена производная по радиальной переменной $\rho.$

Рассмотрим прежде всего *область I*. Необходимо исследовать три двумерных среза:

a) $\zeta = \text{const}; K = K_2 = 0;$ в качестве границы возьмем контур с $\rho = \text{const}$ и геодезической кривизной $k_g = 1/\rho.$ Тогда $\oint_{\partial} k_g dl = 2\pi$ и согласно (4.1.16) получаем эйлерову характеристику равной $\chi = 1,$ что указывает на гомеоморфизм рассматриваемого сечения евклидовому 2-кругу.

b) $\varphi = \text{const}.$ В этом случае 2-сечение проходит через ось светоподобной нити. Здесь необходимо воспользоваться формулой Гаусса-Бонне (4.1.15). Из-за сингулярности функции G исключим из области интегрирования \sum линию $\alpha\varphi = 0$ (саму светоподобную нить или ось «цилиндра»). Граница области $\sum: \zeta = \zeta_1 = \text{const}; \zeta = \zeta_2 = \text{const}$ (в обоих случаях $k_g = 0$ (геодезические)); $\rho = \rho_1 = \text{const}$ и $\rho = \rho_2 = \text{const}.$ В результате контурного интегрирования получаем

$$\oint_{\partial \Sigma} k_g dl = \Delta \zeta \left(-\left(\sqrt{G} \right)' \Big|_{\rho_1} + \left(\sqrt{G} \right)' \Big|_{\rho_2} \right), \quad (6.3.8)$$

где $\Delta \zeta = (\zeta_2 - \zeta_1)$.

Интегрирование по площади такого прямоугольника кривизны $K = K_3$ приводит к выражению

$$\int_{\Sigma} K_3 d\sigma = -\Delta \zeta \left(\sqrt{G} \right)' \Big|_{\rho_1}^{\rho_2}. \quad (6.3.9)$$

Таким образом,

$$\oint_{\partial \Sigma} k_g dl + \int_{\Sigma} K_3 d\sigma = 0 \quad (6.3.10)$$

и соотношение (4.1.15) превращается в равенство

$$\sum_{i=1}^4 \theta_i = 2\pi \chi. \quad (6.3.11)$$

С другой стороны, эйлерова характеристика для этого прямоугольника равна $\chi = B - P + \Gamma = 1$, т. е. $\sum_{i=1}^4 \theta_i = 2\pi$.

В результате получаем, что 2-сечение $\varphi = \text{const}$, $0 < a\rho < 1$ (внутренняя область) гомеоморфно бесконечной полосе евклидовой 2-плоскости.

с) $\rho = \text{const}$ (цилиндрическая поверхность). 2-метрика

$$d\hat{s}^2 = G(\rho) d\zeta^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad (6.3.12)$$

заменой переменных $\tilde{\zeta} = \sqrt{G} \zeta$ и $\tilde{\varphi} = \rho \varphi$ преобразуется в 2-метрику евклидовой плоскости: $d\tilde{\zeta}^2 + d\tilde{\varphi}^2$ и, значит, гауссова кривизна равна нулю. Область Σ возьмем в виде кольца: $0 < \varphi \leq 2\pi$, $\Delta \zeta = \zeta_2 - \zeta_1$. Ясно, что при $\varphi = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ соответствующие геодезические кривизны равны нулю, т. е. левая часть соотношения (4.1.16) исчезает. Правая часть также равна нулю, так как триангуляция склеенной ленты позволяет убедиться, что эйлерова характеристика $\chi = 0$.

Таким образом, множество $\rho = \text{const}$ для любого конечного ζ гомеоморфно евклидовой полуплоскости или поверхности обычного кругового цилиндра конечной длины.

Переходя в область **II**, подчеркнем, что область **I** считается удаленной из рассматриваемого пространства:

а) $\zeta = \text{const}$, $K = K_2 = 0$. Область интегрирования – кольцо с внутренним радиусом $\rho_1 > 1/\alpha$ и внешним радиусом $\rho_2 > \rho_1$. Геодезическая кривизна $k_g > 1/\rho$ и для кольца (две компоненты края) $\oint k_g dl = 0$, т. е. $\chi = 0$ (плоское (в евклидовом смысле) кольцо, так как $K_2 = 0$).

Если же бесконечно удаленная точка ($\rho_2 = \infty$) не выколота, то $\oint k_g dl = 2\pi$ и эйлерова характеристика $\chi = 1$;

б) $\varphi = \text{const}$. Рассуждения здесь те же, что и для области **I**, но так как область интегрирования ограничена лишь значениями $\alpha\varphi = 1$, то $\chi = 0$;

в) $\rho = \text{const}$. Проделывая все аналогично, как для области **I**, получим тот же результат.

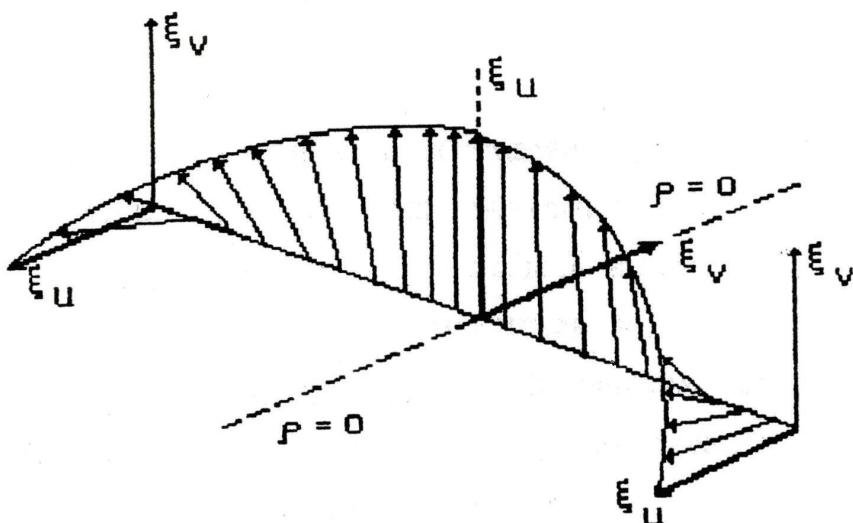


Рис. 14

В заключение этого параграфа необходимо добавить, что сшивку геометрий областей **I** и **II** следует рассматривать с учетом поворота 4-репера при переходе от одной области к другой. Если обозначить временноподобный вектор репера как ξ_u , а пространственноподобный как ξ_v в области **I**, то в области **II** они поменяются ролями и угол поворота будет равен $\pi/2$. Этот поворот показан на рис. 14, но не надо забывать, что на самом деле он происходит в псевдоевклидовой плоскости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная в настоящей книге процедура светоподобного предельного перехода на классическом уровне (без учета квантовых явлений) в применении к островным источникам, которые описываются известными решениями Шварцшильда, Керра и НУТ, позволяет по-иному взглянуть и на сами светоподобные источники, с которыми мы сталкиваемся в природе. В частности, уже на уровне метрики для решения Керра, записанного в координатах Керра-Шилда, результирующая метрика, полученная после предельного светоподобного перехода, описывает волновое гравитационное поле, принадлежащее *III* типу по Петрову со спинирующим сингулярным безмассовым источником, который обладает спиральностью и который можно рассматривать как светоподобную безмассовую частицу – *геликсон* (*helixon*). Для решений Шварцшильда и НУТ аналогичный светоподобный предел приводит к светоподобной скалярной частице – *лайтону* (*lighton*).

Найденное в работе предельное сингулярное электромагнитное поле, обладающее свойствами плоской электромагнитной волны и создаваемое электрически заряженной частицей, двигающейся со скоростью света в вакууме, не может быть физически проинтерпретировано из-за отсутствия таких частиц в природе (в вакууме).

В отношении полученных в данной работе на классическом уровне результатов по светоподобным безмассовым частицам, как скалярным, так и векторным, следует упомянуть, что проекция момента импульса фотон на направление движения может иметь лишь два значения (положительное и отрицательное), т. е. фотон обладает спиральностью.

Исследование светоподобного предела для массивных частиц, гравитационные поля которых описываются метриками Шварцшильда, Керра и НУТ, на уровне матриц Вейля (на уровне тензора кривизны) позволяет сделать вывод о катастрофическом поведении упомянутых решений при применении процедуры светоподобного предела. Другими словами, такая процедура может быть описана как катастрофа сборки с точки зрения теории катастроф. Одновременно оказывается, что переход через точку катастрофы сборки есть фазовый гравитационный переход второго рода между алгебраическими типами гравитационного поля до и после применения светоподобного предела, т. е. алгебраический тип *D* меняется на тип *N* или *III* (переход в более симметричную «фазу»). Эти фазовые переходы являются аналогами фазовых переходов в теории конденсированного состояния вещества. При этом алгебраические типы гравитационного поля выступают как фазовые состояния, и фазовые переходы осуществляются между ними.

В связи с отсутствием фокусировки светоподобных источников при движении их в одном и том же направлении, с помощью линейной суперпозиции можно сконструировать новые светоподобные объекты, в частности, светоподобную нить. Оказывается, что бесконечная светоподобная нить не может иметь спиральности, а светоподобный луч – может.

Таким образом, применение процедуры светоподобного предела к решениям Шварцшильда, НУТ и Керра позволяет получить новые светоподобные частицы (*лайтон* и *геликсон*), имеющие только два свободных физических параметра: полную энергию и спиральность. Поэтому можно утверждать, что светоподобные безмассовые источники в общей теории относительности *не имеют «волос»*.

SUMMARY

In this book some results of the investigations of the lightlike limits on Weyl's matrixes level of the Schwarzschild, Kerr and NUT massive particles are summarized. The metrics of the exterior gravitational fields of these particles are solutions of Einstein's equations. The investigations are also connected with the theory of catastrophes and the theory of phase transitions.

The exterior gravitational fields of massive Schwarzschild's, Kerr's and NUT's particles belong to an algebraic type **D**. The lightlike limit is a procedure when a velocity of rapidly moving massive particles tends towards the velocity of light along some axis and the total energy of each particle is constant (i.e. a rest mass of the particle tends towards zero) together with Kerr's angular momentum along axis of the moving and with NUT's parameter which also tends towards constant.

Under such lightlike limiting procedure the algebraic type of the gravitational field of particle is changed. In other words the original symmetry of the gravitational field is broken. The lightlike limits of these massive particles are found and the limiting gravitational fields of rapidly moving particles belong to the wave fields of **N** and **III** algebraic types. The metrics of the gravitational fields of such lightlike sources are exact solutions of linear Einstein's equations (the D'Alembert equation). The lightlike procedure leads to two types of lightlike particles: a **lighton** (the scalar particle) and a **helixon** (a spinning particle with the helicity).

These limits can be also described as the cusp catastrophes on Weyl's matrixes level with a change of gravitational field symmetry of such sources. In considered cases these lightlike limits are phase transitions of second kind of the gravitational field from **D** algebraic type into **N** type or **III** type (transition of one «phase» to another). Petrov's algebraic types are different «phases» of gravitational field. Here we have an analog of phase transitions into condensed matter.

The superposition of such lightlike sources makes possible a construction of the lightlike plane and also of an infinite lightlike pencil (with-out helicity) and of a lightlike ray (with helicity).

Thus as the result of the lightlike procedure for Schwarzschild's, NUT's and Kerr's solutions we obtain new metrics of the gravitational wave fields of the lightlike massless particles (the **lightons** and the **helixons**) with only two freedom parameters: the total energy and the helicity. The another physical parameters are lost under such limiting process. It can be said the lightlike sources «have no hairs».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйнштейн, А. Собрание научных трудов. – М. : Наука, 1965–1967. – Т.1. –1965. –700 с. ; Т.2. – 1966. – 878 с.; Т.3. – 1966. – 632 с.; Т.4. –1967. – 599 с.
2. Петров, А.З. Об одновременном приведении тензора и бивектора к каноническому виду // Уч. зап. Казанск. ун-та. – Казань : КГУ. – 1950. – Т.110. – С.50.
3. Петров, А. З. О пространствах, определяющих поля тяготения // ДАН СССР. – 1951. – Т. 81. – № 2. – С.149–152.
4. Петров, А. З. Классификация пространств, определяемых полями тяготения // Уч. зап. Казанск. ун-та.- Казань : КГУ. – 1954. – Т.114. – Кн. 8. – С.55.
5. Петров, А. З. Новые методы в общей теории относительности. – М. : Наука, 1966.
6. Pirani, F.A.E. Invariant fomulation of gravitational radiation theory // Phys.Rev. – 1957. – V.105. – P.1089–1099. (Перевод: Пирани Ф.А. Инвариантная формулировка теории гравитационного излучения //Новейшие проблемы гравитации. – М. : ИЛ, 1961. – С. 257–288.)
7. Pirani, F.A.E., Shild, A. Geometrical and Physical Interpretation of the Weyl Conformal Curvature Tensor //Bull. de l'Acad.Polon. de Sci.(serie des sci. math., astr. et phys.). – 1961. – V.9. – №.7. – P.543–546.
8. Szekeres, P. The Gravitational Compass //J.Math.Phys. – 1965. – V.6. – № 9. – P.1387–1391.
9. Захаров, В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. – М. : Наука, 1972. – 199 с.
10. Debever R. Sur le Tenseur de Super-Energie //Compt. Rend.Acad. Sci.(Paris). – 1959. – V.249. – P.1324–1326.
11. Sachs R.K. Gravitational waves in general relativity. VI. The outgoing radiaton condition //Proc. Roy. Soc.(London). – 1962. – V. A264. – P. 309–338.
12. Sachs R.K Gravitational waves in general relativity. VIII. Waves in asymptotically flat space-time //Proc. Roy.Soc.(London). – 1962. – V.A270. – P.103–126.
13. Баранов, А. М. Теория катастроф и классификация Петрова / Тез. конфер. «200 лет Казанскому университету». – КГУ : Казань, 2004. С.107.
14. Мицкевич Н.В., Баранов А.М., Луговцов В.В. Композиция типов пространств по классификации Петрова // Материалы IV Всесоюзной конфер. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». – Минск, 1976. – С. 195–200.

15. Баранов, А.М., Мицкевич, Н.В. О композиции пространств в общей теории относительности / Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы. – М., 1976, деп. ВИНИТИ СССР. – № 2628–76.
16. Баранов, А.М. Возмущения пространств и классификация Петрова / Ун-т Дружбы народов им. П. Лумумбы. – М., 1976. - 8 с. – Библиогр.: 4 назв. – Деп. в ВИНИТИ 13.07.76, № 2632–76 .
17. Баранов, А.М. Трансформация типов пространств под действием генераторов группы Лоренца // Тез. докл. IV Всесоюзной конфер. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». – Минск, 1976. – С. 200–202.
18. Баранов, А.М. О наложении пространств N- и 0-типов на примерах точных решений уравнений тяготения // Изв. вузов. Физика. – 1995. – № 5. – С. 77–82.
19. Baranov, A. M. Application of types-*N* and -*O* spaces to examples of exact solutions of the gravitational equations // Russian Physics Journal, 1995. – V. 38. – № 5. – P. 503–507.
20. Баранов, А. М. Светоподобные источники в общей теории относительности // Вестник Красноярского государственного университета. Физ.-мат. науки, 2005. – № 7. – С. 44–53.
21. Baranov, A.M. Gravitational fields of lightons and helixons in general relativity // Cravitation & Cosmology, 2006. – V.12. – № 2–3. – P. 100–102.
22. Аристотель. Физика. Соч. М. : Мысль, 1981. Т.3.
23. Баранов, А. М. Основы теории относительности и гравитации: Математическое введение : учеб. пособие / Краснояр. ун-т. Красноярск, 1987. – 91 с.
24. Бублейников, Ф. Д. Галилео Галилей. – М. : Просвещение, 1964.
25. Лауэ, М. Статьи и речи. – М. : Наука, 1969.
26. Дикке, Р. Гравитация и вселенная. – М. : Мир, 1972.
27. Сиама, Д. Физические принципы общей теории относительности. – М. : Мир, 1971.
28. Брагинский, В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. – М. : Наука, 1970; Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах. – М. : Наука, 1974.
29. Тейлор, Э., Уилер, Дж. Физика пространства-времени. – М. : Мир, 1971.
30. Николсон, И. Тяготение, чёрные дыры и Вселенная. – М. : Мир, 1983.
31. Косневски, Ч. Начальный курс алгебраической топологии. – М. : Мир, 1983. – 302 с.
32. Риман, Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии / Соч. – М. – Л. : Гос. изд-во технич.-теор. лит., 1948. – С. 279 .

33. Картан, Э. Геометрия римановых пространств. – М. – Л. : Объ-
ед.научно-техн. изд-во НКТП СССР, 1936. – 244 с.
34. Flanders, H. Differential forms with applications to the Physical
Sciences. – New-York-London: Academic Press, 1963. – 203 с.
35. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988.
36. Мизнер, Ч., Торн, К., Уилер, Дж. Гравитация : в 3 т. – М. : Наука, 1977. – Т.1. – 1977. – 474 с.; Т. 2. – 1977. – 525 с.; Т. 3. –1977. – 510 с.
37. Лобачевский, Н.И. Полн. собр. соч. – М.: Л.: Гос. изд-во техн.
теор. лит., 1949. – Т. 2.
38. Каган, В.Ф. Очерки по геометрии. – М. : Изд-во МГУ, 1963.
39. Бергман, П. Загадка гравитации. – М. : Наука, 1969.
40. Synge, J.L. The Petrov classification of Gravitational Fields // Com-
mun. Dublin Inst. Adv. Studies. – Dublin, 1964. – Series A. – №.15. – P. 1–51.
41. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1967. – 575 с.
42. Мицкевич, Н.В., Баранов, А.М., Луговцов, В.В. Композиция ти-
пов пространств по классификации Петрова // Тез. докл. IV Всесоюзной
конфер. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы
теории относительности и гравитации». – Минск, 1976. – С. 195–200.
43. Точные решения уравнений Эйнштейна / под ред. Э. Шмутцера. –
М. : Энергоиздат, 1982. – 416 с.
44. Владимиров, Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации. – М. :
Энергоиздат, 1982. – 256 с.
45. Misra, R. M. Classification of Curvature Tensor // Amer. J. Phys. –
1967. – V. 35. – № 5. – P. 394–398.
46. Stewart, I. The seven elementary catastrophes // New Scientist. 1975.
– V. 68. – № 976. – P. 447–454 .
47. Thompson, J. Instabilities, bifurcations and catastrophes // Phys. Lett. –
1975. – V. 51A. – № 4. – P. 201–203 .
48. Trotman, D., Zeeman, C. The classification of elementary catastrophes
of codimension ≤ 5 . // Lect. Notes in Math. – Berlin-Heidelberg-New York :
Springer-Verlag. –1976. – № 525. – P. 263–327.
49. Брекер, Т., Ландер, Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. –
М. : Мир, 1977. – 207 с.
50. Poston, T., Stewart, I. Taylor expansions and catastrophes // Research
Notes in Math. – London-San Francisco-Melbourne : Pitman. – 1978. – № 7. –
166 р.
51. Касти, Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастро-
фы. – М. : Мир, 1984. – 216 с.
52. Хакен, Г. Синергетика. – М. : Мир, 1980. – 404 с.
53. Арнольд, В. И., Варченко, А.Н., Гусейн-Заде, С.М. Особенности
дифференцируемых отображений. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. – 304 с.

54. Stewart, I. Catastrophe Theory in Physics // Rep. Prog. Phys. – 1982. – V. 45. – P. 185–221 .
55. Арнольд, В. И. Особенности, бифуркации и катастрофы // УФН. – 1983. – Т. 141. – Вып. 4. – С. 569–590 .
56. Постон, Т., Стюарт, И. Теория катастроф и ее приложения. – М. : Мир, 1980. – 607 с.
57. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 350 с.; Т. 2. – 285 с.
58. Томпсон, Дж. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М. : Мир, 1985. – 254 с.
59. Нагибова, И.А., Богданов, Е.И., Дерюгин, И.А. Динамика квантовых систем. – Минск : Наука и техника, 1986. – 279 с.
60. Арнольд, В. И. Теория катастроф. – М. : Наука, 1990. – 127 с.
61. Баранов, А.М., Савельев, Е.В. Открытая Вселенная : попытка почти полного описания. 4. «Бутылочный» потенциал / Краснояр. ун-т. – Красноярск, 1990. –13 с. – Библиогр.: 11 назв. – Деп. в ВИНИТИ 03.12.90, № 6061-В90.
62. Баранов, А. М., Паклин, Н.Н. Генерирование и конструирование статических сферически-симметричных решений уравнений тяготения // Изв. вузов. Физика. – 1990. – № 6. – С. 5–9.
63. Baranov, A. M. Catastrophe theory and algebraic classification of gravitational and electromagnetic fields// Abstracts of Contributed Papers of 10th Intern. Confer. on GRG. – Padova (Italy), 1983. – V. 1. – P. 174–175.
64. Баранов, А. М. Фундаментальность теоремы Пифагора при введении понятия расстояния в физике // Тезисы докладов межзонального научно-метод. совещ. – Красноярск : Изд-во КрасГУ, 1988. – С. 21–22.
65. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е.М Статистическая физика. Часть 1. – М. : Наука, 1976.
66. Картан, А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М. : Мир, 1971. – 302 с.
67. Сокольников, И. С. Тензорный анализ. – М. : Наука, 1971. – 373 с.
68. Буземан, Г. Геометрия геодезических. – М. : Изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 503 с.
69. Бакельман, И. Я., Вернер, А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию в «целом». – М. : Наука, 1973. – 440 с.
70. Масси, У., Столлингс, Дж. Алгебраическая топология. Введение. – М. : Мир, 1977. – 343 с.
71. Косневски, Ч. Начальный курс алгебраической топологии. – М. : Мир, 1983. – 302 с.
72. Баранов, А. М. Применение теоремы Гаусса-Бонне к некоторым решениям уравнений тяготения // Гравитация и фундаментальные взаимодействия. – М. : Изд-во Ун-та дружбы народов, 1988. – С. 105.

73. Баранов, А. М. Формула Гаусса-Бонне и полное поле Шварцшильда // Гравитация и электромагнетизм. – Минск : Изд-во «Университетское», 1988. – С. 15–20 .
74. Baranov, A. M. Application of the Gauss-Bonnet's theorem to some solutions of Gravitational equations // Abstracts of Contributed Papers of M.Grossmann Meeting. – Perth (Australia), 1988. – P. 51.
75. Pirani, F.A.E. Gravitational Waves in General Relativity. 1V. The Gravitational Field of a Fast-movinig Particle // Proc. Roy. Soc. (London). – 1959. – V. A252. – P. 96–101.
76. Баранов, А. М. Гравитационные поля «светоподобных» источников / Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы. – М., 1976, деп. ВИНИТИ СССР. – № 2631–76.
77. Aichelburg, P. C., Sexl, R.U. The Gravitational Fields of Massless Particle // Lett. Nuovo Cimento. – 1970. – V.4. – P. 1316–1318.
78. Баранов, А. М. Светоподобный предел решения Керра и конструирование светоподобной нити // Изв. вуз. Физика. – 1994. – № 10. – С. 64–69.
79. Baranov, A. M. Light-cone limit of the Kerr solution and construction of the field of a light-cone filament // Rus. Phys. Journal. 1994. – V. 37. – No 10. – P. 971–975.
80. Synge, J. L. Relativity: the General Relativity. – Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1960.
81. Baranov, A. M. Lightlike limits of massive particles in general relativity as catastrophes // Proc.of Intern. Sci. Meeting PIRT-2005}, Moscow, Liverpool, Sunderland, 2005. – P. 116–122 .
82. Kerr, R., Shild, A. A new Class of Vacuum Solutions of the Einstein Field Equations // Centenario della nascita di Galileo Galilei. Firenze. – 1965. – Tome 1. – P. 22.
83. Baranov, A. M. Lightlike spinning source// Abstracts of Contributed Papers of 9th Intern.Confer. on GRG.- Jena(GDR),1980. – V. 1. – P. 6.
84. Баранов, А. М. Об одном обобщении плоской гравитационной волны // Исследования по классич. и квант. теории. – Днепропетровск : Изд-во ДГУ, 1983. – С. 79–85 .
85. Баранов, А. М. Светоподобный предел источника НУТ // Гравитация и теория относительности. – Казань : КГУ, 1987. – Вып. 24. – С. 11–19.
86. Баранов, А. М. Светоподобный предел шварцшильдоподобного источника как катастрофа // Гравитация и электромагнетизм. – Минск : Изд-во «Университетское». – 1992. – Вып. 5. – С. 27–31.
87. Newman, E., Tamburino, L., Unti, T. Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric. // J. Math. Phys. – 1963. – V. 40. – No. 7. – P. 915.
88. Misner, S. W. The Flatter Regions of Newman, Unti and Tamburino's Generalized Schwarzschild Space // J. Math. Phys. –1963. – V. 40. – No. 7. – P. 924.

89. Baranov, A. M. On Lightlike NUT Source // Abstracts of Contrib. Papers of 10th Inter. Conf.on GRG – Padova (Italy). –1983. – V. 1. – P. 176–177.
90. Kerr, R. P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metric // Phys. Rev. Letters. – 1963. – V. 11. – No. 5. – P. 237–238. (Перевод : Керр Р. //Альберт Эйнштейн и теория гравитации.- М. : Мир, 1979. – С. 208–211.)
91. Schiffer, M., Adler, R., Mark, J., Sheffield, C. Kerr geometry as complexified Schwarzschild geometry // J.Math.Phys. – 1973. – V. 14. – №. 1. – P. 52–56.
92. Шилов, Г. Е. Математический анализ: второй специальный курс. – М. : Наука, 1965. – С. 145.
93. Мицкевич, Н. В. Физические поля в общей теории относительности. – М. : Наука, 1969. – 326 с.
94. Берестецкий, В. Б., Лифшиц, Е.М., Питаевский, Л.П. Квантовая электродинамика. – М. : Наука, 1989. – 723 с.
95. Baranov, A. M. Lightlike Limits of NUT and Kerr Solutions as catastrophes // Тезисы доклад. Международн. конфер. «Геометризация физики III» (Казань-97). – Казань : Хэтер, 1997. – С. 4–5.
96. Baranov, A. M. Lightons and Helixons as Lightlike Particles in General Relativity // J. SibFU. Math. & Phys. – 2011. – No 1. – P. 3–10.
- 97 Baranov, A. M. Lightlike sources have no «hairs» // Abstracts of Contributed of 5th M.Grossmann Meeting. – Perth (Australia), 1988. – P. 4.
98. Хокинг, С., Эллис, Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. – М. : Мир, 1977. – 431 с.
99. Baranov, A. M. On lightlike pencil // Abstracts of 2-d Kharkiv Confer. «Gravitation, cosmology and relativistic astrophysics». Kharkiv, 2003. – P. 34.
100. Mitskievich, N. V., Kumaradtya, K.K. The gravitational field of a spinning pencil of light // J. Math. Phys. – 1989. – V.30. – № 5. – P. 1095–1099.
101. Mitskievich, N. V. Gravitational Field of a Pencil of Light // Exp. Tech. der Physik. – 1981. – V. 29. – № 3. – P. 213–215.

Научное издание

Баранов Александр Михайлович

**СВЕТОПОДОБНЫЕ ИСТОЧНИКИ
В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Монография

Редактор А. В. Прохоренко

Корректор Т. Е. Баstryгина

Компьютерная верстка: Н. Г. Дербенева

Подписано в печать 19.11.2010. Печать плоская. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 6,51. Тираж 100 экз. Заказ № 2639

Редакционно-издательский отдел
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79

Отпечатано полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а

Cette monographie est consacrée à l'étude des sources pareils à la lumière. On introduit les particules pareils à la lumière: **lumi-ron** et **spiralon**. Le passage limite représente le passage de phase gravitationnel de la deuxième génération du type alg brique **D** aux types d'onde **N** ou **III**. Les types alg briques de Petrov sont les diverses "phases" du champ de la gravitation. Des sources pareils à la lumière peuvent être construits le fil infini pareil à la lumière sans le spin et le rayon lumineux avec spin. C'est montré que dans la théorie de la relativité générale chez les sources pareils à la lumière «sont absentes cheveux».

ISBN 978-5-7638-2077-5



9 785763 820775 >